

離散数理工学 第 2 回
数え上げの基礎：漸化式の立て方

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2018 年 10 月 18 日

最終更新：2018 年 10 月 17 日 11:57

スケジュール 前半 (予定)

- | | | |
|---|----------------------|---------|
| 1 | 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 | (10/4) |
| ★ | 休講 | (10/11) |
| 2 | 数え上げの基礎：漸化式の立て方 | (10/18) |
| 3 | 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) | (10/25) |
| ★ | 休講 | (11/1) |
| 4 | 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) | (11/8) |
| 5 | 離散代数：対称群と置換群 | (11/15) |
| ★ | 休講 | (11/22) |
| 6 | 離散代数：有限群 | (11/29) |
| 7 | 離散代数：有限群の応用 | (12/6) |

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|---------------------------|---------|
| 8 | 離散確率論：確率的離散システムの解析 | (12/13) |
| ★ | 中間試験 | (12/20) |
| 9 | 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) | (1/10) |
| 10 | 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) | (1/17) |
| 11 | 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) | (1/24) |
| 12 | 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) | (1/31) |
| 13 | 離散確率論：エントロピー | (2/7) |
| ★ | 期末試験 | (2/14?) |

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

漸化式を立てられるようになる

- ▶ 組合せ構造の数え上げ
- ▶ アルゴリズムの計算量

格言

アルゴリズムの計算量解析の基礎は数え上げ

目次

- ① 組合せ構造の数の上げ
グラフにおける独立集合の数の上げ
- ② アルゴリズムの計算量
- ③ 今日のまとめ

無向グラフ

無向グラフとは？

無向グラフとは、順序対 (V, E) で、

- ▶ V は集合
- ▶ $E \subseteq 2^V$ は V の 要素数 2 の部分集合の集合

であるもののこと

例：

- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

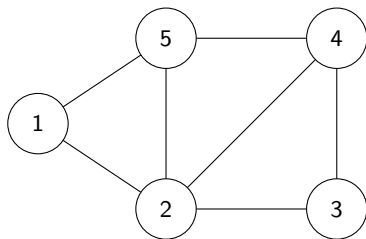
注意

$$\{2, 5\} = \{5, 2\}$$

(集合では順序を不問)

無向グラフの図示

- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

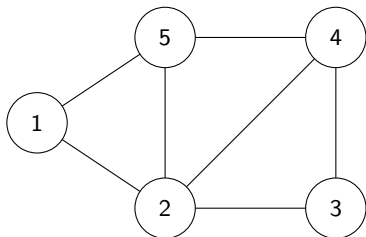


無向グラフの用語

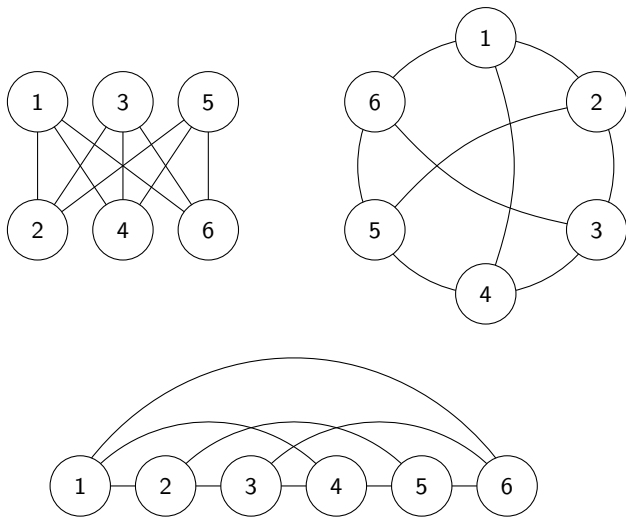
無向グラフ $G = (V, E)$

無向グラフの用語

- ▶ V の要素を G の**頂点**と呼ぶ
- ▶ V を G の**頂点集合**と呼ぶ
- ▶ 辺 $\{u, v\} \in E$ に対して, u, v をその**端点**と呼ぶ
- ▶ 頂点 v が辺 e の端点であるとき, v は e に**接続**するという
- ▶ 頂点 u と v が辺を成すとき, u と v は**隣接**するという
- ▶ $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$
- ▶ 頂点 2, 3 は辺 $\{2, 3\}$ の端点
- ▶ 頂点 2 は辺 $\{2, 3\}$ に接続する
- ▶ 頂点 2 と頂点 3 は隣接する



1つのグラフに対するいろいろな図示



用語に関する注意

無向グラフ

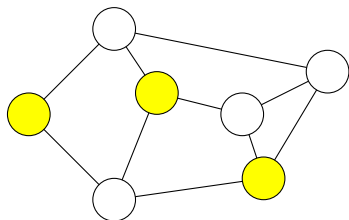
- ▶ 「頂点」の別名：「節点」, 「ノード」, 「点」
- ▶ 「辺」の別名：「枝」, 「エッジ」

独立集合

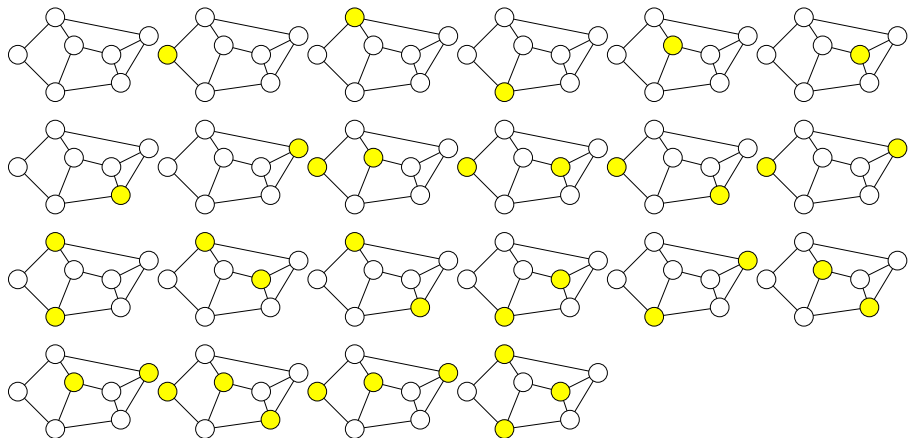
無向グラフ $G = (V, E)$

独立集合とは？

G の独立集合とは、頂点部分集合 $I \subseteq V$ で、
任意の異なる2頂点 $u, v \in I$ に対して $\{u, v\} \notin E$



すべての独立集合 (独立集合全体)

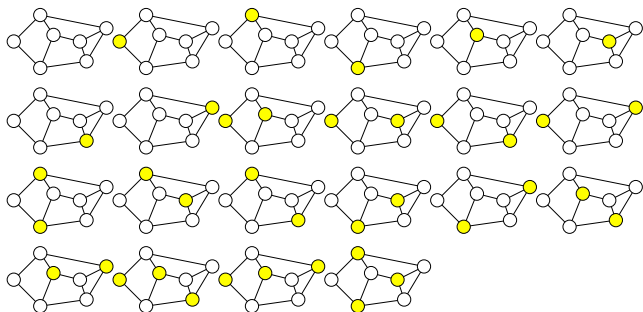


22 個

目標

やりたいこと

与えられた無向グラフにおける独立集合の数を計算したい

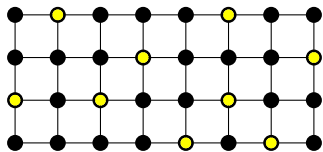
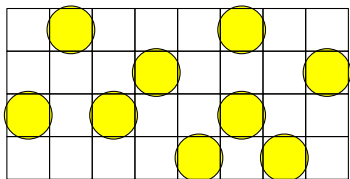


22 個

目標：なぜ計算したい？

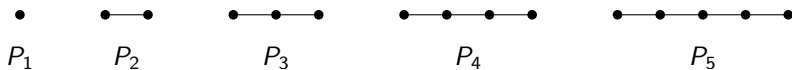
統計力学における「ハードコア格子気体模型」

- ▶ 系を無向グラフ $G = (V, E)$ としてモデル化する
- ▶ 各 $v \in V$ が状態 $\sigma_v \in \{0, 1\}$ を持つ
 - ▶ $\sigma_v = 0 \Leftrightarrow v$ に気体分子が存在しない
 - ▶ $\sigma_v = 1 \Leftrightarrow v$ に気体分子が存在する
- ▶ $\sigma_v = 1$ となる $v \in V$ の集合が独立集合である
 \Leftrightarrow 気体分子同士が重なり合わない
- ▶ 系において許される状態の総数 = 独立集合の総数
- ▶ \rightsquigarrow 系の分配関数の計算 \rightsquigarrow 系の振舞いのシミュレーション



例：道

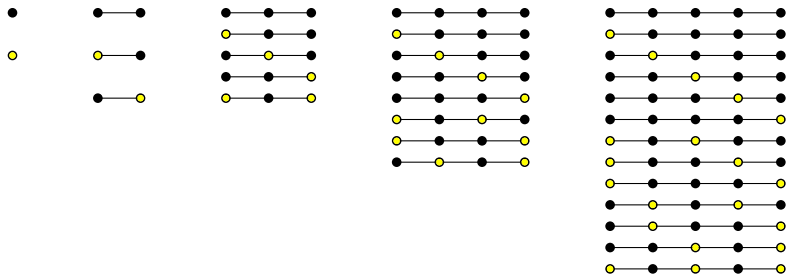
道と呼ばれる無向グラフ



目標

グラフ P_n における独立集合の総数を計算する

例：道 — 手でやってみる

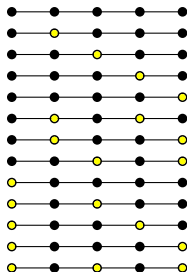


n	1	2	3	4	5
独立集合の総数	2	3	5	8	13

例：道 — 系統立ててやってみる

グラフ P_5 を考えると，独立集合は次の 2 種類

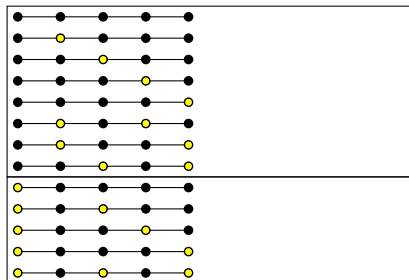
- ▶ (A) 左端の頂点を要素として含まないもの
- ▶ (B) 左端の頂点を要素として含むもの



例：道 — 系統立ててやってみる

グラフ P_5 を考えると，独立集合は次の 2 種類

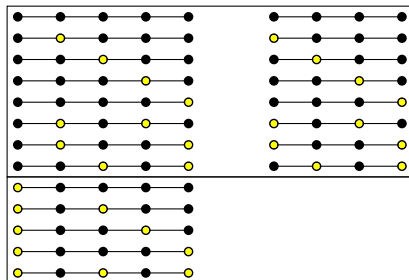
- ▶ (A) 左端の頂点を要素として含まないもの
- ▶ (B) 左端の頂点を要素として含むもの



例：道 — 系統立ててやってみる

グラフ P_5 を考えると，独立集合は次の 2 種類

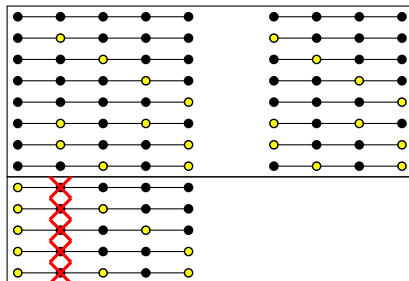
- ▶ (A) 左端の頂点を要素として含まないもの
= 左端の頂点を除去してできる P_4 の独立集合
- ▶ (B) 左端の頂点を要素として含むもの



例：道 — 系統立ててやってみる

グラフ P_5 を考えると，独立集合は次の 2 種類

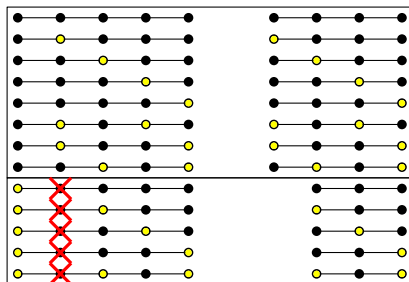
- ▶ (A) 左端の頂点を要素として含まないもの
= 左端の頂点を除去してできる P_4 の独立集合
- ▶ (B) 左端の頂点を要素として含むもの



例：道 — 系統立ててやってみる

グラフ P_5 を考えると，独立集合は次の 2 種類

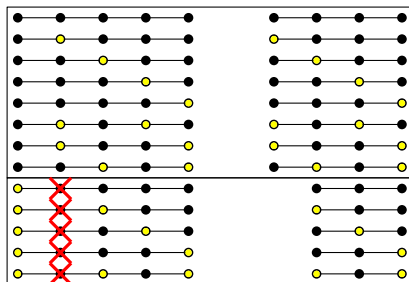
- ▶ (A) 左端の頂点を要素として含まないもの
= 左端の頂点を除去してできる P_4 の独立集合
- ▶ (B) 左端の頂点を要素として含むもの
= 左側の 2 頂点を除去してできる P_3 の独立集合 \cup { 左端の頂点 }



例：道 — 系統立ててやってみる

グラフ P_5 を考えると，独立集合は次の 2 種類

- ▶ (A) 左端の頂点を要素として含まないもの
= 左端の頂点を除去してできる P_4 の独立集合
- ▶ (B) 左端の頂点を要素として含むもの
= 左側の 2 頂点を除去してできる P_3 の独立集合 \cup { 左端の頂点 }



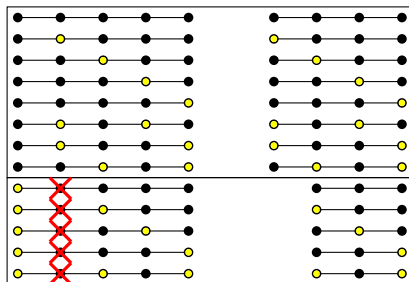
つまり，

P_5 の独立集合の総数 = P_4 の独立集合の総数 + P_3 の独立集合の総数

例：道 — 系統立ててやってみる (一般化)

グラフ P_n を考えると，独立集合は次の 2 種類

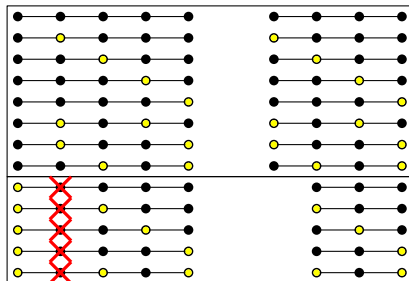
- ▶ (A) 左端の頂点を要素として含まないもの
= 左端の頂点を除去してできる P_{n-1} の独立集合
- ▶ (B) 左端の頂点を要素として含むもの
= 左側の 2 頂点を除去してできる P_{n-2} の独立集合 \cup { 左端の頂点 }



例：道 — 系統立ててやってみる (一般化)

グラフ P_n を考えると，独立集合は次の 2 種類

- ▶ (A) 左端の頂点を要素として含まないもの
= 左端の頂点を除去してできる P_{n-1} の独立集合
- ▶ (B) 左端の頂点を要素として含むもの
= 左側の 2 頂点を除去してできる P_{n-2} の独立集合 \cup { 左端の頂点 }



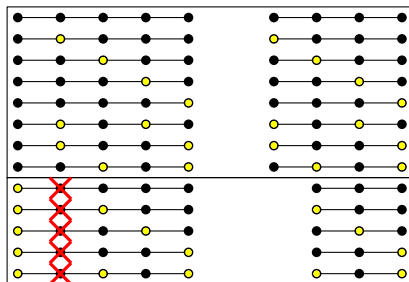
つまり，

$$P_n \text{ の独立集合の総数} = P_{n-1} \text{ の独立集合の総数} + P_{n-2} \text{ の独立集合の総数}$$

例：道 — 系統立ててやってみる (一般化)

グラフ P_n を考えると、独立集合は次の 2 種類 (ただし、 $n \geq 3$)

- ▶ (A) 左端の頂点を要素として含まないもの
= 左端の頂点を除去してできる P_{n-1} の独立集合
- ▶ (B) 左端の頂点を要素として含むもの
= 左側の 2 頂点を除去してできる P_{n-2} の独立集合 \cup { 左端の頂点 }



つまり、 $n \geq 3$ のとき、

$$P_n \text{ の独立集合の総数} = P_{n-1} \text{ の独立集合の総数} + P_{n-2} \text{ の独立集合の総数}$$

例：道 — まとめ

$a_n =$ グラフ P_n における独立集合の総数 とする

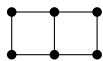
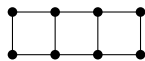
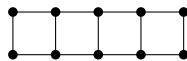
漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解くのは次回

例： $P_n \times P_2$

次のグラフを考える (G_n と書くことにする)

 G_1  G_2  G_3  G_4  G_5

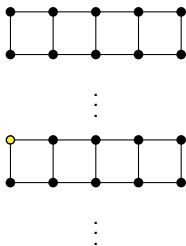
目標

グラフ G_n における独立集合の総数を計算する

例： $P_n \times P_2$ — 系統立ててやってみる

グラフ G_n を考えると、独立集合は次の2種類

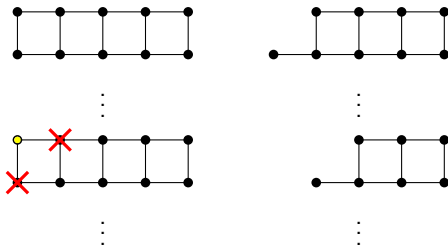
- ▶ (A) 左上端の頂点を要素として含まないもの
- ▶ (B) 左上端の頂点を要素として含むもの



例： $P_n \times P_2$ — 系統立ててやってみる

グラフ G_n を考えると，独立集合は次の2種類

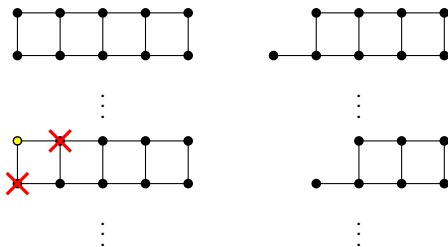
- ▶ (A) 左上端の頂点を要素として含まないもの
= 左上端の頂点を除去してできるグラフの独立集合
- ▶ (B) 左上端の頂点を要素として含むもの
= 左上の3頂点を除去してできるグラフの独立集合 \cup { 左端の頂点 }



例： $P_n \times P_2$ — 系統立ててやってみる

グラフ G_n を考えると、独立集合は次の2種類

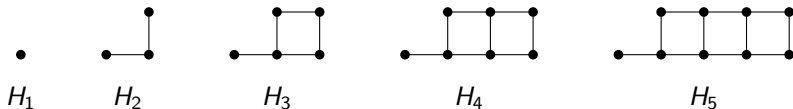
- ▶ (A) 左上端の頂点を要素として含まないもの
= 左上端の頂点を除去してできるグラフの独立集合
- ▶ (B) 左上端の頂点を要素として含むもの
= 左上の3頂点を除去してできるグラフの独立集合 \cup { 左端の頂点 }



問題点：小さくなったグラフが G_k の形をしていない

例： $P_n \times P_2$ から得られたグラフ

次のグラフを考える (H_n と書くことにする)



目標

グラフ H_n における独立集合の総数を計算する

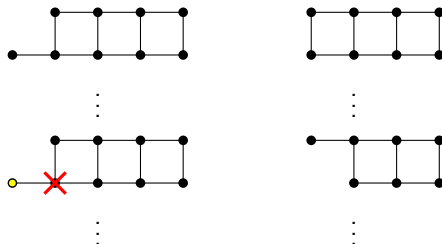
注： $n \geq 2$ のとき、

G_n の独立集合の総数 = H_n の独立集合の総数 + H_{n-1} の独立集合の総数

例： $P_n \times P_2$ から得られたグラフ — 系統立てて考える

グラフ H_n を考えると、独立集合は次の2種類

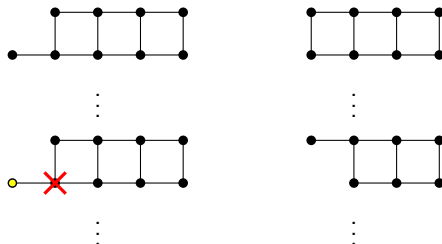
- ▶ (A) 左端の頂点を要素として含まないもの
- ▶ (B) 左端の頂点を要素として含むもの



例： $P_n \times P_2$ から得られたグラフ — 系統立てて考える

グラフ H_n を考えると、独立集合は次の2種類

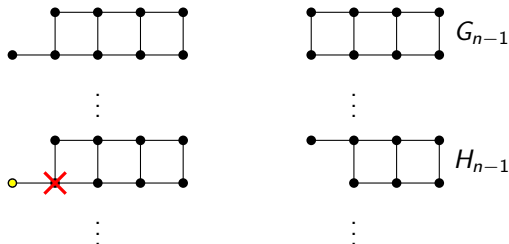
- ▶ (A) 左端の頂点を要素として含まないもの
= 左端の頂点を除去してできるグラフの独立集合
- ▶ (B) 左端の頂点を要素として含むもの
= 左下の2頂点を除去してできるグラフの独立集合 \cup { 左端の頂点 }



例： $P_n \times P_2$ から得られたグラフ — 系統立てて考える

グラフ H_n を考えると、独立集合は次の 2 種類

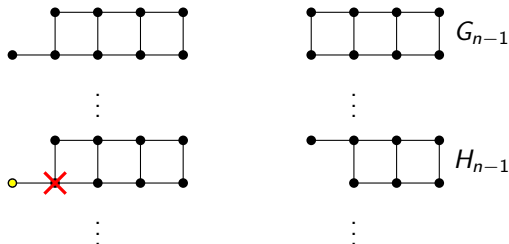
- ▶ (A) 左端の頂点を要素として含まないもの
= 左端の頂点を除去してできるグラフの独立集合
- ▶ (B) 左端の頂点を要素として含むもの
= 左下の 2 頂点を除去してできるグラフの独立集合 \cup { 左端の頂点 }



例： $P_n \times P_2$ から得られたグラフ — 系統立てて考える

グラフ H_n を考えると、独立集合は次の 2 種類

- ▶ (A) 左端の頂点を要素として含まないもの
= 左端の頂点を除去してできるグラフの独立集合
- ▶ (B) 左端の頂点を要素として含むもの
= 左下の 2 頂点を除去してできるグラフの独立集合 \cup { 左端の頂点 }



つまり、 $n \geq 2$ のとき、

H_n の独立集合の総数 = G_{n-1} の独立集合の総数 +
 H_{n-1} の独立集合の総数

例： $P_n \times P_2$ から得られたグラフ — まとめ

次のように定義

- ▶ $b_n =$ グラフ G_n における独立集合の総数
- ▶ $c_n =$ グラフ H_n における独立集合の総数

漸化式

$$b_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ c_n + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$
$$c_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解くのは次回

目次

- ① 組合せ構造の数え上げ
グラフにおける独立集合の数え上げ
- ② アルゴリズムの計算量
- ③ 今日のまとめ

単純な再帰アルゴリズム

アルゴリズム A

```
1: def fnct(n)
2:   print "a"
3:   if n > 2
4:     fnct(n-1)
5:     fnct(n-2)
6:   end
7: end
```

質問

$fnct(n)$ を実行したとき、「a」は何個出力されるか？

単純な再帰アルゴリズム：例

n	a の数	n	a の数	n	a の数	n	a の数
1	1	11	177	21	21891	31	2692537
2	1	12	287	22	35421	32	4356617
3	3	13	465	23	57313	33	7049155
4	5	14	753	24	92735	34	11405773
5	9	15	1219	25	150049	35	18454929
6	15	16	1973	26	242785	36	29860703
7	25	17	3193	27	392835	37	48315633
8	41	18	5167	28	635621	38	78176337
9	67	19	8361	29	1028457	39	126491971
10	109	20	13529	30	1664079	40	204668309

単純な再帰アルゴリズム

アルゴリズム A

```
1: def fnct(n)
2:   print "a"
3:   if n > 2
4:     fnct(n-1)
5:     fnct(n-2)
6:   end
7: end
```

漸化式に向けて

$f_n = \text{fnct}(n)$ を実行したときに出力される a の数

単純な再帰アルゴリズム

アルゴリズム A

```
1: def fnct(n)
2:   print "a"
3:   if n > 2
4:     fnct(n-1)
5:     fnct(n-2)
6:   end
7: end
```

漸化式に向けて

- ▶ 2行目： n が何であろうと必ず1つはaが出力される
- ▶ 4行目と5行目：再帰呼び出し

単純な再帰アルゴリズム

アルゴリズム A

```
1: def fnct(n)
2:   print "a"
3:   if n > 2
4:     fnct(n-1)
5:     fnct(n-2)
6:   end
7: end
```

漸化式

$$f_n = \begin{cases} 1 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ 1 + f_{n-1} + f_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ユークリッドのアルゴリズム — 最大公約数の計算

ユークリッドのアルゴリズム

(正当性は演習問題)

```
1: def gcd(a, b) # precondition: a >= b
2:   print "G"
3:   if b == 0
4:     return a
5:   else
6:     gcd(b, a % b)
7:   end
8: end
```

$a \% b = a$ を b で割った余り (数学では $a \bmod b$ と書く)

質問

$\text{gcd}(a, b)$ を実行したとき、「G」は何個出力されるか？

厳密に求めるのは難しいので、上界を求めたい

(最悪の場合における保証)

ユークリッドのアルゴリズム：ちょっと観察 (1)

a	b	G の数
14	11	5
143	11	2
1432	11	4
14325	11	5
143259	11	5
1432591	11	5
14325910	11	4
143259106	11	3
1432591067	11	5
14325910676	11	2
143259106765	11	4
1432591067659	11	5
14325910676592	11	5
143259106765923	11	4

ユークリッドのアルゴリズム：ちょっと観察 (2)

a	b	G の数
14	13	3
143	13	2
1432	13	4
14325	13	4
143259	13	4
1432591	13	4
14325910	13	3
143259106	13	4
1432591067	13	5
14325910676	13	4
143259106765	13	7
1432591067659	13	5
14325910676592	13	7
143259106765923	13	6

ユークリッドのアルゴリズム：解析に向けて

ユークリッドのアルゴリズム

```

1: def gcd(a, b) # precondition: a >= b
2:   print "G"
3:   if b == 0
4:     return a
5:   else
6:     gcd(b, a % b)
7:   end
8: end

```

考える量

$$g_n = \max_{a \geq 1, b \leq n} \{ \text{gcd}(a, b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \}$$

直感： $g_n =$ 「 $b \leq n$ に限った場合の最悪時計算量」

欲しいもの

g_n の上界

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 — 補題 A

考える量

$$g_n = \max_{a \geq 1, b \leq n} \{ \text{gcd}(a, b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \}$$

補題 A

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq g_{n+1}$

証明 : $g_n = \text{gcd}(a, b)$ の実行で出力される G の数 となる
 $a \geq 1$ と $b \leq n$ を考えると,

$$\begin{aligned} g_n &= \text{gcd}(a, b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\ &\leq \max_{a' \geq 1, b' \leq n+1} \{ \text{gcd}(a', b') \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \} \\ &= g_{n+1} \end{aligned}$$

したがって, $g_n \leq g_{n+1}$



ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 — 補題 B

補題 B

自然数 $a, b \geq 1$ に対して, $a \geq b$ のとき,

$$a \bmod b \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$$

証明 : $a = bq + r$ とする (ただし, $0 \leq r < b$)

- ▶ このとき, $a \bmod b = r$

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 — 補題 B

補題 B

自然数 $a, b \geq 1$ に対して, $a \geq b$ のとき,

$$a \bmod b \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$$

証明 : $a = bq + r$ とする (ただし, $0 \leq r < b$)

- ▶ このとき, $a \bmod b = r$
- ▶ $a \geq b$ より, $q \geq 1$

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 — 補題 B

補題 B

自然数 $a, b \geq 1$ に対して、 $a \geq b$ のとき、

$$a \bmod b \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$$

証明： $a = bq + r$ とする (ただし、 $0 \leq r < b$)

- ▶ このとき、 $a \bmod b = r$
- ▶ $a \geq b$ より、 $q \geq 1$
- ▶ $b \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ のとき、 $r < b \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 — 補題 B

補題 B

自然数 $a, b \geq 1$ に対して、 $a \geq b$ のとき、

$$a \bmod b \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$$

証明： $a = bq + r$ とする (ただし、 $0 \leq r < b$)

- ▶ このとき、 $a \bmod b = r$
- ▶ $a \geq b$ より、 $q \geq 1$
- ▶ $b \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ のとき、 $r < b \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$
- ▶ $b > \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ のとき、 $r = a - bq \leq a - b < a - \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$

注 (演習問題)： 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して、 $n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 — 補題 B

補題 B

自然数 $a, b \geq 1$ に対して、 $a \geq b$ のとき、

$$a \bmod b \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$$

証明： $a = bq + r$ とする (ただし、 $0 \leq r < b$)

- ▶ このとき、 $a \bmod b = r$
- ▶ $a \geq b$ より、 $q \geq 1$
- ▶ $b \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ のとき、 $r < b \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$
- ▶ $b > \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ のとき、 $r = a - bq \leq a - b < a - \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil$
- ▶ したがって、このとき、 $r \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ □

注 (演習問題)： 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して、 $n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析に向けて

ユークリッドのアルゴリズム

```
1: def gcd(a, b) # precondition: a >= b
2:   print "G"
3:   if b == 0
4:     return a
5:   else
6:     gcd(b, a % b)
7:   end
8: end
```

$g_n = \text{gcd}(a, b)$ の実行で出力される G の数

となる a, b を考えると...

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 (1)

$g_n = \text{gcd}(a, b)$ の実行で出力される G の数

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 (1)

$$\begin{aligned}g_n &= \text{gcd}(a, b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\ &= 1 + \text{gcd}(b, a \bmod b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数}\end{aligned}$$

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 (1)

$$\begin{aligned}g_n &= \text{gcd}(a, b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\ &= 1 + \text{gcd}(b, a \bmod b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数}\end{aligned}$$

ここで，場合分け

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 (1)

$$\begin{aligned}g_n &= \text{gcd}(a, b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\ &= 1 + \text{gcd}(b, a \bmod b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数}\end{aligned}$$

ここで、場合分け

- ▶ $a \bmod b = 0$ のとき, $g_n = 2$

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 (1)

$$\begin{aligned}g_n &= \text{gcd}(a, b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\ &= 1 + \text{gcd}(b, a \bmod b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数}\end{aligned}$$

ここで、場合分け

- ▶ $a \bmod b = 0$ のとき, $g_n = 2$
($\because \text{gcd}(b, a \bmod b)$ はもう再帰呼び出しをしない)

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 (1)

$$\begin{aligned}g_n &= \text{gcd}(a, b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\ &= 1 + \text{gcd}(b, a \bmod b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数}\end{aligned}$$

ここで、場合分け

- ▶ $a \bmod b = 0$ のとき, $g_n = 2$
($\because \text{gcd}(b, a \bmod b)$ はもう再帰呼び出しをしない)
- ▶ $a \bmod b \neq 0$ のとき, 次のページ

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 (2)

$$\begin{aligned}g_n &= \text{gcd}(a, b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\ &= 1 + \text{gcd}(b, a \bmod b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数}\end{aligned}$$

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 (2)

- g_n = $\text{gcd}(a, b)$ の実行で出力される G の数
- = $1 + \text{gcd}(b, a \bmod b)$ の実行で出力される G の数
- = $2 + \text{gcd}(a \bmod b, b \bmod (a \bmod b))$ の実行で出力される G の数

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 (2)

- g_n = $\text{gcd}(a, b)$ の実行で出力される G の数
- = $1 + \text{gcd}(b, a \bmod b)$ の実行で出力される G の数
- = $2 + \text{gcd}(a \bmod b, b \bmod (a \bmod b))$ の実行で出力される G の数

注意

$$\text{補題 B より, } b \bmod (a \bmod b) \leq \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$$

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 (2)

$$\begin{aligned}
 g_n &= \text{gcd}(a, b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\
 &= 1 + \text{gcd}(b, a \bmod b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\
 &= 2 + \text{gcd}(a \bmod b, b \bmod (a \bmod b)) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\
 &\leq 2 + \max_{a' \geq 1, b' \leq \lfloor b/2 \rfloor} \{ \text{gcd}(a', b') \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \}
 \end{aligned}$$

注意

$$\text{補題 B より, } b \bmod (a \bmod b) \leq \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$$

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 (2)

$$\begin{aligned}
 g_n &= \text{gcd}(a, b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\
 &= 1 + \text{gcd}(b, a \bmod b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\
 &= 2 + \text{gcd}(a \bmod b, b \bmod (a \bmod b)) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\
 &\leq 2 + \max_{a' \geq 1, b' \leq \lfloor b/2 \rfloor} \{ \text{gcd}(a', b') \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \} \\
 &= 2 + g_{\lfloor b/2 \rfloor}
 \end{aligned}$$

注意

$$\text{補題 B より, } b \bmod (a \bmod b) \leq \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$$

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 (2)

$$\begin{aligned}
 g_n &= \text{gcd}(a, b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\
 &= 1 + \text{gcd}(b, a \bmod b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\
 &= 2 + \text{gcd}(a \bmod b, b \bmod (a \bmod b)) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\
 &\leq 2 + \max_{a' \geq 1, b' \leq \lfloor b/2 \rfloor} \{ \text{gcd}(a', b') \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \} \\
 &= 2 + g_{\lfloor b/2 \rfloor} \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor}
 \end{aligned}$$

注意

$$\text{補題 B より, } b \bmod (a \bmod b) \leq \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$$

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 (2)

$$\begin{aligned}
 g_n &= \text{gcd}(a, b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\
 &= 1 + \text{gcd}(b, a \bmod b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\
 &= 2 + \text{gcd}(a \bmod b, b \bmod (a \bmod b)) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\
 &\leq 2 + \max_{a' \geq 1, b' \leq \lfloor b/2 \rfloor} \{ \text{gcd}(a', b') \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \} \\
 &= 2 + g_{\lfloor b/2 \rfloor} \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor}
 \end{aligned}$$

注意

$$\text{補題 B より, } b \bmod (a \bmod b) \leq \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$$

つまり, どちらの場合でも $g_n \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor}$

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 (2)

$$\begin{aligned}
 g_n &= \text{gcd}(a, b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\
 &= 1 + \text{gcd}(b, a \bmod b) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\
 &= 2 + \text{gcd}(a \bmod b, b \bmod (a \bmod b)) \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \\
 &\leq 2 + \max_{a' \geq 1, b' \leq \lfloor b/2 \rfloor} \{ \text{gcd}(a', b') \text{ の実行で出力される } G \text{ の数} \} \\
 &= 2 + g_{\lfloor b/2 \rfloor} \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor}
 \end{aligned}$$

注意

$$\text{補題 B より, } b \bmod (a \bmod b) \leq \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$$

つまり, $n \geq 1$ のとき, どちらの場合でも $g_n \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor}$

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析（結論）

得られた漸化式（不等式であることに注意）

$$g_n \begin{cases} = 1 & n = 0 \text{ のとき} \\ \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor} & n \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

ここからどう進めるかは次回

未解決問題：コラッツ予想

次のアルゴリズムを考える

```
1: def collatz(n)
2:   print n
3:   if n % 2 == 0
4:     collatz(n/2)
5:   else
6:     collatz(3*n+1)
7:   end
8: end
```

これは止まらないが…

コラッツ予想 (未解決)

任意の n に対して、 $\text{collatz}(n)$ は必ずいつか「1」を出力する

$n \leq 20 \times 2^{58}$ のときは正しいと分かっている

(Oliveira e Silva '10)

目次

- ① 組合せ構造の数え上げ
グラフにおける独立集合の数え上げ
- ② アルゴリズムの計算量
- ③ 今日のまとめ

今日の目標

今日の目標

漸化式を立てられるようになる

- ▶ 組合せ構造の数え上げ
- ▶ アルゴリズムの計算量

格言

アルゴリズムの計算量解析の基礎は数え上げ

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

目次

- ① 組合せ構造の数え上げ
グラフにおける独立集合の数え上げ
- ② アルゴリズムの計算量
- ③ 今日のまとめ