**離散数理工学 (4)** **2018 年 11 月 8 日**

**演習問題** **岡本 吉央**

**提出締切：** 2018 年 11 月 15 日 講義終了時

**復習問題 4.1** 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 $a_n$ を閉じた形で与えよ．

**復習問題 4.2** 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 $a_n$ を閉じた形で与えよ．

**復習問題 4.3** 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 $a_n$ を閉じた形で与えよ．

**復習問題 4.4** 次の漸化式を考える．

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

この漸化式を満たす数列 $\{C_n\}_{n\geq 0}$ の母関数 $C(x)$ が何であるか，$x$ の関数として答えよ．(発展問題：その母関数を用いて，任意の $n \geq 0$ に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

が成り立つことを証明せよ．)

**復習問題 4.5** 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，$(0,0)$ から $(n,n)$ へ至るディック道の総数が第 $n$ カタラン数 $C_n$ と等しいことを証明せよ．

---

**追加問題 4.6** 次の漸化式を考える．

$$t_n = \begin{cases} 5 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 24 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 4t_{n-1} + 4t_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{t_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 $t_n$ を閉じた形で与えよ．(ヒント：$t_n = \frac{4-3\sqrt{2}}{8}(2-2\sqrt{2})^n + \frac{4+3\sqrt{2}}{8}(2+2\sqrt{2})^n$．)

**追加問題 4.7** 次の漸化式を考える．

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2b_{n-1} - 3n + 9 & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 $b_n$ を閉じた形で与えよ．

**追加問題 4.8** 次の漸化式を考える．

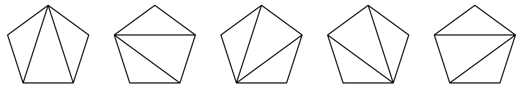
$$c_n = \begin{cases} 3 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 2c_{n-1} - n & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{c_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 $c_n$ を閉じた形で与えよ．

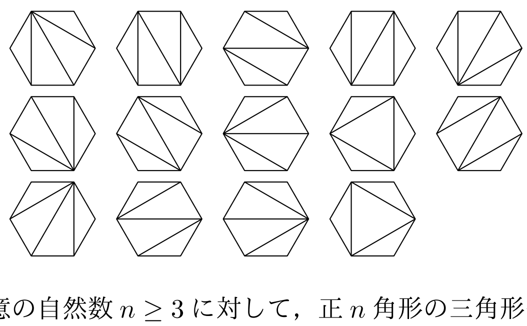
**追加問題 4.9** $n$ 個の左括弧と $n$ 個の右括弧を 1 列に並べるとき，括弧の対応付けが取れている場合のみを考える．例えば，$n = 3$ のとき「(())()」は対応付けが取れている並べ方であるが,「())(()」は対応付けが取れていない並べ方である．つまり，左から順に見ていき，常に左括弧の数が右括弧の数以上になっている場合，その並べ方は括弧の対応付けが取れていると呼ぶ．

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，$n$ 個の左括弧と $n$ 個の右括弧を対応付けが取れるように並べる方法の総数が第 $n$ カタラン数 $C_n$ に等しいことを証明せよ．

**追加問題 4.10** 正 $n$ 角形の三角形分割の総数を考える．例えば，$n = 5$ の場合，次の図の通り，三角形分割の総数は 5 である．



$n = 6$ の場合，次の図の通り，総数は 14 となる．



任意の自然数 $n \geq 3$ に対して，正 $n$ 角形の三角形分割の総数が第 $n-2$ カタラン数 $C_{n-2}$ に等しいことを証明せよ．