

スケジュール 後半 (予定)

- 8 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/13)
- * 中間試験 (12/20)
- 9 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/10)
- 10 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/17)
- 11 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/24)
- 12 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (1/31)
- 13 離散確率論：マルコフ連鎖 (2/7)
- * 期末試験 (2/14)

今日の目標

今日の目標

- マルコフ連鎖について以下ができるようになる
- ▶ 「ギャンブラーの破産」において、破産確率を計算できる
 - ▶ 「有限グラフ上の単純ランダムウォーク」において、到達時刻 (の期待値) を計算できる

この講義で扱うマルコフ連鎖は「斉次 離散時間 有限状態 マルコフ連鎖」と呼ばれるもの

マルコフ連鎖：例 — 推移行列

見にくいので、行列で表現する

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} F & C & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} F \\ C \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

「行」から「列」へ推移する

スケジュール 前半

- 1 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/4)
- * 休講 (10/11)
- 2 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/18)
- 3 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/25)
- * 休講 (11/1)
- 4 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/8)
- 5 離散代数：対称群と置換群 (11/15)
- * 休講 (11/22)
- 6 離散代数：有限群 (11/29)
- 7 離散代数：有限群の応用 (12/6)

期末試験

- ▶ 日時, 場所
 - ▶ 2 月 14 日 (木) : 3 限 @西 9-115
- ▶ 出題範囲
 - ▶ 第 8 回から第 12 回 (今回) まで
- ▶ 出題形式
 - ▶ 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
 - ▶ その中の 2 題は演習問題として提示されたものと同一である (複数の演習問題が組み合わせられて 1 題とされる可能性もある) (「発展」として提示された演習問題は出題されない)
 - ▶ 全問に解答する
- ▶ 配点 : 1 題 15 点満点, 計 60 点満点
- ▶ 時間 : 90 分
- ▶ 持ち込み : A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

マルコフ連鎖：例

次の状況を考える

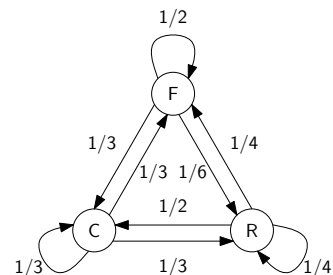
- ▶ ある街の天気は「晴れ (F)」、「曇り (C)」、「雨 (R)」のいずれか
- ▶ 天気は毎日、確率的に変わる
 - ▶ 晴れの日の翌日の天気が晴れである確率 = 1/2
 - ▶ 晴れの日の翌日の天気が曇りである確率 = 1/3
 - ▶ 晴れの日の翌日の天気が雨である確率 = 1/6
 - ▶ 曇りの日の翌日の天気が晴れである確率 = 1/3
 - ▶ 曇りの日の翌日の天気が曇りである確率 = 1/3
 - ▶ 曇りの日の翌日の天気が雨である確率 = 1/3
 - ▶ 雨の日の翌日の天気が晴れである確率 = 1/4
 - ▶ 雨の日の翌日の天気が曇りである確率 = 1/2
 - ▶ 雨の日の翌日の天気が雨である確率 = 1/4

ポイント

次の日の天気 (に関する確率) は、前の日の天気だけから決まる

マルコフ連鎖：例 — 状態遷移図

見にくいので、状態遷移図で表現する

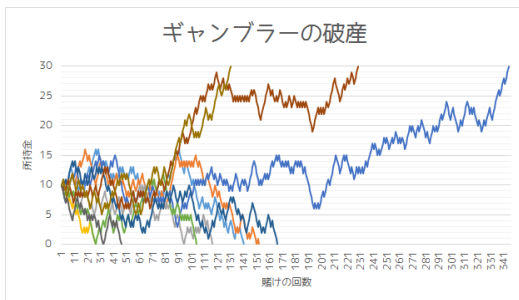


「始点」から「終点」へ推移する

- ① ギャンブラーの破産
- ② 有限グラフ上の単純ランダムウォーク
- ③ 今日のまとめ

ギャンブラーの破産：とりあえず、シミュレーション

$n = 10$ の場合



10 回の試行中、破産は 7 回

ギャンブラーの破産：興味の対象

問題

- 1 最終的に、0 万円になって終了する確率は？
- 2 終了するまでに賭けを行う回数 (の期待値) は？

興味の対象

- 1 $p_n = \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = n)$ (確率)
- 2 $T_n = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = n]$ (確率変数の期待値)

最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式 (詳細)

$1 \leq k \leq 3n - 1$ のとき、

$$\begin{aligned}
 p_k &= \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = k) \\
 &= \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_0 = k) \\
 &= \sum_{h=0}^{3n} \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_0 = k, X_1 = h) \Pr(X_1 = h \mid X_0 = k) \\
 &= \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_0 = k, X_1 = k - 1) \Pr(X_1 = k - 1 \mid X_0 = k) + \\
 &\quad \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_0 = k, X_1 = k + 1) \Pr(X_1 = k + 1 \mid X_0 = k) \\
 &= \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_1 = k - 1) \cdot \frac{1}{2} + \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_1 = k + 1) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = k - 1) \cdot \frac{1}{2} + \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = k + 1) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} p_{k-1} + \frac{1}{2} p_{k+1}
 \end{aligned}$$

ギャンブラーの破産：設定

設定

- ▶ 1 人のギャンブラー、所持金 n 万円
- ▶ 賭けを行うごとに、
 - ▶ $1/2$ の確率で、所持金が 1 万円増加
 - ▶ $1/2$ の確率で、所持金が 1 万円減少
- ▶ 所持金が $3n$ 万円か 0 万円になったら、終了

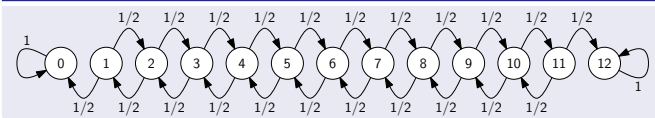
問題

- 1 最終的に、0 万円になって終了する確率は？ (破産確率)
- 2 終了するまでに賭けを行う回数 (の期待値) は？

ギャンブラーの破産：マルコフ連鎖としてのモデル化

- ▶ 状態空間は $\{0, 1, \dots, n, \dots, 3n\}$
- ▶ $X_t = t$ 回目の賭けをした後の所持金 (単位：万円) (確率変数)

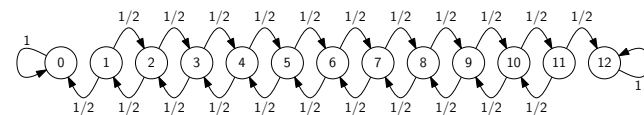
状態遷移図： $n = 4$ のとき



最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式

$p_k =$ 所持金が k 万円であるとき、0 万円で終了する確率

$$p_k = \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = k)$$



- ▶ このとき、次の漸化式が得られる

$$\begin{aligned}
 p_0 &= 1, \\
 p_k &= \frac{1}{2} p_{k-1} + \frac{1}{2} p_{k+1} \quad (1 \leq k \leq 3n - 1 \text{ のとき}), \\
 p_{3n} &= 0
 \end{aligned}$$

最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (1)

$$\begin{aligned}
 p_0 &= 1, \\
 p_k &= \frac{1}{2} p_{k-1} + \frac{1}{2} p_{k+1} \quad (1 \leq k \leq 3n - 1 \text{ のとき}), \\
 p_{3n} &= 0
 \end{aligned}$$

- ▶ つまり、 $1 \leq k \leq 3n - 1$ のとき

$$p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$$

- ▶ $q_k = p_{k+1} - p_k$ と置く

$$\begin{aligned}
 q_0 &= p_1 - p_0 = p_1 - 1, \\
 q_k &= q_{k-1} \quad (1 \leq k \leq 3n - 1 \text{ のとき})
 \end{aligned}$$

- ▶ つまり、 $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \dots = q_{3n-1}$ なので、… (次のページへ続く)

つまり、 $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \dots = q_{3n-1}$ なので

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + (p_1 - p_0) = 1 + q_0, \\ p_2 &= p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) = 1 + q_0 + q_1 = 1 + 2q_0, \\ &\vdots \\ p_k &= p_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (p_{i+1} - p_i) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} q_i = 1 + kq_0, \\ &\vdots \\ 0 = p_{3n} &= 1 + 3nq_0 \end{aligned}$$

- ▶ したがって、 $q_0 = -\frac{1}{3n}$
- ▶ したがって、 $p_k = 1 - \frac{k}{3n}$ 、特に、 $p_n = 1 - \frac{n}{3n} = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} T_{n,k} &= E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k] \\ &= \sum_{h=0}^{3n} E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = h] \Pr(X_1 = h \mid X_0 = k) \\ &= E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = k+1] \Pr(X_1 = k+1 \mid X_0 = k) + \\ &\quad E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = k-1] \Pr(X_1 = k-1 \mid X_0 = k) \\ &= (1 + T_{n,k+1}) \cdot \frac{1}{2} + (1 + T_{n,k-1}) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} T_{n,k+1} + \frac{1}{2} T_{n,k-1} \end{aligned}$$

演習問題

任意の自然数値確率変数 X, Y と事象 A に対して、 $\Pr(A) \neq 0$ のとき

$$E[X \mid A] = \sum_{i \in \mathbb{N}} E[X \mid A \text{ かつ } Y = i] \Pr(Y = i \mid A)$$

$$\begin{aligned} T_{n,1} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) = U_0, \\ T_{n,2} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) \\ &= U_0 + U_1 = U_0 + U_0 - 2 = 2U_0 - 2, \\ T_{n,3} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) + (T_{n,3} - T_{n,2}) \\ &= U_0 + U_1 + U_2 = U_0 + U_0 - 2 + U_0 - 4 = 3U_0 - 6, \\ &\vdots \\ T_{n,k} &= T_{n,0} + \sum_{i=0}^{k-1} (T_{n,i+1} - T_{n,i}) = kU_0 - k(k-1), \\ &\vdots \\ 0 = T_{n,3n} &= 3nU_0 - 3n(3n-1) \end{aligned}$$

設定

- ▶ 1人のギャンブラー、所持金 n 万円
- ▶ 賭けを行うごとに、
 - ▶ 1/2の確率で、所持金が1万円増加
 - ▶ 1/2の確率で、所持金が1万円減少
- ▶ 所持金が $3n$ 万円か 0 万円になったら、終了

問題と解答

- 最終的に、0万円になって終了する確率は？ (破産確率)
 $\rightsquigarrow \frac{2}{3}$
- 終了するまでに賭けを行う回数 (の期待値) は？
 $\rightsquigarrow 2n^2$

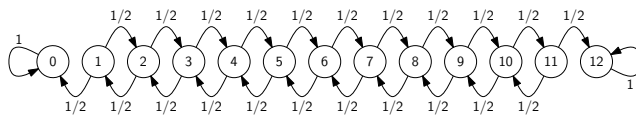
興味の対象

$T_n = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = n]$ (確率変数の期待値)

▶ 次の期待値を考える

$$T_{n,k} = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k]$$

▶ このとき、 $T_{n,0} = T_{n,3n} = 0$ が成り立つ



▶ また、直感的には、 $1 \leq k \leq 3n-1$ のとき、次が成り立つ？

$$T_{n,k} = 1 + \frac{1}{2} T_{n,k-1} + \frac{1}{2} T_{n,k+1}$$

解くべき漸化式

$$T_{n,k} = \begin{cases} 0 & (k \in \{0, 3n\} \text{ のとき}) \\ 1 + \frac{1}{2} T_{n,k+1} + \frac{1}{2} T_{n,k-1} & (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

最終的に知りたいのは、 $T_{n,n}$

▶ $1 \leq k \leq 3n-1$ のとき、

$$T_{n,k+1} - T_{n,k} = T_{n,k} - T_{n,k-1} - 2$$

▶ $U_k = T_{n,k+1} - T_{n,k}$ と置くと、

$$1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき、 } U_k = U_{k-1} - 2$$

$$\begin{aligned} T_{n,k} &= kU_0 - k(k-1) \quad (k \in \{1, 2, \dots, 3n\}), \\ 0 = T_{n,3n} &= 3nU_0 - 3n(3n-1) \end{aligned}$$

▶ したがって、 $U_0 = 3n-1$

▶ したがって、 $k \in \{1, 2, \dots, 3n\}$ のとき、

$$T_{n,k} = k(3n-1) - k(k-1) = k(3n-k)$$

▶ $T_{n,0} = 0$ なので、 $k \in \{0, 1, 2, \dots, 3n\}$ のとき、

$$T_{n,k} = k(3n-1) - k(k-1) = k(3n-k)$$

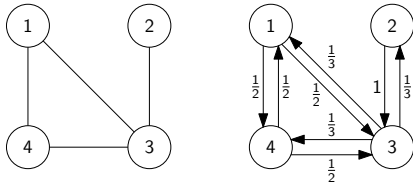
つまり、 $T_n = T_{n,n} = n(3n-n) = 2n^2$

目次

- ギャンブラーの破産
- 有限グラフ上の単純ランダムウォーク
- 今日のまとめ

有限無向グラフ $G = (V, E) : V$ は G の頂点集合, E は G の辺集合

- ▶ 時刻 $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ に対して, 次のように駒を動かす
 - ▶ $t = 0$ のとき, 駒はある決められた頂点 $u \in V$ に置かれている
 - ▶ $t = k$ のとき, 駒が頂点 $v \in V$ に置かれているとすると, $t = k + 1$ のとき, 駒は v の隣接頂点へ等確率で動かされる
- ▶ 時刻 t において駒の置かれる頂点を X_t とすると, $\langle X_t \mid t \in \mathbb{N} \rangle$ は確率過程



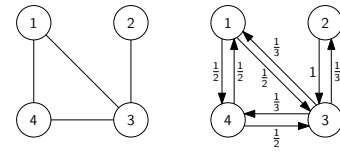
- ▶ この確率過程を G 上の**単純ランダムウォーク**と呼ぶ

有限無向グラフ $G = (V, E)$

到達時刻とは？

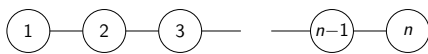
G 上の単純ランダムウォークにおいて, 頂点 $u \in V$ から頂点 $v \in V$ への**到達時刻**とは,

$$\tau_{u,v} = \min\{t \geq 0 \mid X_t = v, X_0 = u\}$$



- ▶ これの期待値を到達時刻と呼ぶこともある
- ▶ 「 $t \geq 0$ 」ではなく「 $t \geq 1$ 」とする場合もある

次のグラフを考える (頂点数 n の道)



左端の頂点を 1, 右端の頂点を n として, $E[\tau_{1,n}]$ を計算する

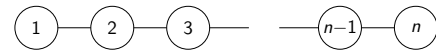
- ▶ グラフの形状から次が分かる

$$\tau_{1,n} = \tau_{1,2} + \tau_{2,3} + \dots + \tau_{n-1,n}$$

- ▶ したがって, 期待値の線形性より

$$E[\tau_{1,n}] = E[\tau_{1,2}] + E[\tau_{2,3}] + \dots + E[\tau_{n-1,n}]$$

- ▶ つまり, 任意の $i \in \{1, \dots, n-1\}$ に対する $E[\tau_{i,i+1}]$ が分かればよい



- ▶ まず, $E[\tau_{1,2}] = 1$

- ▶ 次に, $i \in \{2, \dots, n-1\}$ のとき,

$$\begin{aligned} E[\tau_{i,i+1}] &= 1 \cdot \frac{1}{2} + (1 + E[\tau_{i-1,i+1}]) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(E[\tau_{i-1,i}] + E[\tau_{i,i+1}]) \\ \therefore E[\tau_{i,i+1}] &= 2 + E[\tau_{i-1,i}] \end{aligned}$$

- ▶ したがって, $a_i = E[\tau_{i,i+1}]$ と置くと

$$a_i = \begin{cases} 1 & (i = 1 \text{ のとき}), \\ 2 + a_{i-1} & (i \in \{2, \dots, n-1\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

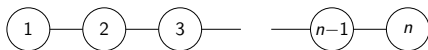
- ▶ これを解くと, 任意の $i \in \{1, \dots, n-1\}$ に対して, $a_i = 2i - 1$

証明したこと

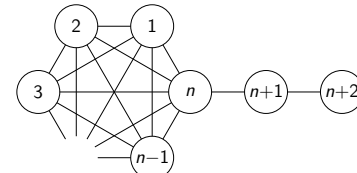
任意の $i \in \{1, \dots, n-1\}$ に対して, $E[\tau_{i,i+1}] = 2i - 1$

以上の考察をまとめると,

$$\begin{aligned} E[\tau_{1,n}] &= E[\tau_{1,2}] + E[\tau_{2,3}] + \dots + E[\tau_{n-1,n}] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (2i - 1) = (n-1)^2 \end{aligned}$$



次のグラフを考える (頂点数 n の完全グラフに長さ 2 の道を追加)



$E[\tau_{1,n+2}]$ を計算する

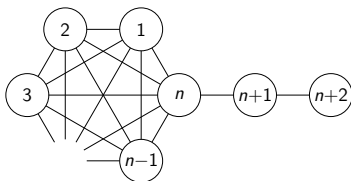
- ▶ グラフの形状から次が分かる

$$\tau_{1,n+2} = \tau_{1,n} + \tau_{n,n+1} + \tau_{n+1,n+2}$$

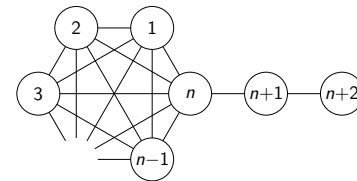
- ▶ したがって, 期待値の線形性から

$$E[\tau_{1,n+2}] = E[\tau_{1,n}] + E[\tau_{n,n+1}] + E[\tau_{n+1,n+2}]$$

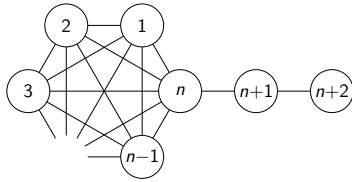
- ▶ つまり, $E[\tau_{1,n}], E[\tau_{n,n+1}], E[\tau_{n+1,n+2}]$ が分かればよい



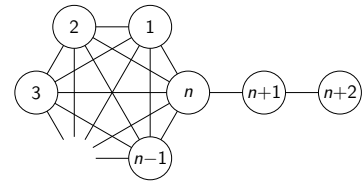
$$\begin{aligned} E[\tau_{1,n}] &= \frac{1}{n-1} \cdot 1 + \frac{n-2}{n-1} (1 + E[\tau_{1,n}]) \\ (n-1)E[\tau_{1,n}] &= n-1 + (n-2)E[\tau_{1,n}] \\ \therefore E[\tau_{1,n}] &= n-1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} E[\tau_{n,n+1}] &= \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{n-1}{n} (1 + E[\tau_{1,n}] + E[\tau_{n,n+1}]) \\ nE[\tau_{n,n+1}] &= n + (n-1)E[\tau_{1,n}] + (n-1)E[\tau_{n,n+1}] \\ &= n + (n-1)^2 + (n-1)E[\tau_{n,n+1}] \\ \therefore E[\tau_{n,n+1}] &= n + (n-1)^2 = n^2 - n + 1 \end{aligned}$$



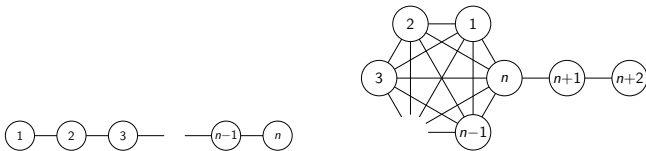
$$\begin{aligned} E[\tau_{n+1, n+2}] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + E[\tau_{n, n+1}] + E[\tau_{n+1, n+2}]) \\ 2E[\tau_{n+1, n+2}] &= 2 + E[\tau_{n, n+1}] + E[\tau_{n+1, n+2}] \\ &= 2 + (n^2 - n + 1) + E[\tau_{n+1, n+2}] \\ \therefore E[\tau_{n+1, n+2}] &= 2 + (n^2 - n + 1) = n^2 - n + 3 \end{aligned}$$



したがって,

$$\begin{aligned} E[\tau_{1, n+2}] &= E[\tau_{1, n}] + E[\tau_{n, n+1}] + E[\tau_{n+1, n+2}] \\ &= (n-1) + (n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) \\ &= 2n^2 - n + 3 \end{aligned}$$

- ▶ 頂点数 $n+2$ の道：
到達時刻の期待値 $= (n+1)^2$
- ▶ 頂点数 n の完全グラフ + 長さ 2 の道：
到達時刻の期待値 $= 2n^2 - n + 3$



教訓：辺を多くすると、到達時刻の期待値が増えることがある

- 1 ギャンブラーの破産
- 2 有限グラフ上の単純ランダムウォーク
- 3 今日のまとめ

今日の目標

マルコフ連鎖について以下ができるようになる

- ▶ 「ギャンブラーの破産」において、破産確率を計算できる
- ▶ 「有限グラフ上の単純ランダムウォーク」において、到達時刻 (の期待値) を計算できる

この講義で扱うマルコフ連鎖は

「斉次 離散時間 有限状態 マルコフ連鎖」と呼ばれるもの

- ▶ 授業評価アンケートに答える
- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりではやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時、小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK