

グラフとネットワーク第 13 回
平面グラフ：モデル化

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 7 月 24 日

最終更新：2017 年 7 月 21 日 12:45

スケジュール 前半 (予定)

- | | | |
|---|--------------|--------|
| 1 | グラフの定義と次数：数理 | (4/10) |
| 2 | 道と閉路：数理 | (4/17) |
| 3 | 木：数理 | (4/24) |
| 4 | マッチング：数理 | (5/1) |
| 5 | マッチング：モデル化 | (5/8) |
| 6 | 最大流：数理 | (5/15) |
| 7 | 最大流：モデル化 (1) | (5/22) |
| 8 | 最大流：モデル化 (2) | (5/29) |
| 9 | 連結性：数理とモデル化 | (6/5) |
| | ● 中間試験 | (6/12) |

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|------------|--------|
| 10 | 彩色：数理 | (6/19) |
| 11 | 彩色：モデル化 | (6/26) |
| * | 休講 (出張) | (7/3) |
| 12 | 平面グラフ：数理 | (7/10) |
| * | 休講 (海の日) | (7/17) |
| 13 | 平面グラフ：モデル化 | (7/24) |
| 14 | 予備日 (やらない) | (7/31) |
| ● | 期末試験 | (8/7) |

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

平面グラフの彩色を用いて次の問題を解決する

- ▶ 地図の彩色
- ▶ 美術館の監視

目次

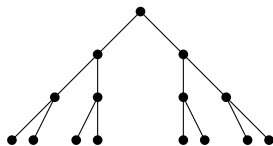
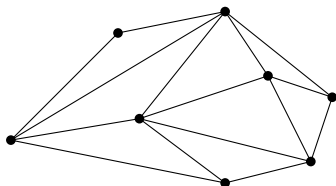
- ① 平面的グラフと平面グラフ (復習)
- ② 地図の彩色
- ③ 美術館の監視
- ④ 今日のまとめ と 講義全体のまとめ

グラフの平面描画

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの平面描画とは？

グラフ G の平面描画とは、 G の描画で、
 辺を表す曲線どうしが端点以外に共有点を持たないこと

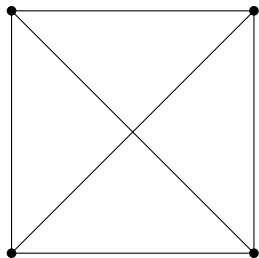
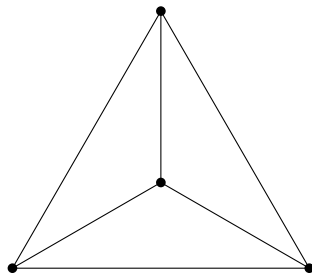


平面描画のことを平面グラフとも呼ぶ

平面的グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

平面的グラフとは？

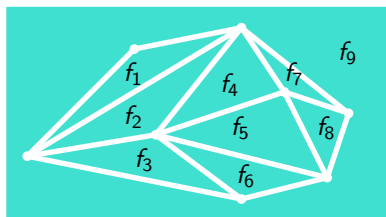
 G が平面的グラフであるとは、 G が平面描画を持つこと例 : K_4 は平面的グラフである K_4 の非平面描画 K_4 の平面描画

平面グラフの面

平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

平面グラフの面とは？ (常識に基づく定義)

G の面とは、 G の辺 (を表す曲線) で囲まれた平面上の領域のこと



G の面で非有界であるものを G の外面と呼ぶ

オイラーの公式

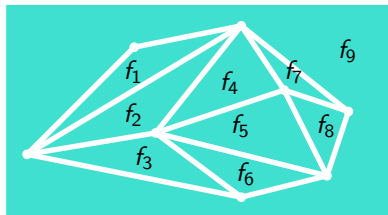
平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

オイラーの公式

G の頂点数が n , 辺数が m , 面数が f , 連結成分数が k のとき,

$$n - m + f = 1 + k$$

特に, G が連結ならば, $k = 1$ なので, $n - m + f = 2$



- ▶ $n = 8$
- ▶ $m = 15$
- ▶ $f = 9$
- ▶ $k = 1$
- ▶ $n - m + f = 2$

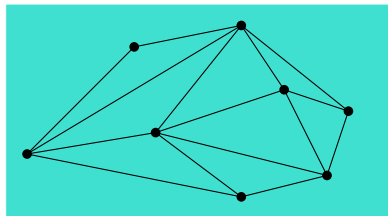
平面的グラフの辺数

連結無向グラフ $G = (V, E)$

平面的グラフの辺数は小さい

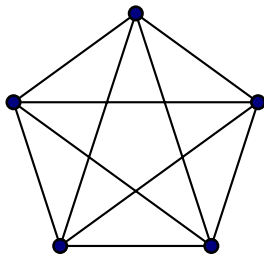
 G が平面的で, $|V| \geq 3$ ならば,

$$|E| \leq 3|V| - 6$$



- ▶ $|V| = 8$
- ▶ $3|V| - 6 = 18$
- ▶ $|E| = 15$

このグラフは平面的グラフか?: 証明



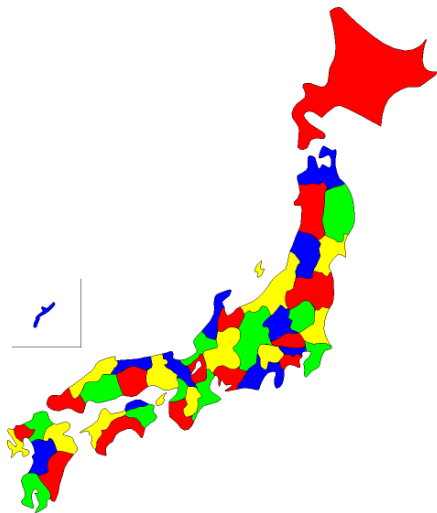
平面的ではない

- ▶ 頂点数 $|V|$ は 5, 辺数 $|E|$ は 10
- ▶ $3|V| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9 < 10 = |E|$
- ▶ $\therefore |E| \leq 3|V| - 6$ を満たさないので, 平面的グラフではない \square

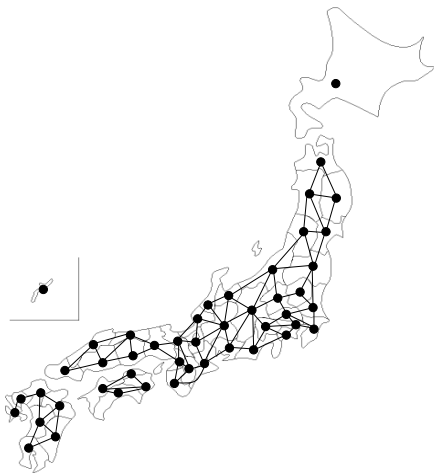
目次

- ① 平面的グラフと平面グラフ (復習)
- ② 地図の彩色
- ③ 美術館の監視
- ④ 今日のまとめ と 講義全体のまとめ

地図の彩色

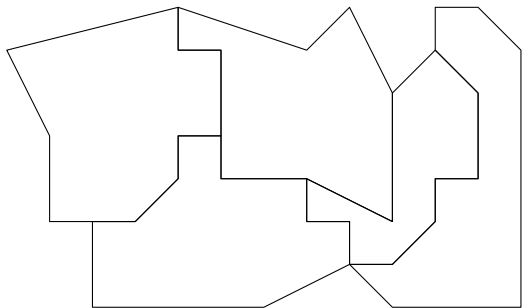


地図からグラフへ



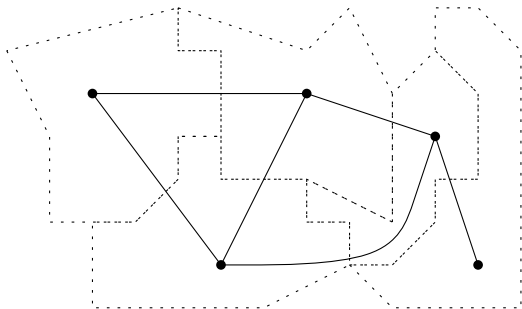
地図の数学的モデル化

地図は、平面上の領域を複数の部分領域へ分割したものとみなす



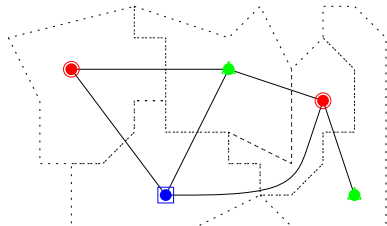
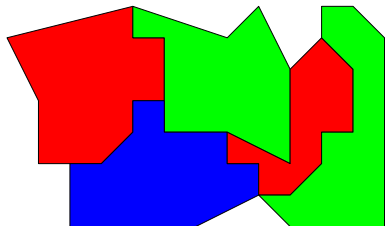
双対グラフ

領域分割の**双対グラフ**とは、無向グラフで各頂点が分割された部分領域に対応し、各辺が境界を (1 次元的に) 共有する 2 つの部分領域に対応するもの



地図の彩色

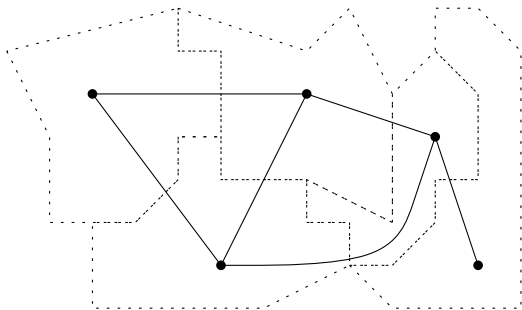
地図の彩色 = その双対グラフの彩色



双対グラフの平面性

重要な性質 (証明は略)

地図の双対グラフは平面的グラフである

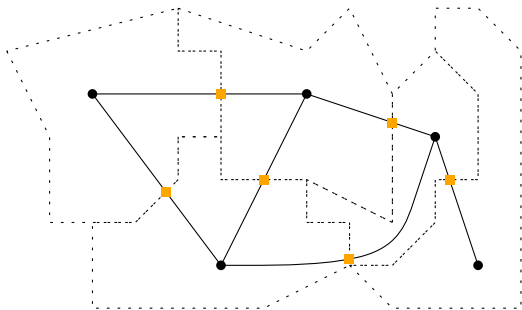


つまり、平面的グラフの彩色ができれば、地図の彩色もできる

双対グラフの平面性

重要な性質 (証明は略)

地図の双対グラフは平面的グラフである

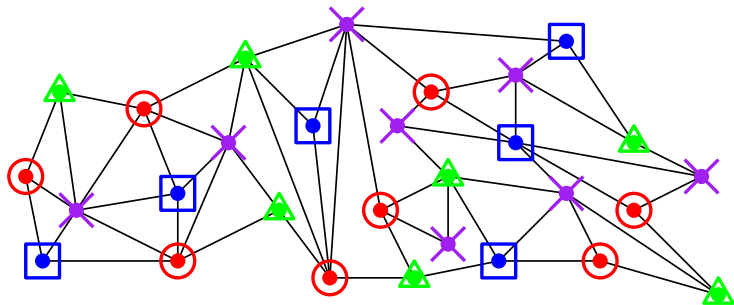


つまり、平面的グラフの彩色ができれば、地図の彩色もできる

平面的グラフの彩色

目標

平面的グラフをできるだけ少ない色で彩色する

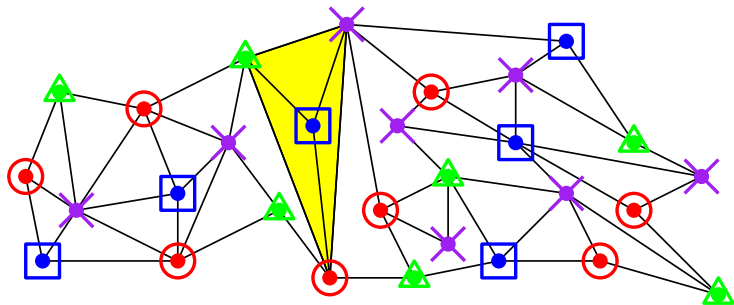


4色必要とする平面的グラフは存在

平面的グラフの彩色

目標

平面的グラフをできるだけ少ない色で彩色する

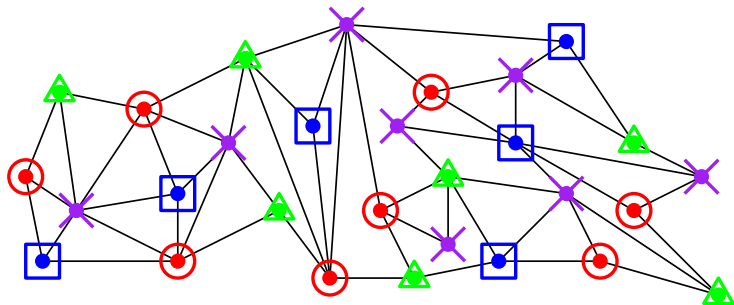


4色必要とする平面的グラフは存在

四色定理

四色定理 (Appel, Haken '77)

任意の平面的グラフは4彩色可能

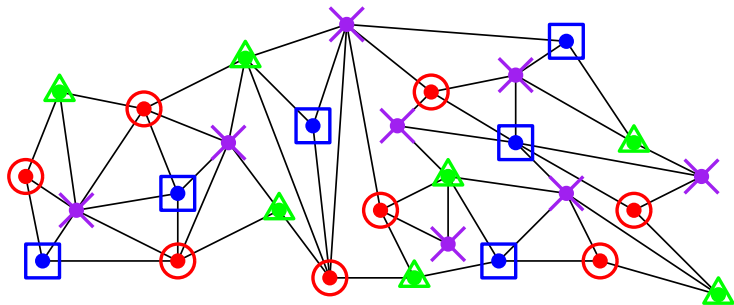


証明はコンピュータを使った膨大な場合分けによる

四色定理はこの講義で証明できないので…

今から証明すること：六色定理

任意の平面的グラフは6彩色可能



使用する道具は，オイラーの公式と帰納法のみ

六色定理：証明 (1)

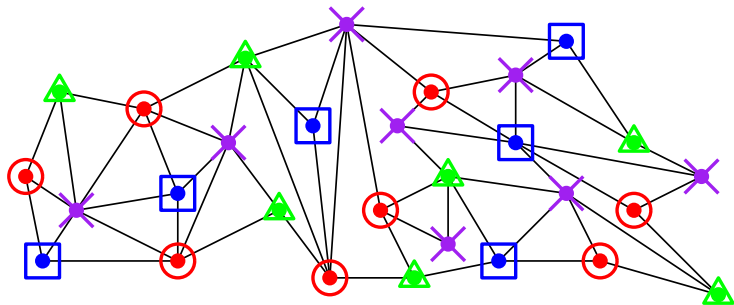
証明：頂点数 n に関する帰納法

- ▶ 頂点数が 1 から 6 のとき，頂点の数だけ色を使えば彩色可能なのでグラフは 6 彩色可能である
- ▶ 頂点数 n の任意の平面的グラフが 6 彩色可能であると仮定する
- ▶ このとき，頂点数 $n+1$ の任意の平面的グラフが 6 彩色可能であることを証明する

六色定理：証明 (2) — 補題

補題

平面的グラフには、必ず次数が5以下の頂点が存在する



六色定理：証明 (3) — 補題

補題

平面的グラフには、必ず次数が5以下の頂点が存在する

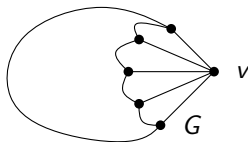
補題の証明：

- ▶ 頂点数が3未満のとき、すべての頂点の次数は2以下なので、正しい
- ▶ 頂点数が3以上である任意の平面的グラフ $G = (V, E)$ を考える
- ▶ $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$ (オイラーの公式の帰結)
- ▶ G の平均次数 $= \frac{2|E|}{|V|}$ (握手補題の帰結)
- ▶ $\therefore G$ の平均次数 $\leq \frac{2 \cdot (3 \cdot |V| - 6)}{|V|} = 6 - \frac{12}{|V|} < 6$
- ▶ \therefore ある頂点の次数 < 6
- ▶ \therefore ある頂点の次数 ≤ 5 □

六色定理：証明 (4) — 証明の完了

頂点数 $n + 1$ の任意の平面的グラフを $G = (V, E)$ とする

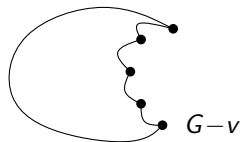
- ▶ 補題より，次数 5 以下の頂点が G に存在する



六色定理：証明 (4) — 証明の完了

頂点数 $n + 1$ の任意の平面的グラフを $G = (V, E)$ とする

- ▶ 補題より，次数 5 以下の頂点が G に存在する
- ▶ そのような頂点を $v \in V$ として， $G - v$ を考える

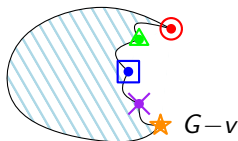


六色定理：証明 (4) — 証明の完了

頂点数 $n+1$ の任意の平面的グラフを $G = (V, E)$ とする

- ▶ 補題より，次数 5 以下の頂点が G に存在する
- ▶ そのような頂点を $v \in V$ として， $G-v$ を考える
- ▶ $G-v$ は頂点数 n の平面的グラフなので，6 彩色可能

(\because 帰納法の仮定)

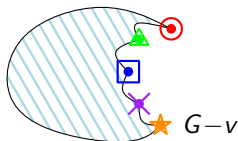


六色定理：証明 (4) — 証明の完了

頂点数 $n+1$ の任意の平面的グラフを $G = (V, E)$ とする

- ▶ 補題より，次数 5 以下の頂点が G に存在する
- ▶ そのような頂点を $v \in V$ として， $G-v$ を考える
- ▶ $G-v$ は頂点数 n の平面的グラフなので，6 彩色可能

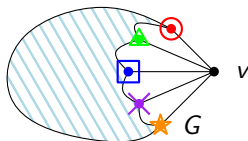
(\because 帰納法の仮定)



六色定理：証明 (4) — 証明の完了

頂点数 $n+1$ の任意の平面的グラフを $G = (V, E)$ とする

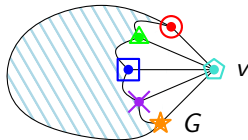
- ▶ 補題より，次数 5 以下の頂点が G に存在する
- ▶ そのような頂点を $v \in V$ として， $G-v$ を考える
- ▶ $G-v$ は頂点数 n の平面的グラフなので，6 彩色可能
(\because 帰納法の仮定)
- ▶ $G-v$ の 6 彩色において， v の (G における) 隣接頂点を見ると
高々 5 色しか使われてない
($\because v$ の次数 ≤ 5)



六色定理：証明 (4) — 証明の完了

頂点数 $n+1$ の任意の平面的グラフを $G = (V, E)$ とする

- ▶ 補題より，次数 5 以下の頂点が G に存在する
- ▶ そのような頂点を $v \in V$ として， $G-v$ を考える
- ▶ $G-v$ は頂点数 n の平面的グラフなので，6 彩色可能
(\because 帰納法の仮定)
- ▶ $G-v$ の 6 彩色において， v の (G における) 隣接頂点を見ると
高々 5 色しか使われてない
($\because v$ の次数 ≤ 5)
- ▶ すなわち， $G-v$ の 6 彩色に， v を付け加えて，
 v の隣接頂点で使われていない色を
 $G-v$ の 6 彩色で使ったパレットから選び
その色で v を塗ることにより， G の 6 彩色が得られる □

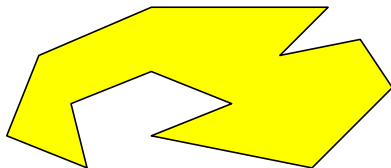


目次

- ① 平面的グラフと平面グラフ (復習)
- ② 地図の彩色
- ③ 美術館の監視
- ④ 今日のまとめ と 講義全体のまとめ

単純多角形

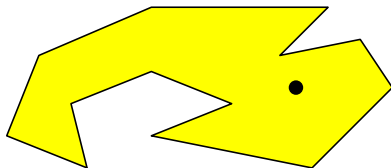
単純多角形：自己交差を持たず，穴も持たない多角形



これが美術館の1つのフロアを表していると思う

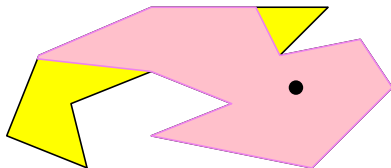
単純多角形における監視員

監視員は点

監視員 g が点 p を見ることができる とは？線分 \overline{gp} が多角形 P に含まれている

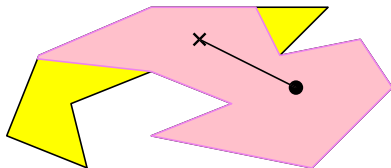
単純多角形における監視員

監視員は点

監視員 g が点 p を見ることができるとは？線分 \overline{gp} が多角形 P に含まれている

単純多角形における監視員

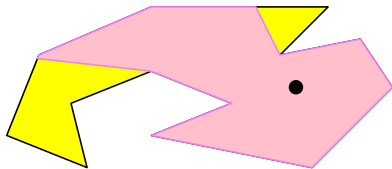
監視員は点

監視員 g が点 p を見ることができる とは？線分 \overline{gp} が多角形 P に含まれている

単純多角形の監視

監視員の集合 $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ が多角形 P を監視するとは？

任意の点 $x \in P$ に対して、ある監視員 g_i が存在して g_i が x を見ることができる



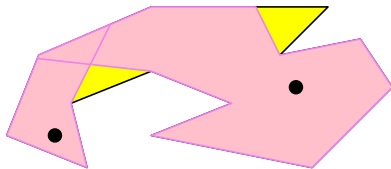
目標

できるだけ少ない数の監視員で、与えられた単純多角形を監視したい

単純多角形の監視

監視員の集合 $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ が多角形 P を監視するとは？

任意の点 $x \in P$ に対して、ある監視員 g_i が存在して g_i が x を見ることができる



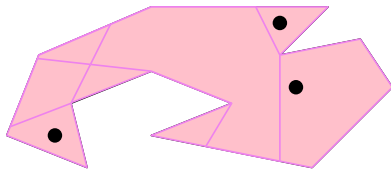
目標

できるだけ少ない数の監視員で、与えられた単純多角形を監視したい

単純多角形の監視

監視員の集合 $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ が多角形 P を監視するとは？

任意の点 $x \in P$ に対して、ある監視員 g_i が存在して g_i が x を見ることができる

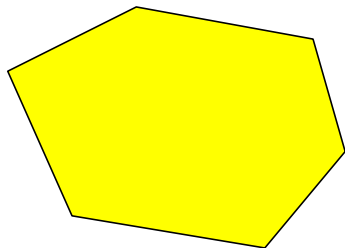


目標

できるだけ少ない数の監視員で、与えられた単純多角形を監視したい

簡単な場合：凸多角形の監視

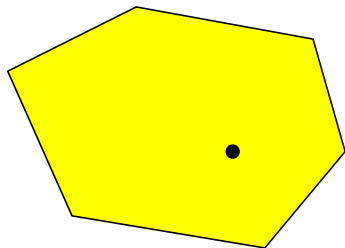
凸多角形は1人で監視できる



監視員は多角形のどこに置いてもよい

簡単な場合：凸多角形の監視

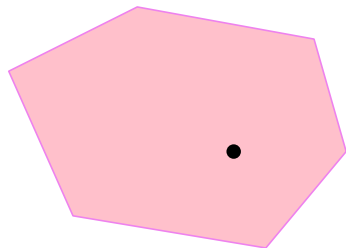
凸多角形は1人で監視できる



監視員は多角形のどこに置いてもよい

簡単な場合：凸多角形の監視

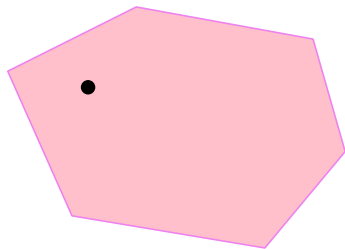
凸多角形は1人で監視できる



監視員は多角形のどこに置いてもよい

簡単な場合：凸多角形の監視

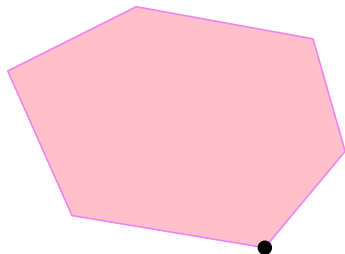
凸多角形は1人で監視できる



監視員は多角形のどこに置いてもよい

簡単な場合：凸多角形の監視

凸多角形は1人で監視できる



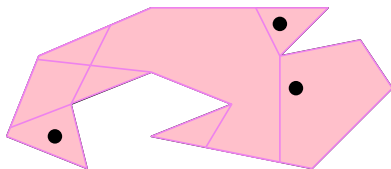
監視員は多角形のどこに置いてもよい

単純多角形の監視：定理

美術館定理 (Chvátal '75)

頂点数 n の任意の単純多角形は、高々 $\lfloor n/3 \rfloor$ 人の監視員で監視可能

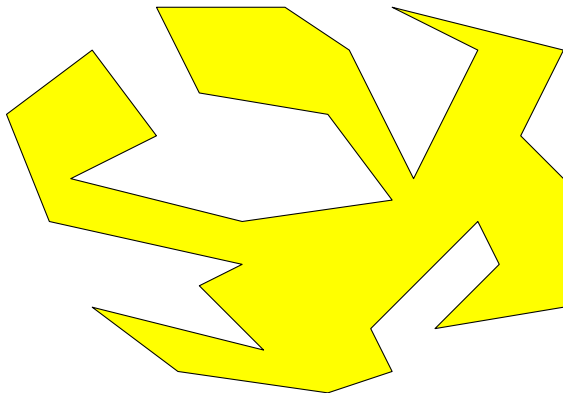
例： $n = 13$, $\lfloor n/3 \rfloor = \lfloor 13/3 \rfloor = 4$



今から行う証明は Fisk ('78) による

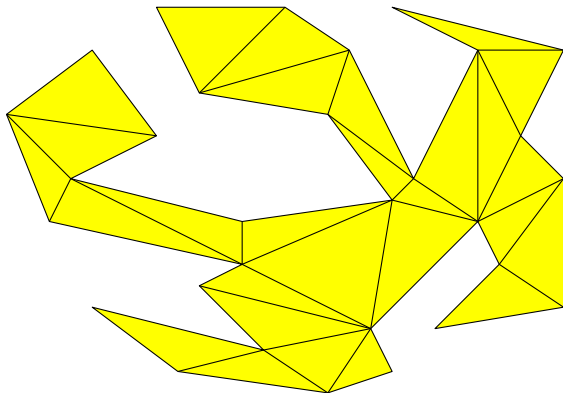
単純多角形の監視：証明

基本的なアイデア：単純多角形の三角形分割



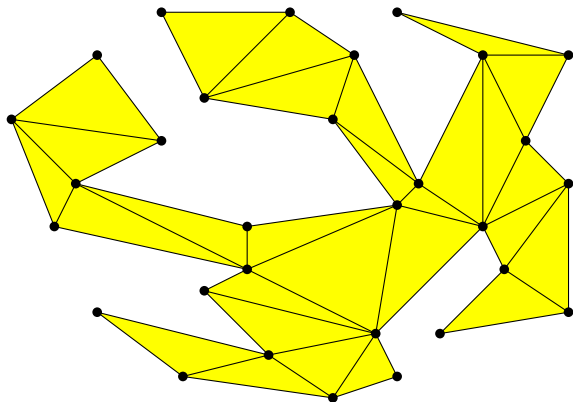
単純多角形の監視：証明

基本的なアイデア：単純多角形の三角形分割



単純多角形の監視：証明

三角形分割をグラフであると見なす



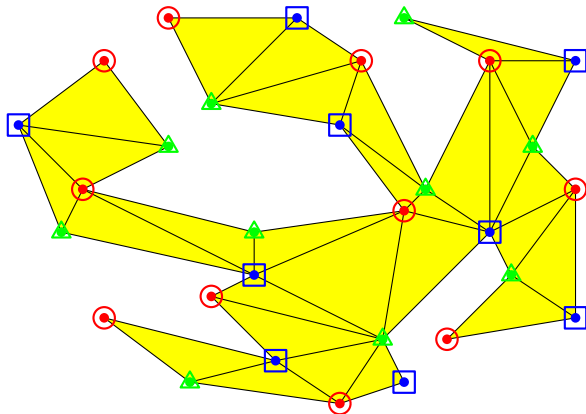
これは外平面グラフ (すべての頂点が外面の境界上にある)

外平面的グラフの彩色

補題 (演習問題)

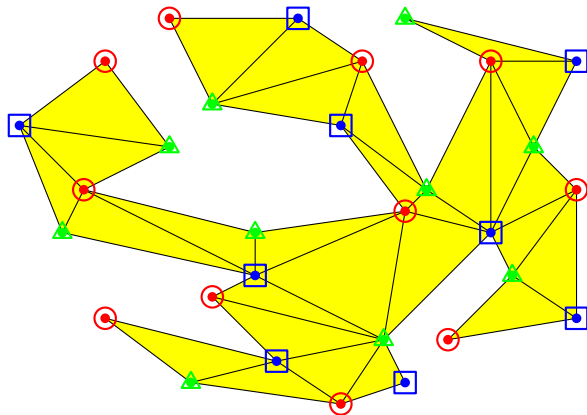
頂点数 n の任意の外平面的グラフは 3 彩色可能

ヒント : 四色定理を使ってもよい (四色定理を使わなくても証明可)



三角形分割の彩色

三角形分割における各三角形には3色すべて現れている

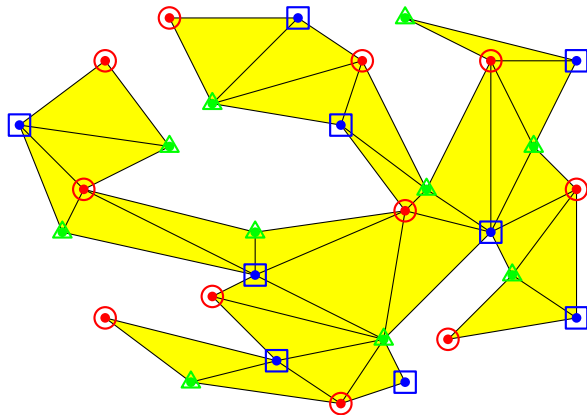


総頂点数 = 30,

● 赤頂点数 = 11, ■ 青頂点数 = 9, ▲ 緑頂点数 = 10

最も使われていない色の頂点を見してみる

最も使われていない色の頂点数 $\leq \lfloor n/3 \rfloor$

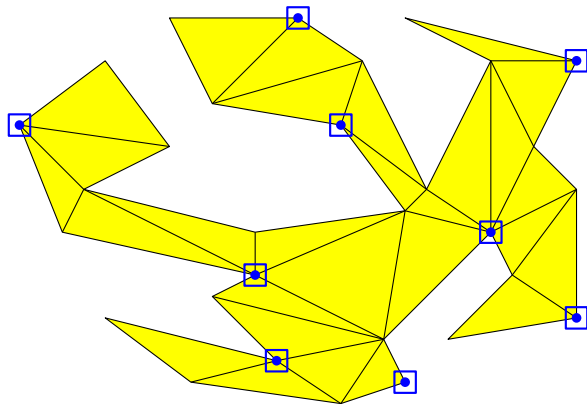


総頂点数 = 30,

● 赤頂点数 = 11, ■ 青頂点数 = 9, ▲ 緑頂点数 = 10

最も使われていない色の頂点を見してみる

最も使われていない色の頂点数 $\leq \lfloor n/3 \rfloor$

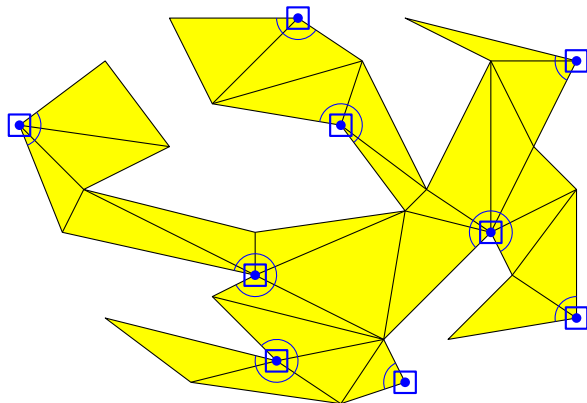


総頂点数 = 30,

● 赤頂点数 = 11, ■ 青頂点数 = 9, ▲ 緑頂点数 = 10

最も使われていない色の頂点を見してみる

その色で塗られた頂点に監視員を置けばよい



- ▶ 三角形分割におけるすべての三角形が監視できる
- ▶ すなわち，多角形全体が監視できる



目次

- ① 平面的グラフと平面グラフ (復習)
- ② 地図の彩色
- ③ 美術館の監視
- ④ 今日のまとめ と 講義全体のまとめ

概要

今日のまとめ

平面グラフの彩色を用いて次の問題を解決する

- ▶ 地図の彩色
- ▶ 美術館の監視

概要

主題

離散最適化の入門として、次を概説する

- ▶ グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- ▶ アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

達成目標

以下の4項目をすべて達成すること

- 1 グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
- 2 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し、数理モデルを構築できる
- 3 アルゴリズム的解法の背後にある数理、特に、最小最大定理の重要性を説明でき、それを用いて最適性の証明ができる
- 4 グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

目次

- ① 平面的グラフと平面グラフ (復習)
- ② 地図の彩色
- ③ 美術館の監視
- ④ 今日のまとめ と 講義全体のまとめ