グラフとネットワーク	**2017 年 6 月 12 日**
中間試験	岡本 吉央

10:40–12:10．携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．使用可能な解答用紙は 1 枚のみ．
採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと (その文字列は控えておくように)．
採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

問題 1 頂点集合が $V = \{0,1,2,3,4,5\}$ である無向グラフ G で，各頂点の次数が次のように定められるものが存在するかどうか判定せよ．また，その理由も述べよ．

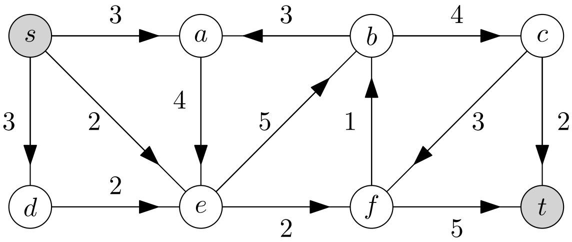
(a) $\deg_G(0) = \deg_G(1) = \deg_G(2) = 1, \quad \deg_G(3) = \deg_G(4) = \deg_G(5) = 2$.

(b) $\deg_G(0) = \deg_G(1) = \deg_G(2) = 1, \quad \deg_G(3) = \deg_G(4) = \deg_G(5) = 3$.

注意：(この講義における) 無向グラフでは，2 頂点間に存在する辺の数は必ず 1 以下であり，2 端点を同じ頂点とする辺も存在しない．

問題 2 有向グラフ G を考える．このとき，$\delta^+(G) \geq 1$ ならば，G が有向閉路を含むことを証明せよ．ただし，$\delta^+(G)$ は G の最小出次数を表す．

問題 3 次の図にある有向グラフを考える．ただし，各弧の横に添えられている数はその弧の容量を表す．



以下の問いに答えよ．

(a) 次に挙げる頂点部分集合がこの有向グラフの s,t カットであるならば，その容量が何であるか，答えよ．ただし，s,t カットではないならば，「s,t カットではない」と答えよ．

1. $\{s,a,b\}$.　　2. $\{s,b,e\}$.　　3. $\{s,b,f\}$.

(b) この有向グラフにおいて，s から t へ至る最大流を 1 つ見つけよ．また，それが最大流であることを証明せよ．

問題 4 完全グラフ $G = (V,E)$ と非負辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$ を考える．ただし，$|V|$ は偶数であるとする．このとき，任意の $e \in E$ に対して

$$w'(e) = \max\{w(f) \mid f \in E\} - w(e) + 1$$

とすることで非負辺重み関数 $w'\colon E \to \mathbb{R}$ を定義すると，次の 2 つが同値であることを示せ．

1. M は w に関する G の最小重み完全マッチングである．
2. M は w' に関する G の最大重みマッチングである．

以上