

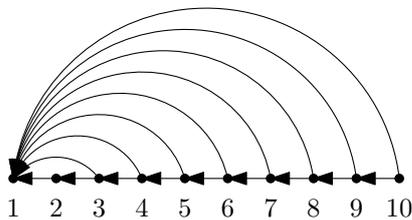
13:00-14:30. A4用紙(両面自筆書き込み)のみ持ち込み可. 使用可能な解答用紙は1枚のみ.
携帯電話, タブレット等は電源を切ってカバンの中にする.

採点終了次第, 講義 web ページにて, 得点分布, 講評などを掲載する.

採点結果を知りたい場合は, 解答用紙右上「評点」欄の中に5文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと(その文字列は控えておくように).

採点終了後, そのランダム文字列と得点の対応表を公開する.

問題 1 次のような前進問題の変種を考える. 考える有向グラフの頂点集合は $\{1, 2, \dots, n\}$ であり, 頂点1以外の頂点 i から出る辺は頂点 $i-1$ と頂点1へ向かうものしか存在しない. このグラフにおいて, 頂点 n から始めて, 辺をたどることで頂点1に到達したい. 下図は $n = 10$ の場合のグラフを表している.



乱択アルゴリズムとして「たどる辺を一様分布に従って選び, 移動する」ということを繰り返すアルゴリズムを考え, このアルゴリズムがたどる辺の数を確率変数 R_n で表す. 以下の問いに答えよ.

- $E[R_1] = 0, E[R_2] = 1$ であることを証明せよ.
- 任意の $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ に対して, 次の式が成り立つことを証明せよ.

$$E[R_k] = 1 + \frac{1}{2}E[R_{k-1}].$$

- 数列 $\{E[R_n]\}_{n \geq 1}$ の一般項が何であるか, 答えよ.
- 数列 $\{E[2^{R_n}]\}_{n \geq 1}$ の一般項が何であるか, 答えよ.

問題 2 自然数 $n \geq 2$ に対して, 互いに独立な確率変数 X_1, \dots, X_n は, ある実数 p を用いて, 次のように定められるとする(ただし, $0 \leq p \leq 1$).

$$\Pr(X_i = 0) = 1 - p, \quad \Pr(X_i = 1) = p.$$

このとき, $E[X_i] = p$ である. しかし, 確率変数 $X = \text{med}\{X_1, \dots, X_n\}$ に対して, $E[X] = p$ が成り立つとは限らない. これが成り立たないような p と n の値の組を1つ発見せよ.(なぜ成り立たないのかも説明せよ.) ただし, $\text{med}\{X_1, \dots, X_n\}$ は X_1, \dots, X_n の中央値である.

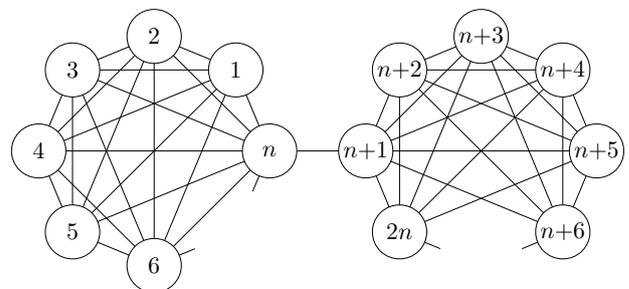
問題 3 次の推移行列を持つマルコフ連鎖 $(X_t | t \in \mathbb{N})$ を考える. ただし, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ とし, 状態空間は $\{1, 2, 3, 4\}$ であるとする.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

以下の問いに答えよ.

- このマルコフ連鎖の状態遷移図を描け.
- このマルコフ連鎖において, 次の確率 $\Pr(X_2 = 3 | X_0 = 1)$ が何であるか, その数値を答えよ.
- このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか, すべて答えよ.
- このマルコフ連鎖において, 極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t$ が存在するかどうか答えよ. 存在する場合, その極限が何であるか, 答えよ.

問題 4 次の図で表されるグラフ上の単純ランダムウォークを考える. これは頂点1から n までが構成する完全グラフと頂点 $n+1$ から $2n$ までが構成する完全グラフが辺 $\{n, n+1\}$ によって結ばれて出来たグラフである.



このとき, 頂点1から頂点 $2n$ への到達時刻の期待値を求めよ.

以上