

グラフとネットワーク第 12 回
平面グラフ：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 7 月 10 日

最終更新：2017 年 7 月 2 日 21:20

スケジュール 前半 (予定)

- | | | |
|---|--------------|--------|
| 1 | グラフの定義と次数：数理 | (4/10) |
| 2 | 道と閉路：数理 | (4/17) |
| 3 | 木：数理 | (4/24) |
| 4 | マッチング：数理 | (5/1) |
| 5 | マッチング：モデル化 | (5/8) |
| 6 | 最大流：数理 | (5/15) |
| 7 | 最大流：モデル化 (1) | (5/22) |
| 8 | 最大流：モデル化 (2) | (5/29) |
| 9 | 連結性：数理とモデル化 | (6/5) |
| | ● 中間試験 | (6/12) |

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|------------|--------|
| 10 | 彩色：数理 | (6/19) |
| 11 | 彩色：モデル化 | (6/26) |
| * | 休講 (出張) | (7/3) |
| 12 | 平面グラフ：数理 | (7/10) |
| * | 休講 (海の日) | (7/17) |
| 13 | 平面グラフ：モデル化 | (7/24) |
| 14 | 予備日 (やらない) | (7/31) |
| ● | 期末試験 | (8/7) |

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

平面グラフに関する基礎を理解し、次ができるようになる

- ▶ 平面グラフの構造 (頂点, 辺, 面) を記述できる
- ▶ オイラーの公式を用いて平面的グラフではないことの証明ができる

注意: 「平面グラフ」と「平面的グラフ」の違い

目次

- ① 平面的グラフと平面グラフ
- ② オイラーの公式
- ③ 応用：正多面体の分類
- ④ 外平面的グラフ
- ⑤ 今日のまとめ

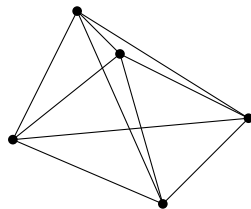
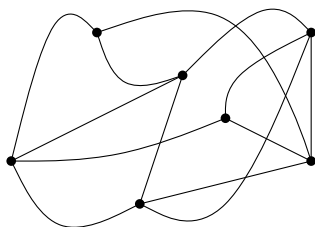
グラフの描画

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの描画とは？

グラフ G の描画とは、平面上に次のように G を表現したもの

- ▶ 各頂点 $v \in V$ は平面上の点
- ▶ 各辺 $\{u, v\} \in E$ は u と v を表す点を結ぶ (自己交差のない) 曲線

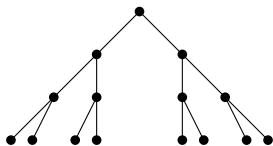
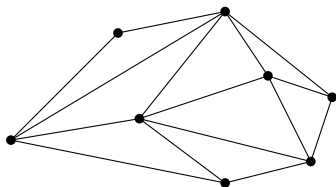


グラフの平面描画

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの平面描画とは？

グラフ G の平面描画とは、 G の描画で、
辺を表す曲線どうしが端点以外に共有点を持たないこと

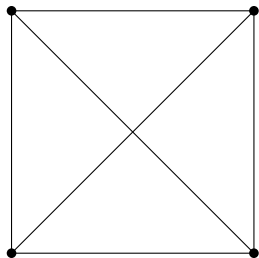
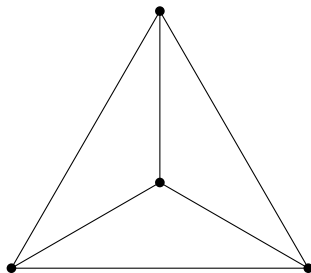


平面描画のことを平面グラフとも呼ぶ

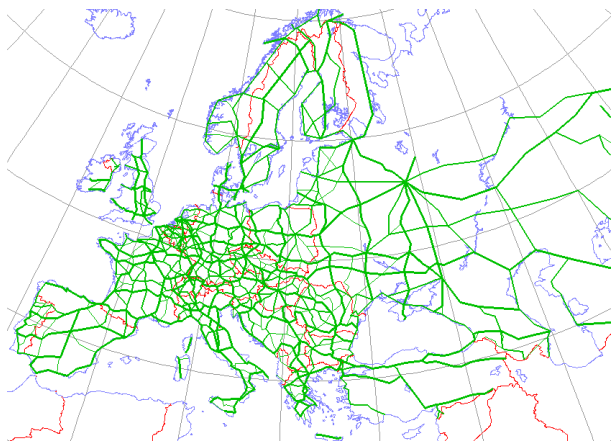
平面的グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

平面的グラフとは？

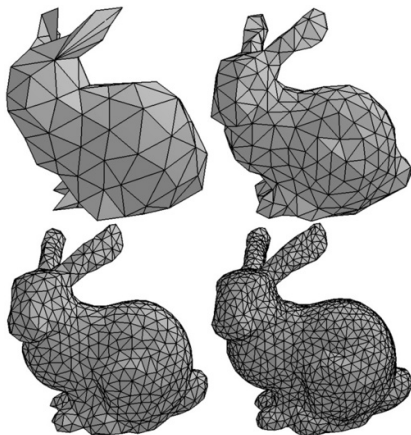
 G が平面的グラフであるとは、 G が平面描画を持つこと例 : K_4 は平面的グラフである K_4 の非平面描画 K_4 の平面描画

平面グラフが出てくる場面 (1) : 道路ネットワーク



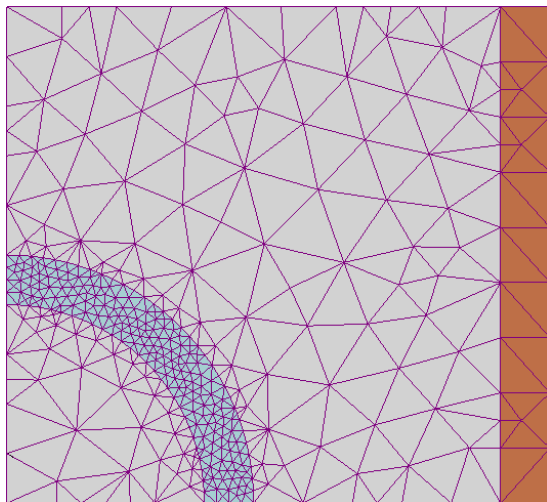
http://en.wikipedia.org/wiki/File:International_E_Road_Network_green.png

平面グラフが出てくる場面 (2) : コンピュータグラフィックス (立体モデリング)



<https://humaan.com/blog/web-3d-graphics-using-three-js/>

平面グラフが出てくる場面 (3) : 2次元有限要素法 (三角形メッシュ)

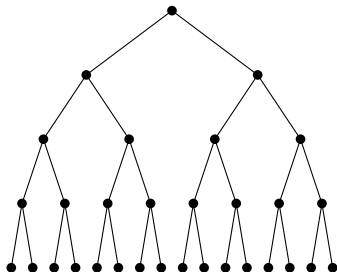
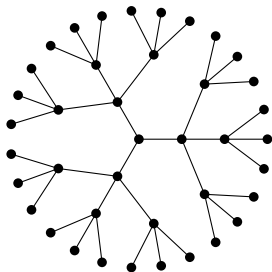


http://en.wikipedia.org/wiki/File:Example_of_2D_mesh.png

木は平面的グラフである

観察

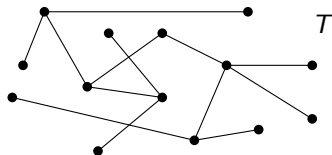
木は平面的グラフである



木は平面的グラフである：証明 (1)

証明：頂点数 n に関する帰納法

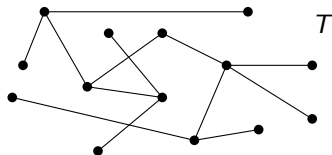
- ▶ $n = 1$ のとき，グラフは辺を持たないので，平面的である



木は平面的グラフである：証明 (1)

証明：頂点数 n に関する帰納法

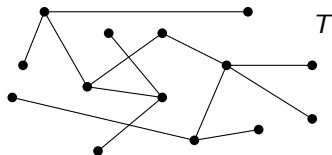
- ▶ $n = 1$ のとき，グラフは辺を持たないので，平面的である
- ▶ $n = k \geq 1$ のとき，頂点数 k の任意の木が平面的グラフであると仮定
- ▶ $n = k + 1 \geq 2$ のとき，頂点数 $k + 1$ の任意の木 T を考える



木は平面的グラフである：証明 (1)

証明：頂点数 n に関する帰納法

- ▶ $n = 1$ のとき，グラフは辺を持たないので，平面的である
- ▶ $n = k \geq 1$ のとき，頂点数 k の任意の木が平面的グラフであると仮定
- ▶ $n = k + 1 \geq 2$ のとき，頂点数 $k + 1$ の任意の木 T を考える



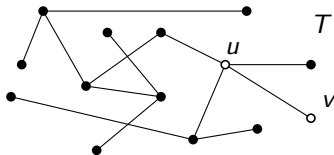
木の性質 (復習)

- ▶ 頂点数 2 以上の木は，次数 1 の頂点 (葉) を持つ
- ▶ 木から葉を除去しても木である

木は平面的グラフである：証明 (2)

証明：頂点数 n に関する帰納法

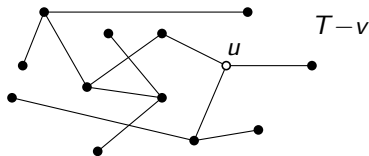
- ▶ T の任意の葉 v を考え、 v に隣接する頂点を u とする



木は平面的グラフである：証明 (2)

証明：頂点数 n に関する帰納法

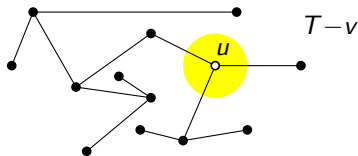
- ▶ T の任意の葉 v を考え、 v に隣接する頂点を u とする
- ▶ $T - v$ は頂点数 k の木なので、帰納法の仮定から、 $T - v$ は平面的グラフである



木は平面的グラフである：証明 (2)

証明：頂点数 n に関する帰納法

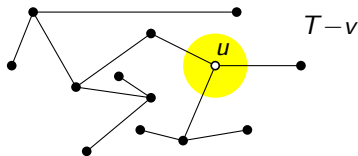
- ▶ T の任意の葉 v を考え、 v に隣接する頂点を u とする
- ▶ $T - v$ は頂点数 k の木なので、帰納法の仮定から、 $T - v$ は平面的グラフである
- ▶ すなわち、 $T - v$ は平面描画を持つ



木は平面的グラフである：証明 (2)

証明：頂点数 n に関する帰納法

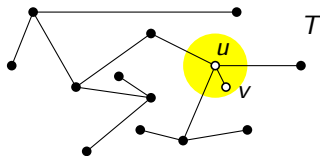
- ▶ T の任意の葉 v を考え、 v に隣接する頂点を u とする
- ▶ $T - v$ は頂点数 k の木なので、帰納法の仮定から、 $T - v$ は平面的グラフである
- ▶ すなわち、 $T - v$ は平面描画を持つ
- ▶ $T - v$ の平面描画において、 u を表す点の周りに v を表す点と辺 $\{u, v\}$ を表す曲線を描く余白がある



木は平面的グラフである：証明 (2)

証明：頂点数 n に関する帰納法

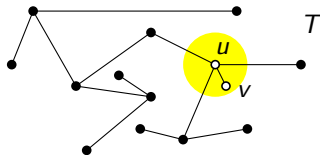
- ▶ T の任意の葉 v を考え、 v に隣接する頂点を u とする
- ▶ $T - v$ は頂点数 k の木なので、帰納法の仮定から、 $T - v$ は平面的グラフである
- ▶ すなわち、 $T - v$ は平面描画を持つ
- ▶ $T - v$ の平面描画において、 u を表す点の周りに v を表す点と辺 $\{u, v\}$ を表す曲線を描く余白がある



木は平面的グラフである：証明 (2)

証明：頂点数 n に関する帰納法

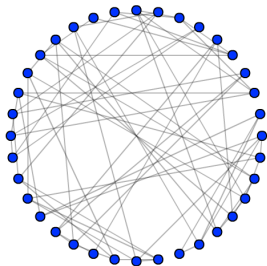
- ▶ T の任意の葉 v を考え、 v に隣接する頂点を u とする
- ▶ $T - v$ は頂点数 k の木なので、帰納法の仮定から、 $T - v$ は平面的グラフである
- ▶ すなわち、 $T - v$ は平面描画を持つ
- ▶ $T - v$ の平面描画において、 u を表す点の周りに v を表す点と辺 $\{u, v\}$ を表す曲線を描く余白がある
- ▶ したがって、 T も平面描画を持つ □



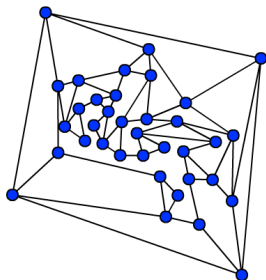
目次

- ① 平面的グラフと平面グラフ
- ② オイラーの公式
- ③ 応用：正多面体の分類
- ④ 外平面的グラフ
- ⑤ 今日のまとめ

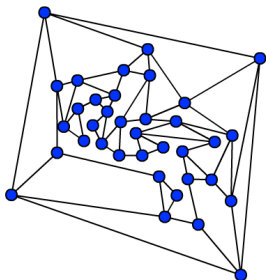
このグラフは平面的グラフか？



このグラフは平面的グラフか？



このグラフは平面的グラフか？

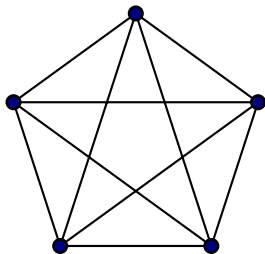


平面的グラフであることを証明するには？

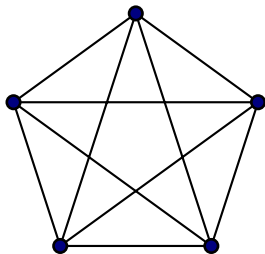
平面描画を見つければよい

<http://planarity.net/>で、平面描画を作る練習ができる

このグラフは平面的グラフか？



このグラフは平面的グラフか？



平面的グラフでないことを証明するには？

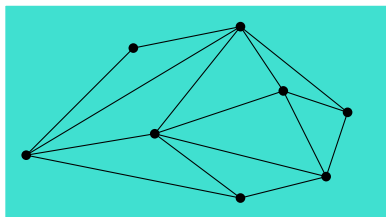
「どうしても平面描画が作れないから」ではもちろん不十分

平面グラフの面

平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

平面グラフの面とは？ (常識に基づく定義)

G の面とは、 G の辺 (を表す曲線) で囲まれた平面上の領域のこと



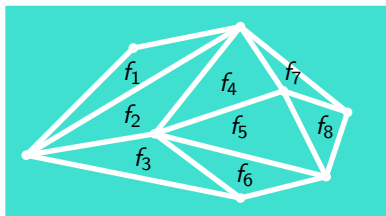
G の面で非有界であるものを G の外面と呼ぶ

平面グラフの面

平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

平面グラフの面とは？ (常識に基づく定義)

G の面とは、 G の辺 (を表す曲線) で囲まれた平面上の領域のこと



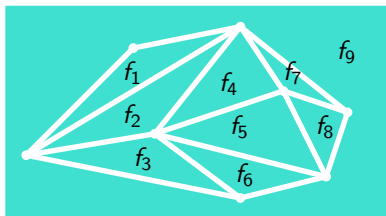
G の面で非有界であるものを G の外面と呼ぶ

平面グラフの面

平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

平面グラフの面とは？ (常識に基づく定義)

G の面とは、 G の辺 (を表す曲線) で囲まれた平面上の領域のこと



G の面で非有界であるものを G の外面と呼ぶ

オイラーの公式

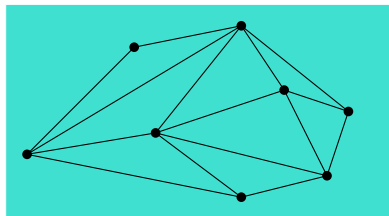
平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

オイラーの公式

G の頂点数が n , 辺数が m , 面数が f , 連結成分数が k のとき,

$$n - m + f = 1 + k$$

特に, G が連結ならば, $k = 1$ なので, $n - m + f = 2$



オイラーの公式

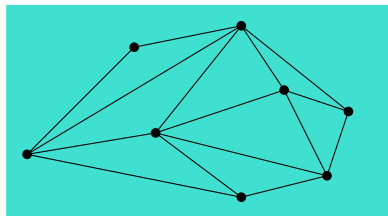
平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

オイラーの公式

G の頂点数が n , 辺数が m , 面数が f , 連結成分数が k のとき,

$$n - m + f = 1 + k$$

特に, G が連結ならば, $k = 1$ なので, $n - m + f = 2$



- ▶ $n = 8$
- ▶ $m = 15$
- ▶ $k = 1$

オイラーの公式

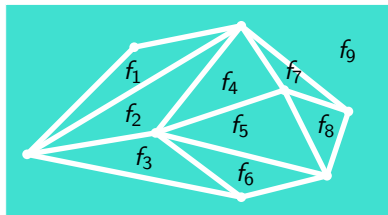
平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

オイラーの公式

G の頂点数が n , 辺数が m , 面数が f , 連結成分数が k のとき,

$$n - m + f = 1 + k$$

特に, G が連結ならば, $k = 1$ なので, $n - m + f = 2$



- ▶ $n = 8$
- ▶ $m = 15$
- ▶ $f = 9$
- ▶ $k = 1$

オイラーの公式

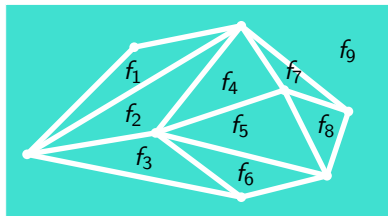
平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

オイラーの公式

G の頂点数が n , 辺数が m , 面数が f , 連結成分数が k のとき,

$$n - m + f = 1 + k$$

特に, G が連結ならば, $k = 1$ なので, $n - m + f = 2$



- ▶ $n = 8$
- ▶ $m = 15$
- ▶ $f = 9$
- ▶ $k = 1$
- ▶ $n - m + f = 8 - 15 + 9 = 2$

オイラーの公式：証明 (1)

証明：辺数 m に関する帰納法

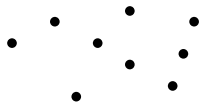
- ▶ $m = 0$ のとき
- ▶ $n = k$ であり，かつ， $f = 1$



オイラーの公式：証明 (1)

証明：辺数 m に関する帰納法

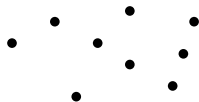
- ▶ $m = 0$ のとき
- ▶ $n = k$ であり，かつ， $f = 1$
- ▶ したがって， $n - m + f = k - 0 + 1 = 1 + k$



オイラーの公式：証明 (1)

証明：辺数 m に関する帰納法

- ▶ $m = 0$ のとき
- ▶ $n = k$ であり，かつ， $f = 1$
- ▶ したがって， $n - m + f = k - 0 + 1 = 1 + k$



- ▶ 辺数 $m \geq 0$ の平面グラフがオイラーの公式を満たすと仮定
- ▶ 辺数 $m + 1 \geq 1$ の任意の平面グラフ G' を考える

オイラーの公式：証明 (2)

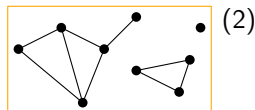
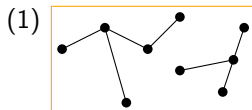
- ▶ 辺数 $m' = m + 1 \geq 1$ の任意の平面グラフ G' を考える
- ▶ G' の頂点数を n' , 面数を f' , 連結成分数を k' とする

オイラーの公式：証明 (2)

- ▶ 辺数 $m' = m + 1 \geq 1$ の任意の平面グラフ G' を考える
- ▶ G' の頂点数を n' , 面数を f' , 連結成分数を k' とする
- ▶ 証明すべきことは, $n' - m' + f' = 1 + k'$

オイラーの公式：証明 (2)

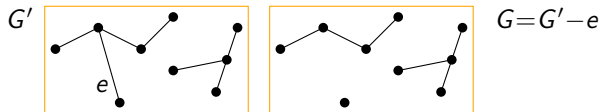
- ▶ 辺数 $m' = m + 1 \geq 1$ の任意の平面グラフ G' を考える
- ▶ G' の頂点数を n' , 面数を f' , 連結成分数を k' とする
- ▶ 証明すべきことは, $n' - m' + f' = 1 + k'$
- ▶ 場合分け
 - (1) G' が閉路を含まない場合
 - (2) G' が閉路を含む場合



オイラーの公式：証明 (3)

場合 (1) : G' が閉路を含まない場合

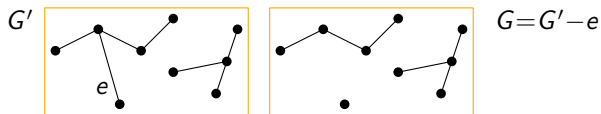
- ▶ すなわち, G' は森であり, $f' = 1$
- ▶ $m' \geq 1$ なので, G' は辺を持つ
- ▶ G' の辺を任意に 1 つ選び, e とする
- ▶ $G = G' - e$ として,
 G の頂点数, 辺数, 面数, 連結成分数をそれぞれ n, m, f, k とする



オイラーの公式：証明 (4)

場合 (1) : G' が閉路を含まない場合

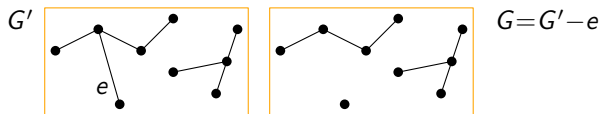
- ▶ 帰納法の仮定より, $n - m + f = 1 + k$ である
- ▶ G も森なので, $f = 1 = f'$



オイラーの公式：証明 (4)

場合 (1) : G' が閉路を含まない場合

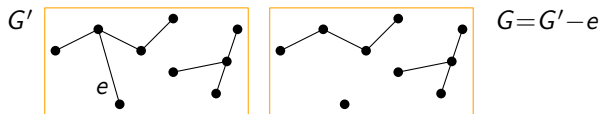
- ▶ 帰納法の仮定より, $n - m + f = 1 + k$ である
- ▶ G も森なので, $f = 1 = f'$
- ▶ 森の連結成分は木であり, 木の任意の辺は切断辺なので, $k = k' + 1$
(第3回スライド 26 ページ)



オイラーの公式：証明 (4)

場合 (1) : G' が閉路を含まない場合

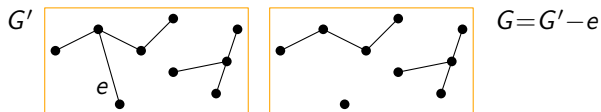
- ▶ 帰納法の仮定より, $n - m + f = 1 + k$ である
- ▶ G も森なので, $f = 1 = f'$
- ▶ 森の連結成分は木であり, 木の任意の辺は切断辺なので, $k = k' + 1$
(第3回スライド 26 ページ)
- ▶ さらに, $n = n'$ かつ $m = m' - 1$



オイラーの公式：証明 (4)

場合 (1) : G' が閉路を含まない場合

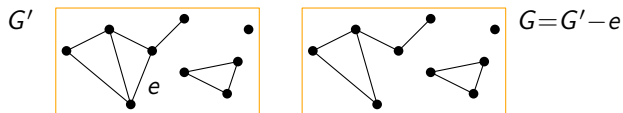
- ▶ 帰納法の仮定より, $n - m + f = 1 + k$ である
- ▶ G も森なので, $f = 1 = f'$
- ▶ 森の連結成分は木であり, 木の任意の辺は切断辺なので, $k = k' + 1$
(第3回スライド 26 ページ)
- ▶ さらに, $n = n'$ かつ $m = m' - 1$
- ▶ したがって, $n' - (m' - 1) + f' = 1 + (k' + 1)$ となる
- ▶ ゆえに, $n' - m' + f' = 1 + k'$ となり, この場合の証明は終わる



オイラーの公式：証明 (5)

場合 (2) : G' が閉路を含む場合

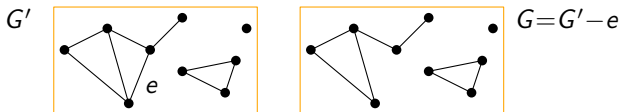
- ▶ G' の閉路に含まれる辺を任意に 1 つ選び, e とする
- ▶ $G = G' - e$ として,
 G の頂点数, 辺数, 面数, 連結成分数をそれぞれ n, m, f, k とする



オイラーの公式：証明 (6)

場合 (2) : G' が閉路を含む場合

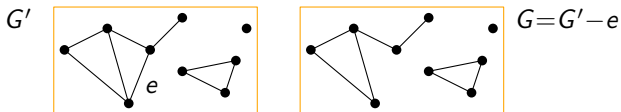
- ▶ 帰納法の仮定より, $n - m + f = 1 + k$ である



オイラーの公式：証明 (6)

場合 (2) : G' が閉路を含む場合

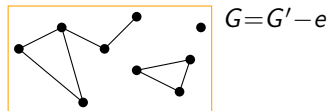
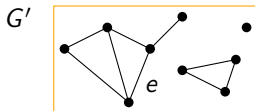
- ▶ 帰納法の仮定より, $n - m + f = 1 + k$ である
- ▶ 閉路に含まれる辺は切断辺ではないので, $k = k'$
(第 3 回スライド 38 ページ)



オイラーの公式：証明 (6)

場合 (2) : G' が閉路を含む場合

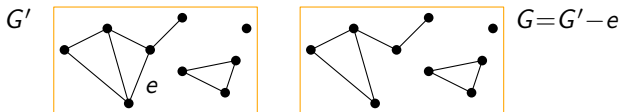
- ▶ 帰納法の仮定より, $n - m + f = 1 + k$ である
- ▶ 閉路に含まれる辺は切断辺ではないので, $k = k'$
(第3回スライド 38 ページ)
- ▶ e を除去することで, e を境界上に持つ 2 つの面が 1 つになるので,
 $f = f' - 1$



オイラーの公式：証明 (6)

場合 (2) : G' が閉路を含む場合

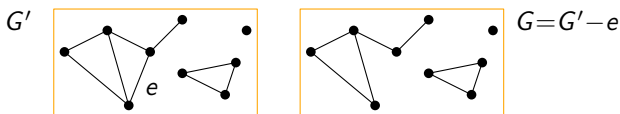
- ▶ 帰納法の仮定より, $n - m + f = 1 + k$ である
- ▶ 閉路に含まれる辺は切断辺ではないので, $k = k'$
(第3回スライド 38 ページ)
- ▶ e を除去することで, e を境界上に持つ 2 つの面が 1 つになるので,
 $f = f' - 1$
- ▶ さらに, $n = n'$ かつ $m = m' - 1$



オイラーの公式：証明 (6)

場合 (2) : G' が閉路を含む場合

- ▶ 帰納法の仮定より, $n - m + f = 1 + k$ である
- ▶ 閉路に含まれる辺は切断辺ではないので, $k = k'$
(第3回スライド 38 ページ)
- ▶ e を除去することで, e を境界上に持つ 2 つの面が 1 つになるので,
 $f = f' - 1$
- ▶ さらに, $n = n'$ かつ $m = m' - 1$
- ▶ したがって, $n' - (m' - 1) + (f' - 1) = 1 + k'$ となる
- ▶ ゆえに, $n' - m' + f' = 1 + k'$ となり, この場合の証明も終わる \square



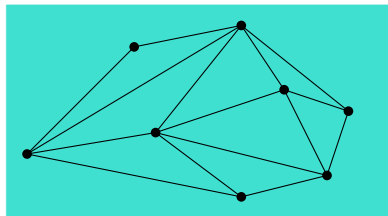
平面的グラフの辺数

連結無向グラフ $G = (V, E)$

平面的グラフの辺数は小さい

 G が平面的で, $|V| \geq 3$ ならば,

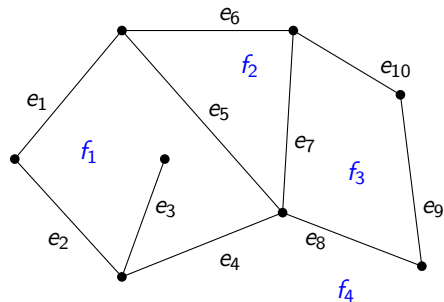
$$|E| \leq 3|V| - 6$$



- ▶ $|V| = 8$
- ▶ $3|V| - 6 = 18$
- ▶ $|E| = 15$

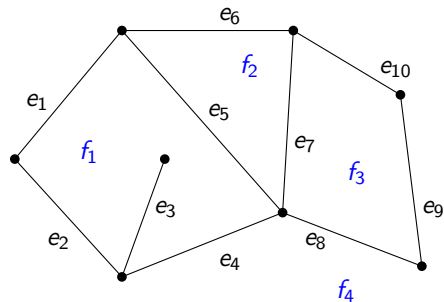
平面的グラフの辺数：証明のあらすじ

数え上げ論法 + オイラーの公式



平面的グラフの辺数：証明のあらすじ

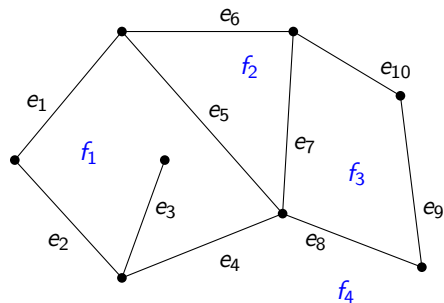
数え上げ論法 + オイラーの公式



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
f_1	1	1	1	1	1					
f_2					1	1	1			
f_3							1	1	1	1
f_4	1	1		1		1		1	1	1

平面的グラフの辺数：証明のあらすじ

数え上げ論法 + オイラーの公式

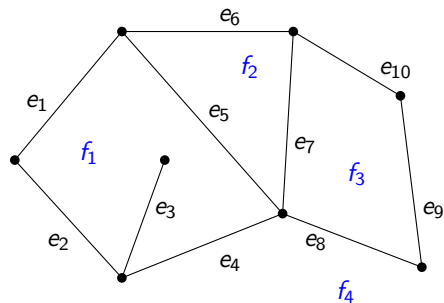


	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
f_1	1	1	1	1	1					
f_2					1	1	1			
f_3							1	1	1	1
f_4	1	1		1		1		1	1	1

$\vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee$
 $\wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge \quad \wedge$

平面的グラフの辺数：証明のあらすじ

数え上げ論法 + オイラーの公式

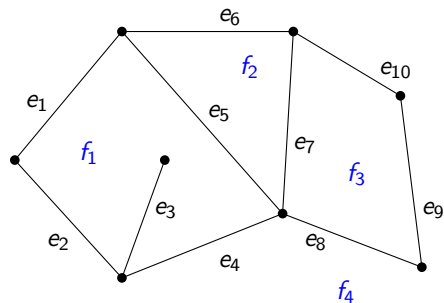


	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	
f_1	1	1	1	1	1						≥ 3
f_2					1	1	1				≥ 3
f_3							1	1	1	1	≥ 3
f_4	1	1		1		1		1	1	1	≥ 3

$\vee \vee \vee \vee \vee \vee \vee \vee \vee \vee$
 $\sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim$

平面的グラフの辺数：証明のあらすじ

数え上げ論法 + オイラーの公式

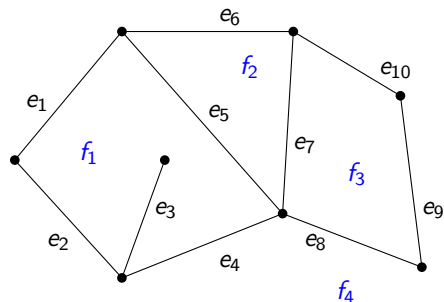


	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	
f_1	1	1	1	1	1						≥ 3
f_2					1	1	1				≥ 3
f_3							1	1	1	1	≥ 3
f_4	1	1		1		1		1	1	1	≥ 3
	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	
	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	

▶ $3f \leq 2m$

平面的グラフの辺数：証明のあらすじ

数え上げ論法 + オイラーの公式



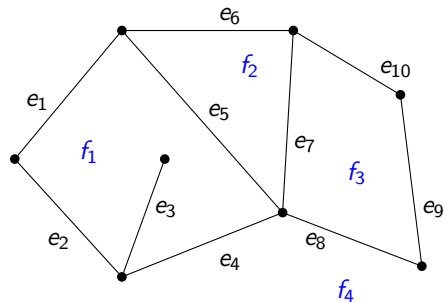
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	
f_1	1	1	1	1	1						≥ 3
f_2					1	1	1				≥ 3
f_3							1	1	1	1	≥ 3
f_4	1	1		1		1		1	1	1	≥ 3
	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	
	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	

▶ $3f \leq 2m$

▶ オイラーの公式より, $1 + k = n - m + f$

平面的グラフの辺数：証明のあらすじ

数え上げ論法 + オイラーの公式



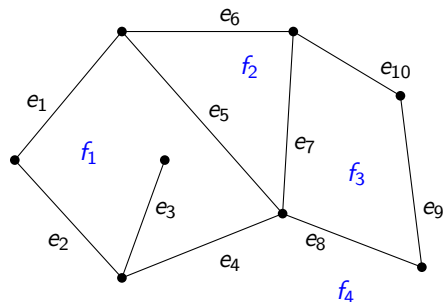
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	
f_1	1	1	1	1	1						≥ 3
f_2					1	1	1				≥ 3
f_3							1	1	1	1	≥ 3
f_4	1	1		1		1		1	1	1	≥ 3
	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	
	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	

▶ $3f \leq 2m$

▶ オイラーの公式より, $1 + k = n - m + f \leq n - m + \frac{2}{3}m$

平面的グラフの辺数：証明のあらすじ

数え上げ論法 + オイラーの公式



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	
f_1	1	1	1	1	1						≥ 3
f_2					1	1	1				≥ 3
f_3							1	1	1	1	≥ 3
f_4	1	1		1		1		1	1	1	≥ 3
	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	
	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	

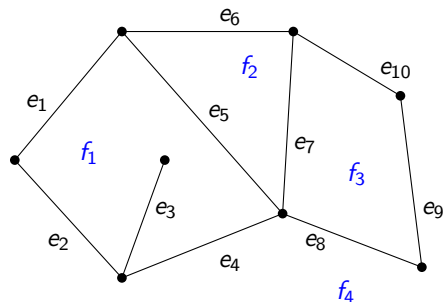
▶ $3f \leq 2m$

▶ オイラーの公式より, $2 \leq 1 + k = n - m + f \leq n - m + \frac{2}{3}m$

注： $n = 3$ のときだけ個別の扱いが必要

平面的グラフの辺数：証明のあらすじ

数え上げ論法 + オイラーの公式



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	
f_1	1	1	1	1	1						≥ 3
f_2					1	1	1				≥ 3
f_3							1	1	1	1	≥ 3
f_4	1	1		1		1		1	1	1	≥ 3
	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	
	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	\cup	

- ▶ $3f \leq 2m$
- ▶ オイラーの公式より, $2 \leq 1 + k = n - m + f \leq n - m + \frac{2}{3}m$
- ▶ $\therefore m \leq 3n - 6$

□

注： $n = 3$ のときだけ個別の扱いが必要

平面的グラフの辺数：証明 (1)

- ▶ 頂点数 $|V| = 3$ のとき，連結グラフの辺数 $|E|$ は 3 以下
- ▶ よって， $|E| \leq 3 = 3 \cdot 3 - 6 = 3 \cdot |V| - 6$ で成立

- ▶ したがって， $|V| \geq 4$ と仮定
- ▶ ここで，辺集合を E ，面集合を F として，数え上げ論法を適用
- ▶ 行列 $M \in \mathbb{R}^{E \times F}$ を次で定義する

任意の $e \in E, f \in F$ に対して，
$$M_{e,f} = \begin{cases} 1 & (e \text{ が } f \text{ の境界上にある}), \\ 0 & (e \text{ が } f \text{ の境界上にない}) \end{cases}$$

平面的グラフの辺数：証明 (2)

- ▶ $|V| \geq 4$ なので、各面 $f \in F$ の境界上には3つ以上辺が存在し、ゆえに

$$\sum_{e \in E} \sum_{f \in F} M_{e,f} = \sum_{f \in F} \left(\sum_{e \in E} M_{e,f} \right) \geq \sum_{f \in F} 3 = 3|F|$$

- ▶ 一方、各辺 $e \in E$ は高々2つの面の境界にしか存在しないので

$$\sum_{e \in E} \sum_{f \in F} M_{e,f} = \sum_{e \in E} \left(\sum_{f \in F} M_{e,f} \right) \leq \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$$

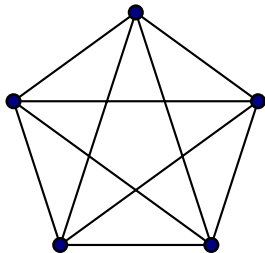
- ▶ したがって、 $3|F| \leq 2|E|$.
- ▶ オイラーの公式から、 $|V| - |E| + |F| = 2$ が成り立つので、

$$2 = |V| - |E| + |F| \leq |V| - |E| + \frac{2}{3}|E| = |V| - \frac{1}{3}|E|$$

- ▶ したがって、 $|E| \leq 3|V| - 6$



このグラフは平面的グラフか?: 証明



平面的ではない

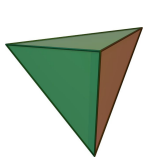
- ▶ 頂点数 $|V|$ は 5, 辺数 $|E|$ は 10
- ▶ $3|V| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9 < 10 = |E|$
- ▶ $\therefore |E| \leq 3|V| - 6$ を満たさないので, 平面的グラフではない □

目次

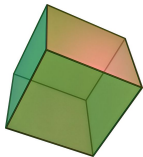
- ① 平面的グラフと平面グラフ
- ② オイラーの公式
- ③ 応用：正多面体の分類
- ④ 外平面的グラフ
- ⑤ 今日のまとめ

正多面体 (3次元)

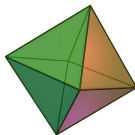
正多面体とは、各面が合同な正多角形であり、各頂点に集まる面の数が同じであるような多面体のこと



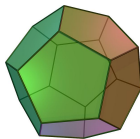
正四面体



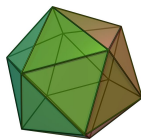
正六面体



正八面体



正十二面体



正二十面体

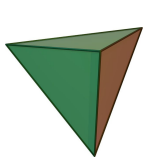
http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

疑問

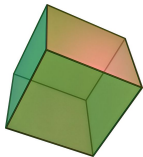
この5つの他に、正多面体はあるのか？

正多面体 (3次元)

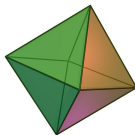
正多面体とは、各面が合同な正多角形であり、各頂点に集まる面の数が同じであるような多面体のこと



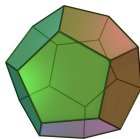
正四面体



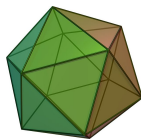
正六面体



正八面体



正十二面体



正二十面体

http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

疑問

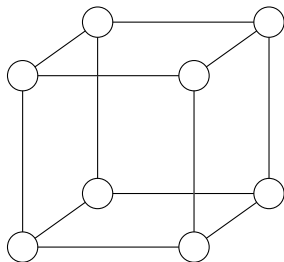
この5つの他に、正多面体はあるのか？

解答

この5つの他に、正多面体は存在しない

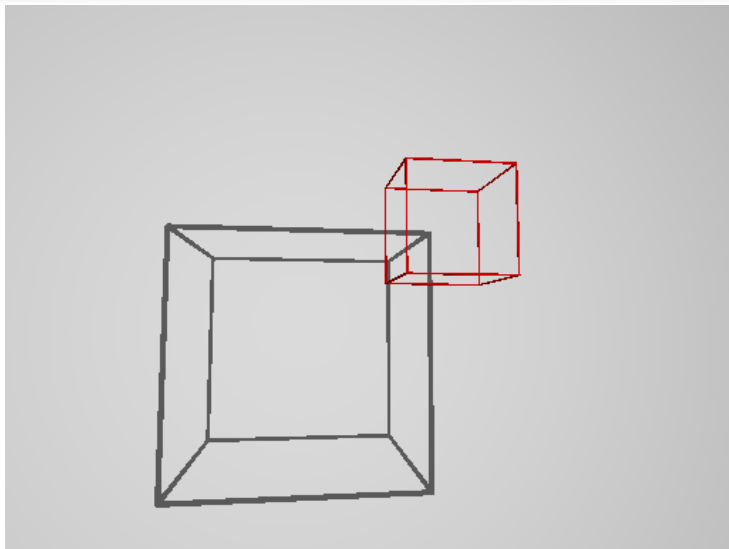
凸多面体のグラフ

凸多面体から無向グラフが作れる



- ▶ グラフの頂点 = 多面体の頂点
- ▶ グラフの辺 = 多面体の辺

凸多面体のグラフは平面的グラフ



正多面体の分類：証明 (1)

設定

- ▶ 頂点数 n , 辺数 m , 面数 f とする
- ▶ 各面が正 p 角形であるとする
- ▶ 各頂点の次数が q であるとする

正多面体の分類：証明 (1)

設定

- ▶ 頂点数 n , 辺数 m , 面数 f とする
- ▶ 各面が正 p 角形であるとする
- ▶ 各頂点の次数が q であるとする

$$\text{▶ } n - m + f = 2$$

(オイラーの公式)

正多面体の分類：証明 (1)

設定

- ▶ 頂点数 n , 辺数 m , 面数 f とする
- ▶ 各面が正 p 角形であるとする
- ▶ 各頂点の次数が q であるとする

- ▶ $n - m + f = 2$

(オイラーの公式)

- ▶ $qn = 2m$

(握手補題)

正多面体の分類：証明 (1)

設定

- ▶ 頂点数 n , 辺数 m , 面数 f とする
- ▶ 各面が正 p 角形であるとする
- ▶ 各頂点の次数が q であるとする

- ▶ $n - m + f = 2$

(オイラーの公式)

- ▶ $qn = 2m$

(握手補題)

- ▶ $pf = 2m$

(数え上げ)

正多面体の分類：証明 (1)

設定

- ▶ 頂点数 n , 辺数 m , 面数 f とする
- ▶ 各面が正 p 角形であるとする
- ▶ 各頂点の次数が q であるとする

- ▶ $n - m + f = 2$

(オイラーの公式)

- ▶ $qn = 2m$

(握手補題)

- ▶ $pf = 2m$

(数え上げ)

- ▶ $\therefore \frac{2m}{q} - m + \frac{2m}{p} = 2$

正多面体の分類：証明 (1)

設定

- ▶ 頂点数 n , 辺数 m , 面数 f とする
- ▶ 各面が正 p 角形であるとする
- ▶ 各頂点の次数が q であるとする

$$\text{▶ } n - m + f = 2$$

(オイラーの公式)

$$\text{▶ } qn = 2m$$

(握手補題)

$$\text{▶ } pf = 2m$$

(数え上げ)

$$\text{▶ } \therefore \frac{2m}{q} - m + \frac{2m}{p} = 2$$

$$\text{▶ } \therefore \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$$

正多面体の分類：証明 (1)

設定

- ▶ 頂点数 n , 辺数 m , 面数 f とする
- ▶ 各面が正 p 角形であるとする
- ▶ 各頂点の次数が q であるとする

$$\text{▶ } n - m + f = 2$$

(オイラーの公式)

$$\text{▶ } qn = 2m$$

(握手補題)

$$\text{▶ } pf = 2m$$

(数え上げ)

$$\text{▶ } \therefore \frac{2m}{q} - m + \frac{2m}{p} = 2$$

$$\text{▶ } \therefore \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$$

$$\text{▶ } m \geq 1 \text{ なので, } \frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$$

正多面体の分類：証明 (1)

- ▶ この式 $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$ を満たす $p \geq 3$ と $q \geq 3$ は次の表の通り

p	q		
3	3		
3	4		
3	5		
4	3		
5	3		

正多面体の分類：証明 (1)

- ▶ この式 $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$ を満たす $p \geq 3$ と $q \geq 3$ は次の表の通り

p	q	n	m	f
3	3	4	6	4
3	4	6	12	8
3	5	12	30	20
4	3	8	12	6
5	3	20	30	12

正多面体の分類：証明 (1)

- ▶ この式 $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$ を満たす $p \geq 3$ と $q \geq 3$ は次の表の通り

p	q	n	m	f	
3	3	4	6	4	正四面体
3	4	6	12	8	正八面体
3	5	12	30	20	正二十面体
4	3	8	12	6	正六面体
5	3	20	30	12	正十二面体

正多面体の分類：証明 (1)

- ▶ この式 $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$ を満たす $p \geq 3$ と $q \geq 3$ は次の表の通り

p	q	n	m	f	
3	3	4	6	4	正四面体
3	4	6	12	8	正八面体
3	5	12	30	20	正二十面体
4	3	8	12	6	正六面体
5	3	20	30	12	正十二面体

- ▶ つまり、正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体以外に正多面体は存在しない □

目次

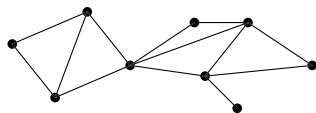
- ① 平面的グラフと平面グラフ
- ② オイラーの公式
- ③ 応用：正多面体の分類
- ④ 外平面的グラフ
- ⑤ 今日のまとめ

グラフの外平面描画

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの外平面描画とは？

グラフ G の外平面描画とは、 G の平面描画で、すべての頂点が外面に現れているもの

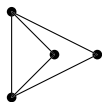
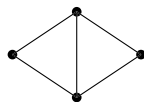


外平面描画のことを外平面グラフとも呼ぶ

外平面的グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

外平面的グラフとは？

 G が外平面的グラフであるとは、 G が外平面描画を持つこと例：次のグラフは外平面的グラフである平面描画だが
外平面描画ではない

外平面描画

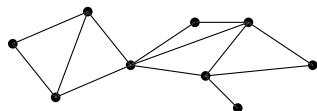
外平面的グラフの辺数

連結無向グラフ $G = (V, E)$

外平面的グラフの辺数は小さい

 G が外平面的で, $|V| \geq 3$ ならば,

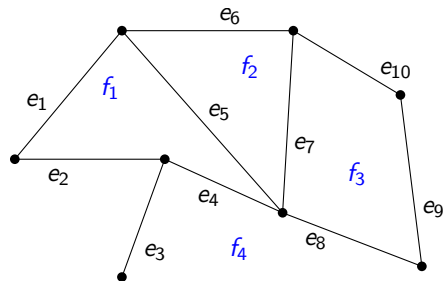
$$|E| \leq 2|V| - 3$$



- ▶ $|V| = 9$
- ▶ $2|V| - 3 = 15$
- ▶ $|E| = 13$

平面的グラフの辺数：証明のあらすじ

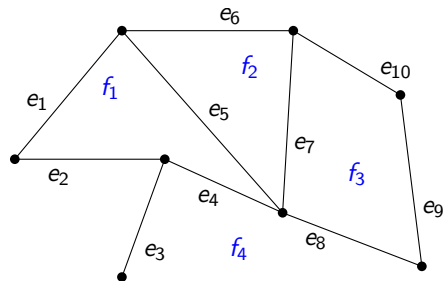
数え上げ論法 + オイラーの公式



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	
f_1	1	1		1	1						≥ 3
f_2					1	1	1				≥ 3
f_3							1	1	1	1	≥ 3
f_4	1	1	1	1		1		1	1	1	$\geq n$
	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	
	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	

平面的グラフの辺数：証明のあらすじ

数え上げ論法 + オイラーの公式

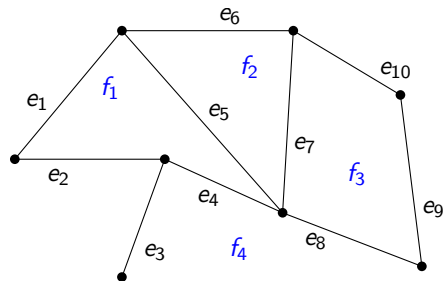


	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	
f_1	1	1		1	1						≥ 3
f_2					1	1	1				≥ 3
f_3							1	1	1	1	≥ 3
f_4	1	1	1	1		1		1	1	1	$\geq n$
	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	
	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	

$$\blacktriangleright 3(f - 1) + n \leq 2m$$

平面的グラフの辺数：証明のあらすじ

数え上げ論法 + オイラーの公式



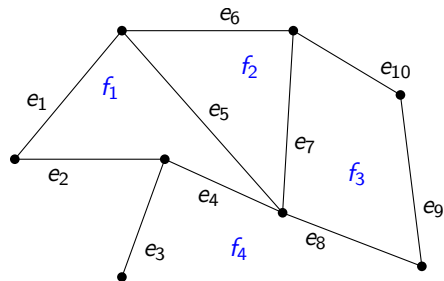
	e ₁	e ₂	e ₃	e ₄	e ₅	e ₆	e ₇	e ₈	e ₉	e ₁₀	
f ₁	1	1		1	1						≥ 3
f ₂					1	1	1				≥ 3
f ₃							1	1	1	1	≥ 3
f ₄	1	1	1	1		1		1	1	1	≥ n
	∧	∧	∧	∧	∧	∧	∧	∧	∧	∧	
	∨	∨	∨	∨	∨	∨	∨	∨	∨	∨	

$$\blacktriangleright 3(f - 1) + n \leq 2m$$

$$\blacktriangleright \text{オイラーの公式より } 2 \leq 1 + k = n - m + f \leq n - m + \frac{2m - n + 3}{3}$$

平面的グラフの辺数：証明のあらすじ

数え上げ論法 + オイラーの公式



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	
f_1	1	1		1	1						≥ 3
f_2					1	1	1				≥ 3
f_3							1	1	1	1	≥ 3
f_4	1	1	1	1		1		1	1	1	$\geq n$
	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	
	\wedge	\wedge	\wedge	\wedge	\wedge	\wedge	\wedge	\wedge	\wedge	\wedge	

$$\blacktriangleright 3(f-1) + n \leq 2m$$

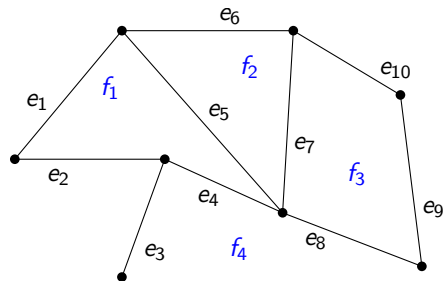
$$\blacktriangleright \text{オイラーの公式より } 2 \leq 1 + k = n - m + f \leq n - m + \frac{2m-n+3}{3}$$

$$\blacktriangleright \therefore m \leq 2n - 3$$



平面的グラフの辺数：証明のあらすじ

数え上げ論法 + オイラーの公式



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	
f_1	1	1		1	1						≥ 3
f_2					1	1	1				≥ 3
f_3							1	1	1	1	≥ 3
f_4	1	1	1	1		1		1	1	1	$\geq n$
	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	\vee	
	\wedge	\wedge	\wedge	\wedge	\wedge	\wedge	\wedge	\wedge	\wedge	\wedge	

$$\blacktriangleright 3(f-1) + n \leq 2m$$

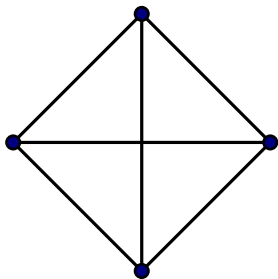
$$\blacktriangleright \text{オイラーの公式より } 2 \leq 1 + k = n - m + f \leq n - m + \frac{2m - n + 3}{3}$$

$$\blacktriangleright \therefore m \leq 2n - 3$$



注意：グラフが木であるときは個別の扱いが必要（詳細は演習問題）

次のグラフは外平面的グラフか？



外平面的ではない

- ▶ 頂点数 $|V|$ は 4, 辺数 $|E|$ は 6
- ▶ $2|V| - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5 < 6 = |E|$
- ▶ $\therefore |E| \leq 2|V| - 3$ を満たさないので, 外平面的グラフではない \square

目次

- ① 平面的グラフと平面グラフ
- ② オイラーの公式
- ③ 応用：正多面体の分類
- ④ 外平面的グラフ
- ⑤ 今日のまとめ

今日のまとめ

今日の目標

平面グラフに関する基礎を理解し、次ができるようになる

- ▶ 平面グラフの構造 (頂点, 辺, 面) を記述できる
- ▶ オイラーの公式を用いて平面的グラフではないことの証明ができる

注意: 「平面グラフ」と「平面的グラフ」の違い

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

目次

- ① 平面的グラフと平面グラフ
- ② オイラーの公式
- ③ 応用：正多面体の分類
- ④ 外平面的グラフ
- ⑤ 今日のまとめ