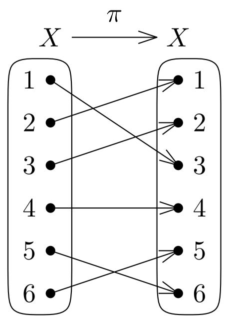
離散数理工学 (5)　　　　**2018 年 11 月 15 日**

演習問題　　　　岡本 吉央

提出締切： 2018 年 11 月 29 日 講義終了時

復習問題 5.1 次の図で表される集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上の置換 π を二行記法，そして，巡回記法によって書き表せ．



復習問題 5.2 集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上の置換 π, σ を

$$\begin{aligned}\pi &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5\end{pmatrix},\\ \sigma &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 3 & 1 & 6 & 2 & 5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

と定義するとき，次の置換が何であるか，二行記法により答えよ．

1. $\pi \circ \sigma$.
2. π^{-1}.

復習問題 5.3 次に挙げる $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上の置換が偶置換であるか，奇置換であるか，答えよ．

1. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6\end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 5 & 3 & 2 & 4 & 6 & 1\end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

復習問題 5.4 集合 $X = \{1, 2, 3\}$ 上の置換群 G で，次に挙げる S が生成するものは何であるか，答えよ．

1. $S = \{(1\ 2\ 3)\}$.
2. $S = \{(1\ 2), (2\ 3)\}$.

補足問題 5.5 任意の集合 A, B, C と任意の写像 $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$ を考える．このとき，f と g が全単射ならば，$g \circ f$ も全単射であることを証明せよ．

補足問題 5.6 任意の集合 A, B, C と任意の写像 $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$ を考える．このとき，f と g が全単射ならば，$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 5.7 要素数 n の集合上の対称群の要素数が $n!$ であり，交代群の要素数が $n!/2$ であることを証明せよ．

追加問題 5.8 次に挙げる $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上の置換が偶置換であるか，奇置換であるか，答えよ．

1. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4\end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 3 & 5 & 2 & 6 & 4\end{pmatrix}$.

追加問題 5.9 集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の置換群 G で，次に挙げる S が生成するものは何であるか，答えよ．

1. $S = \{(1\ 2\ 3\ 4)\}$.
2. $S = \{(1\ 2), (3\ 4)\}$.

追加問題 5.10 任意の正整数 n を考える．集合 $\{1, \dots, n\}$ 上の 2 つの置換群 G_1 と G_2 に対して，$G_1 \cap G_2$ も $\{1, \dots, n\}$ 上の置換群であることを証明せよ．