離散数理工学　第 1 回
数え上げの基礎：二項係数と二項定理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2018 年 10 月 4 日

最終更新：2018 年 10 月 1 日　10:39

概要

主題

次の 3 つを道具として
離散システム／アルゴリズムの設計と解析に関する方法論を学習する

- 数え上げ組合せ論
- 代数系
- 離散確率論

キャッチフレーズ：「離散数学を使う」

達成目標：以下の 3 項目をすべて達成することを目標とする

1. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における用語を正しく使うことができる
2. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における典型的な論法を用いて，証明を行うことができる
3. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論を用いて，離散システム／アルゴリズムの設計と解析ができる

概要

主題

次の 3 つを道具として
離散システム／アルゴリズムの設計と解析に関する方法論を学習する

- 数え上げ組合せ論
- 代数系
- 離散確率論

キャッチフレーズ：「離散数学を使う」

達成目標：以下の 3 項目をすべて達成することを目標とする

1. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における用語を正しく使うことができる
2. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における典型的な論法を用いて，証明を行うことができる
3. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論を用いて，離散システム／アルゴリズムの設計と解析ができる

典型的な問題 1：誕生日のパラドックス

誕生日問題：設定

この部屋の中に，誕生日が同じ 2 人はいるか？
そのような 2 人がいる確率は？

$\rightsquigarrow$ 実際にやってみる

応用，関連する話題

- 暗号に対する攻撃 (誕生日攻撃)
- 負荷分散

典型的な問題 1：誕生日のパラドックス

誕生日問題：設定

この部屋の中に，誕生日が同じ 2 人はいるか？
そのような 2 人がいる確率は？

$\leadsto$ 実際にやってみる

応用，関連する話題

- 暗号に対する攻撃 (誕生日攻撃)
- 負荷分散

典型的な問題 2：15 パズル

15 パズルとは？

4×4 の盤面に，1 から 15 の書かれた正方形のコマが置かれ，
1 か所の空きを利用してコマを動かし，目的の配置を作成するパズル

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
12	13	14	5
11		15	6
10	9	8	7

典型的な問題 2：15 パズル

15 パズルとは？

4 × 4 の盤面に，1 から 15 の書かれた正方形のコマが置かれ，
1 か所の空きを利用してコマを動かし，目的の配置を作成するパズル

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

→

1	2	3	4
12	13	14	5
11		15	6
10	9	8	7

典型的な問題 2：15 パズル — サム・ロイドの問題

15 パズルに関するサム・ロイドの問題

次は解けるか？

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

- 解けることを証明するためには，手順を示せばよい
- 解けないことを証明するためには，どうすれば??

スケジュール 前半 (予定)

1. 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/4)
- ⋆ 休講 (10/11)
2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/18)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/25)
- ⋆ 休講 (11/1)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/8)
5. 離散代数：対称群と置換群 (11/15)
- ⋆ 休講 (11/22)
6. 離散代数：有限群 (11/29)
7. 離散代数：有限群の応用 (12/6)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- 8 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/13)
- ⋆ 中間試験 (12/20)
- 9 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/10)
- 10 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/17)
- 11 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/24)
- 12 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (1/31)
- 13 離散確率論：エントロピー (2/7)
- ⋆ 期末試験 (2/14?)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員

- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

ティーチング・アシスタント

- 渡邉 光 (わたなべ ひかる)
- 居室：西 4 号館 2 階 202 号室 (岡本研究室)

講義資料

- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2018/dme/
- 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- 講義前日の夕方 16 時までに，ここに置かれる

講義資料

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2018/dme/

- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題
- 用語集

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

Twitter: @okamoto7yoshio

講義資料が掲載されたら一言発せられる (手動更新)

授業の進め方

講義 (75 分)

- スライドと板書で進める
- スライドのコピーに重要事項のメモを取る

演習 (15 分)

- 演習問題に取り組む
- 不明な点は教員に質問する

退室 (0 分) ←重要

- コメント (授業の感想，質問など) を紙に書いて提出する (匿名可)
- コメントとそれに対する回答は (匿名で) 講義ページに掲載される

オフィスアワー：金曜 5 限

- 質問など
- ただし，いないときもあるので注意 (cf. 情報数理工学セミナー)

演習問題

演習問題の進め方

- 授業のおわり 15 分は演習問題を解く時間
- 残った演習問題は復習・試験対策用
- 注意：「模範解答」のようなものは存在しない

演習問題の種類

- 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- 補足問題：講義で省略した内容を補足
- 追加問題：講義の内容に追加
- 発展問題：少し難しい (かもしれない)

演習問題 (続)

答案の提出

- 演習問題の答案をレポートとして提出してもよい
- レポートには提出締切がある (各回にて指定)
- レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- レポートにはコメントがつけられて，返却される
  - 返却された内容については，再提出ができる (再提出締切は原則なし)
  - 再提出の際，返却された答案も添付しなくてはならない

評価

中間試験と期末試験のみによる

- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
  - その中の 2 題は演習問題として提示されたものと同一である
    (複数の演習問題が組み合わされて 1 題とされる可能性もある)
    (「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 15 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分 (おそらく)
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

成績評価

- $\min\{100, \text{中間試験の素点} + \text{期末試験の素点}\}$

格言

格言 (三省堂 大辞林)

短い言葉で、人生の真理や処世術などを述べ、教えや戒めとした言葉。「石の上にも三年」「沈黙は金」など。金言。

格言 (この講義における)

講義内容とは直接関係ないかもしれないが,
私 (岡本) が重要だと思うこと

格言 (の例)

単位取得への最短の道のりは，授業に出て，演習問題を解くこと

教科書・参考書

教科書

- 指定しない

全般的な参考書

- J. マトウシェク，J. ネシェトリル (著)，根上生也，中本敦浩 (訳)，「離散数学への招待 (上・下)」，丸善出版，2002.
- 浅野孝夫,「情報数学」，コロナ社，2009.
- 小島定吉,「離散構造」，朝倉書店，2013.
- 玉木久夫,「情報科学のための確率入門」，サイエンス社，2002.
- 伏見正則,「確率と確率過程」，朝倉書店，2004.
- など

この講義の約束

- 私語はしない (ただし，演習時間の相談は積極的に OK)
- 携帯電話等はマナーモードにする
- この講義と関係のないことを (主に電子機器で) しない
- 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

履修上の注意

離散確率論の基礎は前提知識

- 「講義資料」のページに復習資料あり

今日の目標

今日の目標

次の 2 つの数を扱えるようになる

- 階乗，二項係数

扱えるとは？

- 漸近公式と簡単な上界，下界
- 二項定理
- 組合せ的解釈

目次

階乗

階乗とは？ (直観的定義)

自然数 n の階乗とは，次で定義される自然数のこと

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1$$

例：

- $0! = 1$
- $1! = 1$
- $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- ...

階乗：再帰的定義

階乗とは？ (再帰的定義)

自然数 n の階乗とは，次で定義される自然数のこと

$$n! = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ n \cdot (n-1)! & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：

- $0! = 1$
- $1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1$
- $2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$
- $\ldots$

組合せ的解釈

階乗の組合せ的解釈

$n! =$ 区別できる n 個のものを 1 列に並べる方法の総数

$n = 4$ のとき，$n! = 24$

1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1

格言

組合せの等式は，組合せ的解釈で直感的に理解

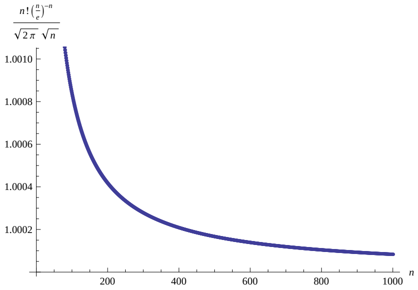
階乗：漸近公式

スターリングの公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

特に，

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$



$\leftarrow \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$ のプロット

証明は『複素関数論』の典型的な応用であるが，ここでは行わない

階乗：上界と下界 (かかい)

実用上，次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

つまり，

- $\mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ は $n!$ の上界
- $\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ は $n!$ の下界 (かかい)

格言

漸近公式は難しいが，簡単な上界・下界で足りる場合も多い

階乗：上界と下界 — 上界の証明

実用上，次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法 (下界は演習問題)

[基底段階] $n = 1$ のとき

階乗：上界と下界 — 上界の証明

実用上，次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}\, n \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法 (下界は演習問題)

[基底段階] $n = 1$ のとき

- $n! = 1! = 1$

階乗：上界と下界 — 上界の証明

実用上，次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法　　(下界は演習問題)

[基底段階]　$n = 1$ のとき

- $n! = 1! = 1$
- $\mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n = \mathrm{e}\cdot 1\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^1 = 1$

階乗：上界と下界 — 上界の証明

実用上，次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法 (下界は演習問題)

[基底段階] $n = 1$ のとき

- $n! = 1! = 1$
- $\mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n = \mathrm{e}\cdot 1\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^1 = 1$
- したがって，$n! \leq \mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ となる

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き)

階乗：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\,n\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法

[帰納段階] 任意の自然数 $k \geq 1$ を考える

- $k! \leq e\,k\left(\frac{k}{e}\right)^k$ となると仮定

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き)

階乗：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}\, n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法

[帰納段階] 任意の自然数 $k \geq 1$ を考える

- $k! \leq \mathrm{e}\, k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k$ となると仮定

証明すること (目標)

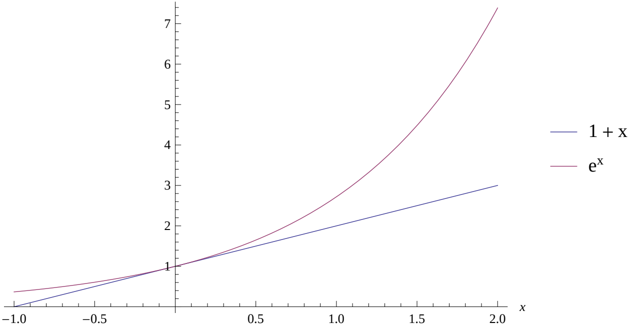
$$(k+1)! \leq \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}$$

有用な不等式

事実：有用な不等式 (演習問題)

任意の実数 x に対して

$$1 + x \leq e^x$$



階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$(k+1)! \quad = \quad (k+1) \cdot k!$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\ &\leq (k+1)\cdot \mathrm{e}\,k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k \qquad \text{(帰納法の仮定)}\end{aligned}$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\leq (k+1)\cdot \mathrm{e}\,k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^{k} \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}
\end{aligned}
$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\leq (k+1)\cdot \mathrm{e}\,k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^{k} \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}
\end{aligned}
$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\le (k+1)\cdot \mathrm{e}\,k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^{k} \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}
\end{aligned}
$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\leq (k+1)\cdot \mathrm{e}\,k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^{k} \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&\leq \mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}
\end{aligned}
$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\leq (k+1)\cdot \mathrm{e}\, k \left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^{k} \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&\leq \mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1} \cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\cdot(\mathrm{e}^{-1}) \cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}
\end{aligned}
$$

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\leq (k+1)\cdot \mathrm{e}\, k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^{k} \qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&\leq \mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \\
&= \mathrm{e}\cdot(\mathrm{e}^{-1})\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} = \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \qquad \square
\end{aligned}
$$

目次

二項係数

二項係数とは？

自然数 a, b で $a \geq b$ を満たすものに対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

- $\binom{a}{b}$ は「a choose b」と読む (のが普通)
- 「${}_aC_b$」という記号を高校では使うが，離散数学では使わない

組合せ的解釈 (1)：部分集合

二項係数の組合せ的解釈 (1)

$\binom{a}{b}$ = 要素数 a の集合における，要素数 b の部分集合の総数

$a = 5,\ b = 2$ のとき：$\{1,2,3,4,5\}$ の部分集合で要素数 2 のもの

$$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{1,5\},\ \{2,3\},\\ \{2,4\},\ \{2,5\},\ \{3,4\},\ \{3,5\},\ \{4,5\}$$

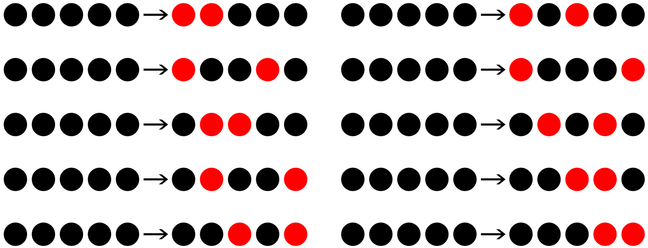
$$\binom{5}{2} = 10$$

組合せ的解釈 (2)：着色

二項係数の組合せ的解釈 (2)

$\binom{a}{b}$ = 区別できる a 個のものの中から b 個に色を塗る方法の総数

$a = 5,\ b = 2$ のとき



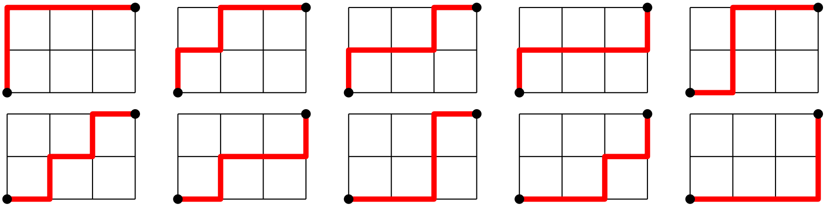
$$\binom{5}{2} = 10$$

組合せ的解釈 (3)：格子道

二項係数の組合せ的解釈 (3)

$\binom{a}{b}$ = (0, 0) から $(a-b, b)$ に至る (単調な) 格子道の総数

$a = 5,\ b = 2$ のとき：(0, 0) から (3, 2) に至る格子道



$\binom{5}{2} = 10$

二項係数：上界と下界

二項係数：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}\,a}{b}\right)^b$$

上界の証明：演習問題

- ヒント：まず，$\binom{a}{b} \leq \frac{a^b}{b!}$ を証明する
- ヒント：階乗に対する下界を使う

二項係数：上界と下界

二項係数：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}\, a}{b}\right)^b$$

<u>下界の証明</u>：

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

二項係数：上界と下界

二項係数：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}\,a}{b}\right)^b$$

下界の証明：

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a-1}{b-1} \cdot \cdots \cdot \frac{a-b+1}{1}$$

二項係数：上界と下界

二項係数：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}\,a}{b}\right)^b$$

下界の証明：

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a-1}{b-1} \cdot \cdots \cdot \frac{a-b+1}{1} \geq \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{b}$$

注：$a \geq b \geq k$ のとき，$(a-k)b \geq a(b-k)$ (演習問題)

二項係数：上界と下界

二項係数：簡単な評価

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{e\,a}{b}\right)^b$$

下界の証明：

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a-1}{b-1} \cdot \cdots \cdot \frac{a-b+1}{1} \geq \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^b \quad \square$$

注：$a \geq b \geq k$ のとき，$(a-k)b \geq a(b-k)$ (演習問題)

二項係数に関する恒等式：対称性

二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

二項係数に関する恒等式：対称性

二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{(a-b)!(a-(a-b))!}$$

二項係数に関する恒等式：対称性

二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{(a-b)!(a-(a-b))!} = \binom{a}{a-b} \qquad \square$$

二項係数に関する恒等式：対称性 — 組合せ的解釈：着色

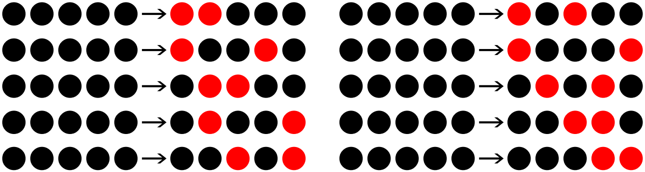
二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

- 左辺 $=$ a 個のものの中から色を塗る b 個を選ぶ
- 右辺 $=$ a 個のものの中から色を塗らない $a-b$ 個を選ぶ

$a = 5$, $b = 2$ のとき



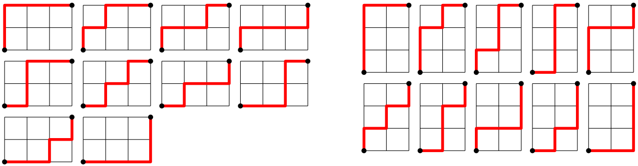
二項係数に関する恒等式：対称性 — 組合せ的解釈：格子道

二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

- 左辺 $=$ $(0,0)$ から $(a-b,b)$ へ至る格子道の総数
- 右辺 $=$ $(0,0)$ から $(b,a-b)$ へ至る格子道の総数



直線 $y = x$ に関してこの 2 つは対称なので，等式が成り立つ

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形

パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形

パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!}$$

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形

パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned}\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!}\end{aligned}$$

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形

パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned}\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!}\end{aligned}$$

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形

パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned}
\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!} \\
&= \frac{(a-1)!b}{b(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)(a-b-1)!}
\end{aligned}$$

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形

パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a - 1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明：式変形による

$$\begin{aligned}
\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} &= \frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} + \frac{(a-1)!}{b!((a-1)-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!}{(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!}{b!(a-b-1)!} \\
&= \frac{(a-1)!b}{b(b-1)!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)(a-b-1)!} \\
&= \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!}
\end{aligned}$$

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 (証明の続き)

パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \cdots = \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!}$$

□

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 (証明の続き)

パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a - 1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned}\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \cdots &= \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!}\end{aligned}$$

□

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 (証明の続き)

パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned}\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \cdots &= \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!} \\ &= \frac{(a-1)!a}{b!(a-b)!}\end{aligned}$$

□

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 (証明の続き)

パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned}
\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \cdots &= \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!a}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{b!(a-b)!}
\end{aligned}$$

□

二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 (証明の続き)

パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

証明の続き：式変形による

$$\begin{aligned}
\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \cdots &= \frac{(a-1)!b}{b!(a-b)!} + \frac{(a-1)!(a-b)}{b!(a-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!(b+(a-b))}{b!(a-b)!} \\
&= \frac{(a-1)!a}{b!(a-b)!} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \binom{a}{b} \qquad \square
\end{aligned}$$

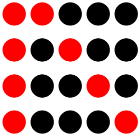
二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 — 組合せ的解釈：着色

パスカルの三角形

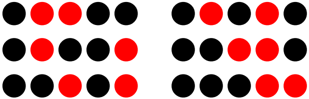
任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a - 1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

- 最初のものを塗る場合だけ見ると，$\binom{a-1}{b-1}$ 通り
- 最初のものを塗らない場合だけ見ると，$\binom{a-1}{b}$ 通り



$$\binom{4}{1} = 4$$



$$\binom{4}{2} = 6$$

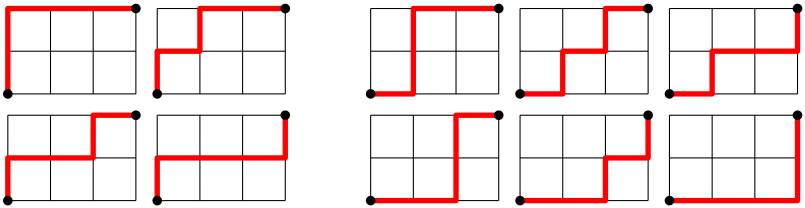
二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 — 組合せ的解釈：格子道

パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

- 最初に上へ行く道だけ見ると，$\binom{a-1}{b-1}$ 通り
- 最初に右へ行く道だけ見ると，$\binom{a-1}{b}$ 通り



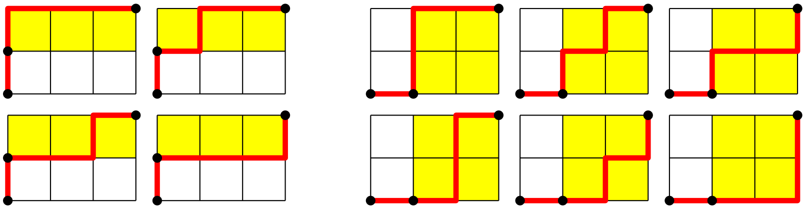
二項係数に関する恒等式：パスカルの三角形 — 組合せ的解釈：格子道

パスカルの三角形

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

- 最初に上へ行く道だけ見ると，$\binom{a-1}{b-1}$ 通り
- 最初に右へ行く道だけ見ると，$\binom{a-1}{b}$ 通り



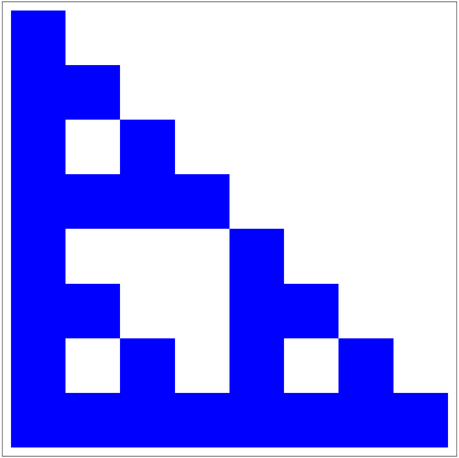
パスカルの三角形

$$
\begin{array}{cccccccc}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7}
\end{array}
$$

パスカルの三角形

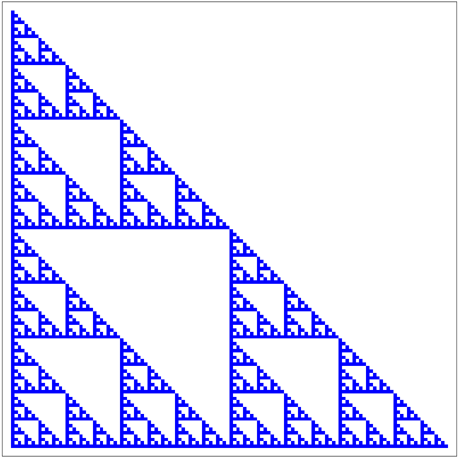
$$
\begin{array}{cccccccc}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \color{blue}{\binom{4}{1}} & \color{blue}{\binom{4}{2}} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \color{red}{\binom{5}{2}} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7}
\end{array}
$$

パスカルの三角形



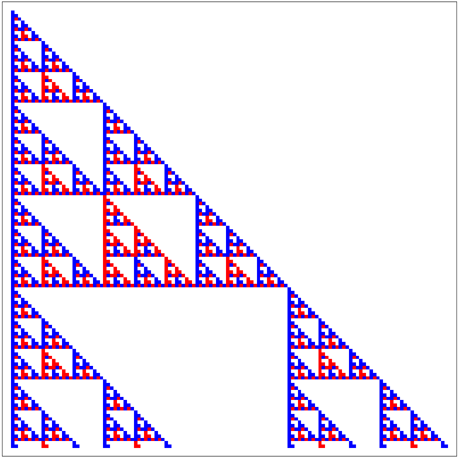
mod 2 による色付け

パスカルの三角形



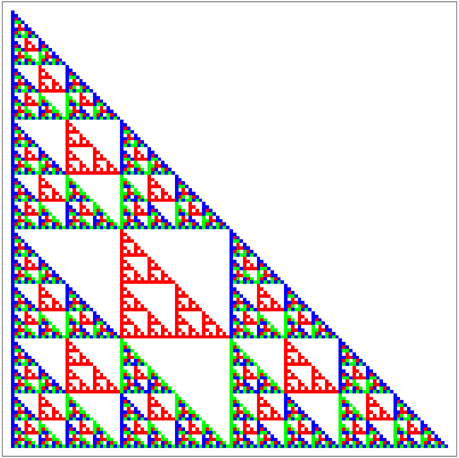
mod 2 による色付け

パスカルの三角形



mod 3 による色付け

パスカルの三角形



mod 4 による色付け

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して,

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1} = \frac{a}{b}\frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!}$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1} = \frac{a}{b}\frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式

吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

証明：式変形による

$$\frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1} = \frac{a}{b}\frac{(a-1)!}{(b-1)!((a-1)-(b-1))!} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \binom{a}{b} \qquad \square$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

a 個のものの中から $b-1$ 個に赤を塗り，1 個に青を塗る

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} b = a\binom{a-1}{b-1}$$

a 個のものの中から $b{-}1$ 個に赤を塗り，1 個に青を塗る

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b}\binom{b}{1} = \binom{a}{1}\binom{a-1}{b-1}$$

a 個のものの中から $b-1$ 個に赤を塗り，1 個に青を塗る

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

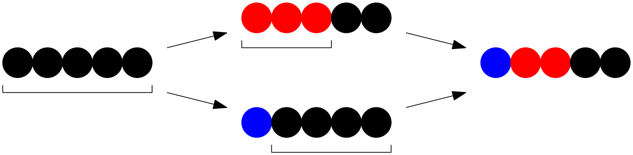
吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b}\binom{b}{1} = \binom{a}{1}\binom{a-1}{b-1}$$

a 個のものの中から b–1 個に赤を塗り，1 個に青を塗る

- 左辺 $=$ a 個のものの中から b 個に赤を塗り，
  その b 個の中から 1 個に青を塗る
- 右辺 $=$ a 個のものの中から 1 個に青を塗り，
  残り a–1 個の中から b–1 個に赤を塗る



目次

二項定理

二項定理

任意の複素数 x, y と任意の自然数 $n \geq 0$ に対して,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

証明：演習問題

- ヒント：n に関する数学的帰納法 + パスカルの三角形

二項定理の応用 (1)

例題 1

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

証明：二項定理の式において，$x = y = 1$ とすると

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \square$$

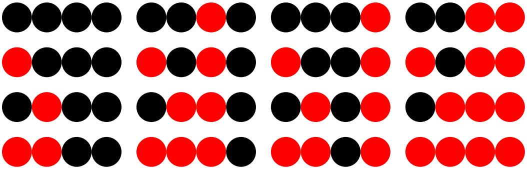
例題 1：組合せ的解釈 (着色)

例題 1

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- 右辺 $=$ n 個のものの中からいくつかに色を塗る方法の総数
- 左辺の第 k 項 $=$ n 個のものの中から k 個に色を塗る方法の総数



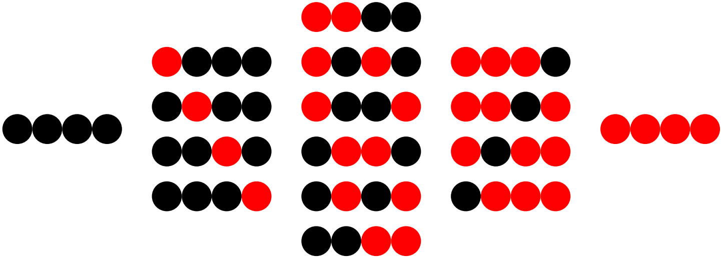
例題 1：組合せ的解釈 (着色)

例題 1

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- 右辺 $=$ n 個のものの中からいくつかに色を塗る方法の総数
- 左辺の第 k 項 $=$ n 個のものの中から k 個に色を塗る方法の総数



二項定理の応用 (2)

例題 2

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

二項定理の応用 (2)

例題 2

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

証明：二項定理の式において，$x = -1, y = 1$ とすると

$$0 = (-1+1)^n$$

二項定理の応用 (2)

例題 2

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

<u>証明</u>：二項定理の式において，$x = -1, y = 1$ とすると

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k}$$

二項定理の応用 (2)

例題 2

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

証明：二項定理の式において，$x = -1, y = 1$ とすると

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \qquad \square$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明：二項定理より

$$(x+1)^{2n}$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明：二項定理より

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k}$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明：二項定理より

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明：二項定理より

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

特に，$(x+1)^{2n}$ における x^n の係数は $\binom{2n}{n}$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n$$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方,

$$(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n \quad = \quad \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}x^\ell\right)$$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$
\begin{aligned}
(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}x^\ell\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{\ell}x^{k+\ell}
\end{aligned}
$$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$
\begin{aligned}
(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}x^\ell\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{\ell}x^{k+\ell}
\end{aligned}
$$

つまり，この式における x^n の係数は

$$
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}
$$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}x^\ell\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{\ell}x^{k+\ell}$$

つまり，この式における x^n の係数は

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k}$$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$
\begin{aligned}
(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}x^\ell\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{\ell}x^{k+\ell}
\end{aligned}
$$

つまり，この式における x^n の係数は

$$
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2
$$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$
\begin{aligned}
(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}x^\ell\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{\ell}x^{k+\ell}
\end{aligned}
$$

つまり，この式における x^n の係数は

$$
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2
$$

したがって，

$$
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}
$$

□

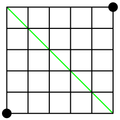
例題 3：組合せ的解釈 (格子道)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

右辺 $=$ $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の総数



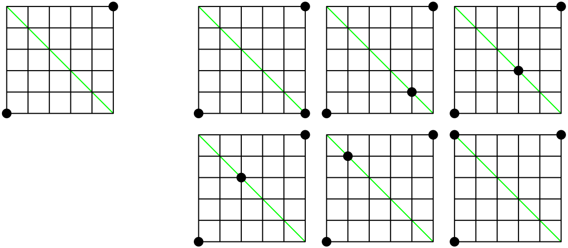
例題 3：組合せ的解釈 (格子道)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

左辺の第 k 項 $=$ $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の中で，$(k, n-k)$ を通るものの総数



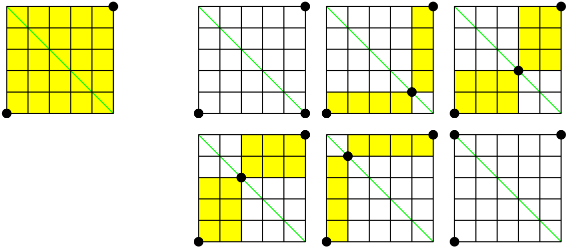
例題 3：組合せ的解釈 (格子道)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

左辺の第 k 項 $=$ $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の中で，
$(k, n-k)$ を通るものの総数



目次

この講義の概要

主題

次の 3 つを道具として
離散システム／アルゴリズムの設計と解析に関する方法論を学習する

- 数え上げ組合せ論
- 代数系
- 離散確率論

キャッチフレーズ：「離散数学を使う」

達成目標：以下の 3 項目をすべて達成することを目標とする

1. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における用語を正しく使うことができる
2. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論における典型的な論法を用いて，証明を行うことができる
3. 数え上げ組合せ論，代数系，離散確率論を用いて，離散システム／アルゴリズムの設計と解析ができる

今日の目標

今日の目標

次の 2 つの数を扱えるようになる

- 階乗，二項係数

扱えるとは？

- 漸近公式と簡単な上界，下界
- 二項定理
- 組合せ的解釈

格言

組合せの等式は，組合せ的解釈で直感的に理解

格言

漸近公式は難しいが，簡単な上界・下界で足りる場合も多い

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次