

グラフとネットワーク第 9 回
連結性：数理とモデル化

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 6 月 5 日

最終更新：2017 年 6 月 2 日 10:40

スケジュール 前半 (予定)

- | | | |
|---|--------------|--------|
| 1 | グラフの定義と次数：数理 | (4/10) |
| 2 | 道と閉路：数理 | (4/17) |
| 3 | 木：数理 | (4/24) |
| 4 | マッチング：数理 | (5/1) |
| 5 | マッチング：モデル化 | (5/8) |
| 6 | 最大流：数理 | (5/15) |
| 7 | 最大流：モデル化 (1) | (5/22) |
| 8 | 最大流：モデル化 (2) | (5/29) |
| 9 | 連結性：数理とモデル化 | (6/5) |
| | ● 中間試験 | (6/12) |

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- | | | |
|----|---------------|--------|
| 10 | 彩色：数理 | (6/19) |
| 11 | 彩色：モデル化 | (6/26) |
| * | 休講 (出張) | (7/3) |
| 12 | 平面グラフ：数理 | (7/10) |
| * | 休講 (海の日) | (7/17) |
| 13 | 平面グラフ：モデル化 | (7/24) |
| 14 | 予備日 (たぶんやらない) | (7/31) |
| ● | 期末試験 | (8/7) |

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

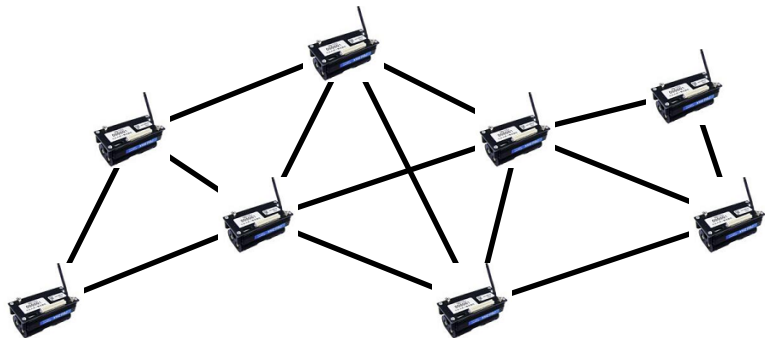
- ▶ グラフの連結性に関する概念を理解し，正しく使えるようになる
- ▶ 連結度に関する Menger の定理を最大流と関係づけられるようになる

センサネットワークにおける通信



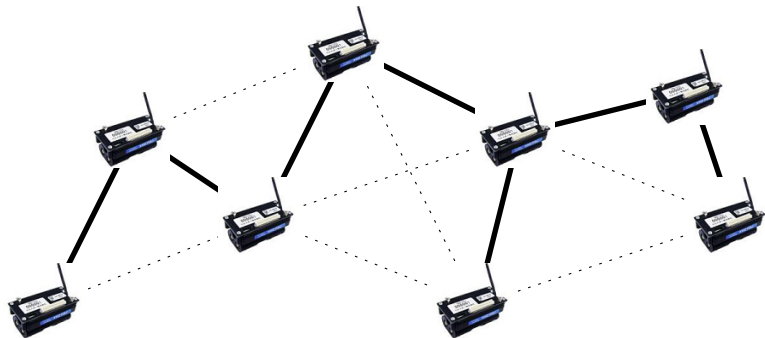
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信



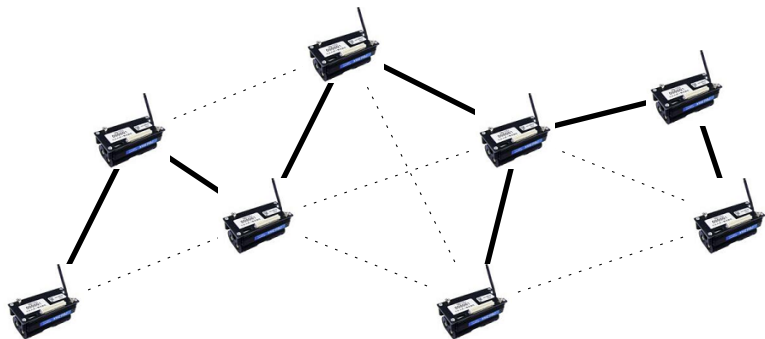
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信



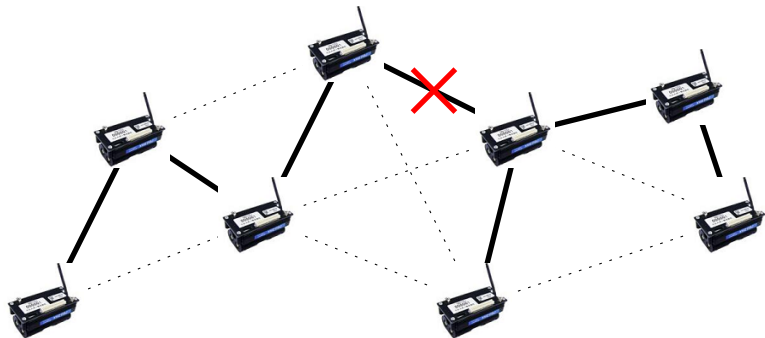
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：リンク故障



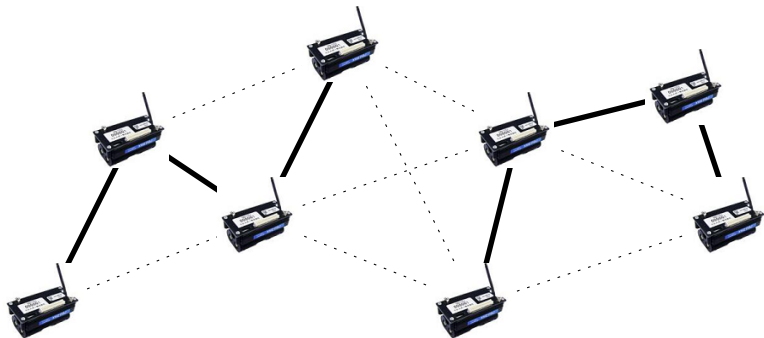
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：リンク故障



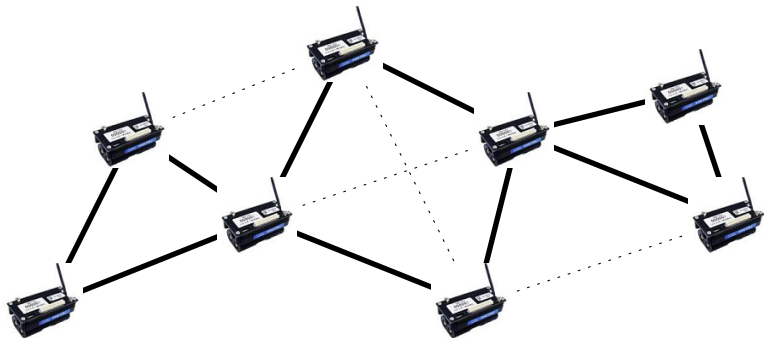
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：リンク故障



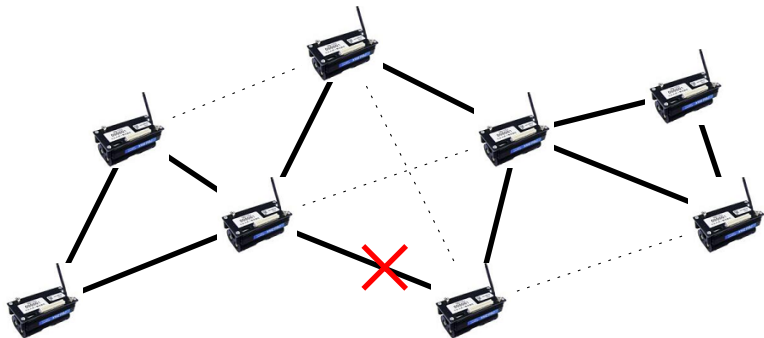
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：リンク故障



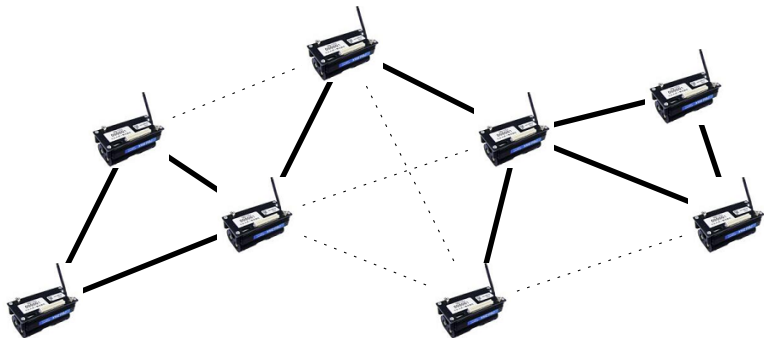
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：リンク故障



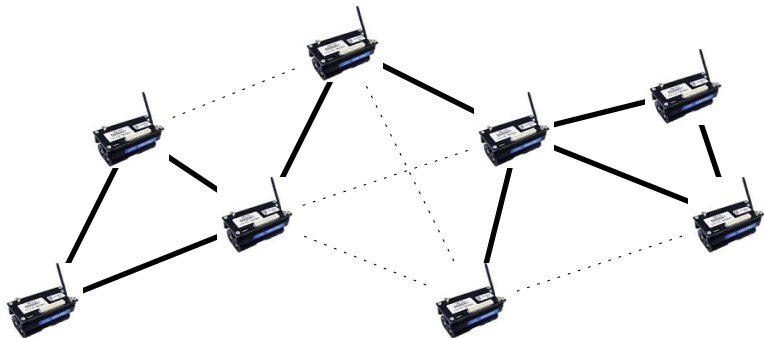
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：リンク故障



<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

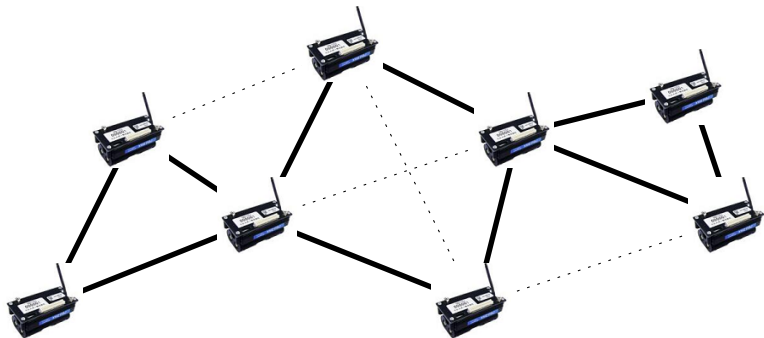
センサネットワークにおける通信：リンク故障



<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

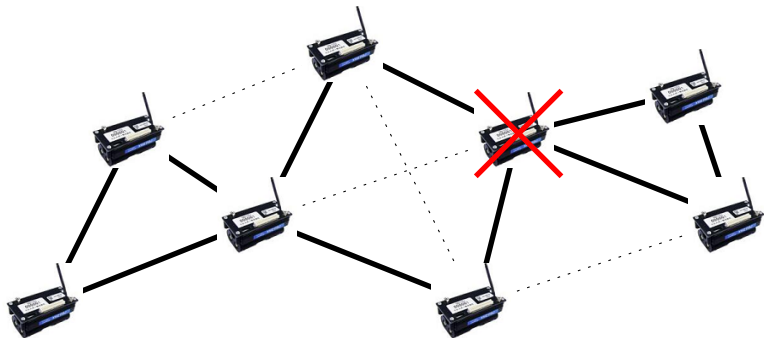
⇒ 辺連結度：リンク故障への耐性を表す数

センサネットワークにおける通信：ノード故障



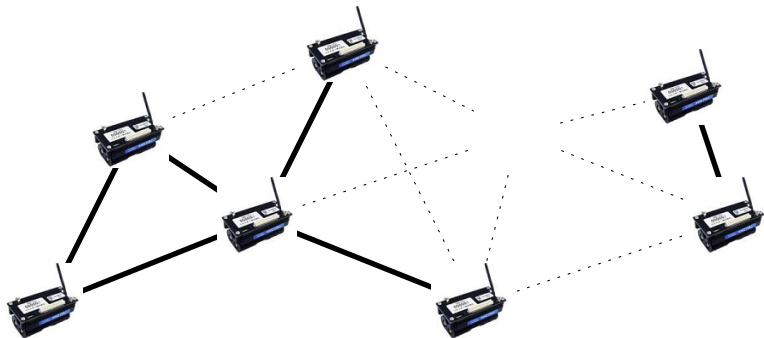
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：ノード故障



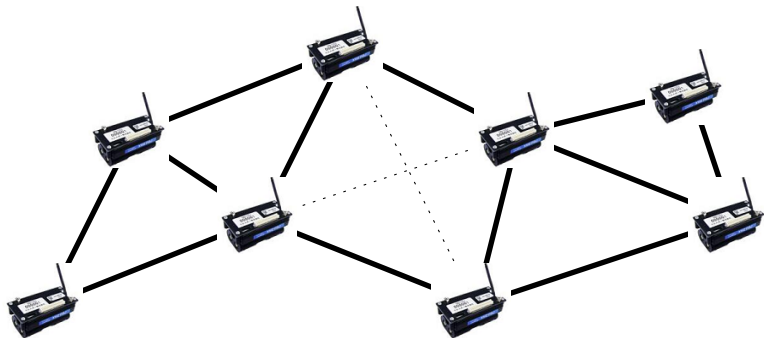
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：ノード故障



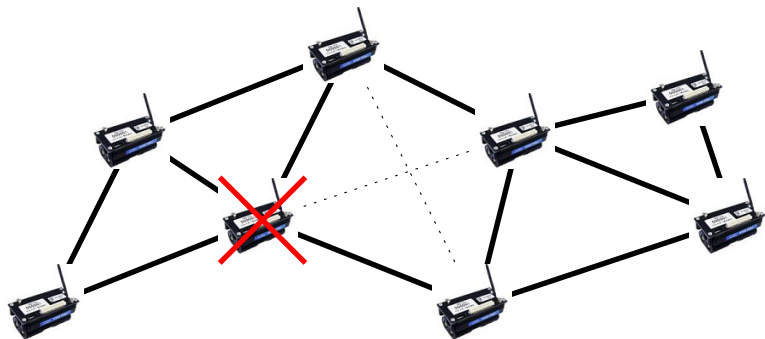
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：ノード故障



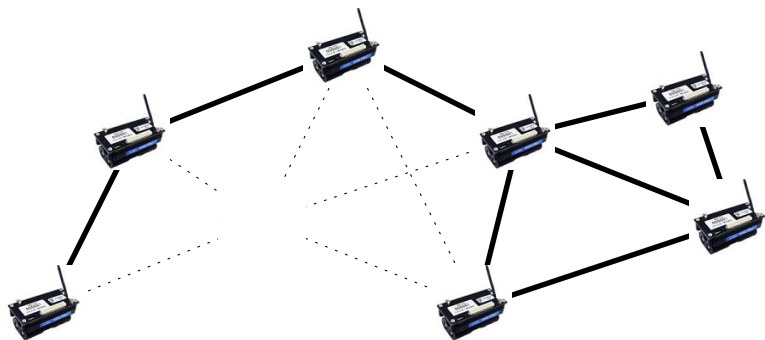
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：ノード故障



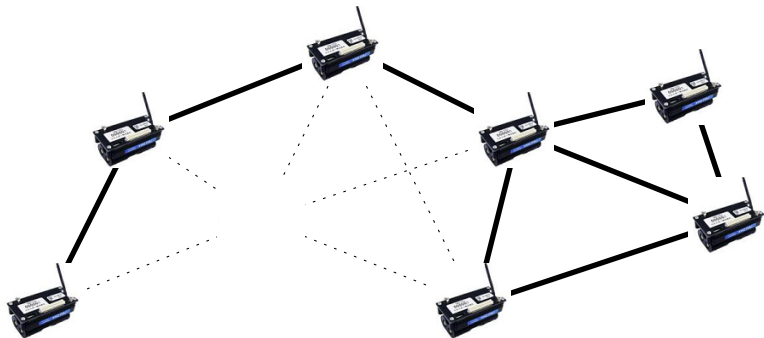
<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：ノード故障



<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

センサネットワークにおける通信：ノード故障



<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

⇒ 点連結度：ノード故障への耐性を表す数

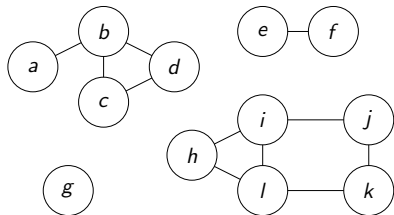
グラフの連結性 (復習)

無向グラフ $G = (V, E)$

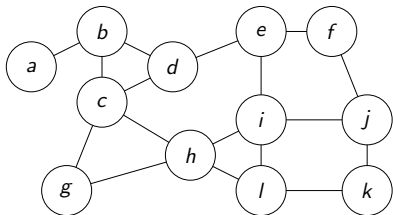
グラフが連結であるとは？

G が**連結**であるとは、
任意の2頂点 $u, v \in V$ に対して、 u から v へ至る道が存在すること

連結ではないグラフは**非連結**と呼ばれる



非連結グラフ



連結グラフ

注：「グラフが連結している」とは言わない

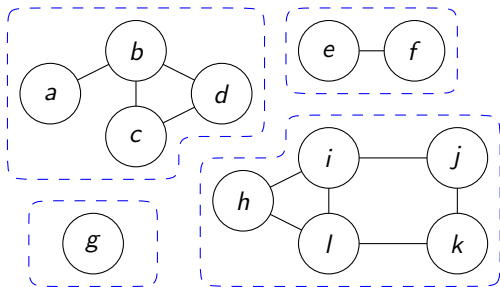
グラフの連結成分 (復習)

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの連結成分とは？

G の連結成分とは、 G の極大連結部分グラフのこと

(「極大」とは、グラフの包含関係を半順序であるとみなしたときの「極大」)



連結成分の数 = 4

グラフの切断辺 (復習)

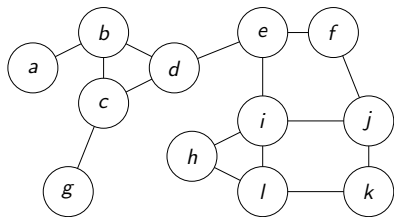
無向グラフ $G = (V, E)$, 辺 $e \in E$

グラフの切断辺とは？

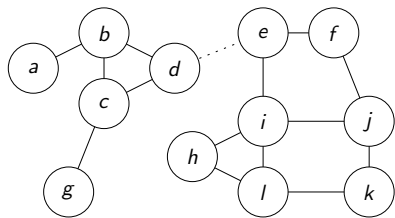
e が G の切断辺であるとは,
 G から e を除去したグラフ $G - e$ に対して次が成り立つこと

$G - e$ の連結成分の数 $>$ G の連結成分の数

$\{d, e\}$ は G の切断辺



G



$G - \{d, e\}$

グラフの切断点 (復習)

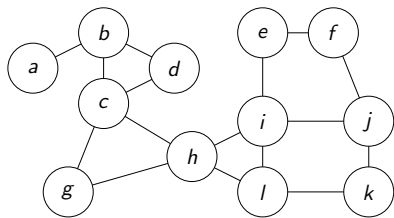
無向グラフ $G = (V, E)$, 頂点 $v \in V$

グラフの切断点とは？

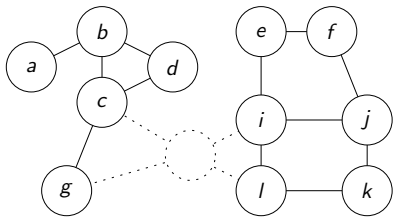
v が G の切断点であるとは,
 G から v を除去したグラフ $G - v$ に対して次が成り立つこと

$G - v$ の連結成分の数 $>$ G の連結成分の数

h は G の切断点 (「 v を除去」とは、 v と v に接続する辺すべてを除去すること)



G



$G - h$

目次

- ① グラフの連結性と連結度
 - 無向グラフの辺連結度
 - 無向グラフの点連結度
 - 有向グラフの弧連結度・点連結度
- ② 連結度と互いに素な道の双対性：Menger の定理
 - 弧連結度
 - 点連結度
- ③ 今日のまとめ

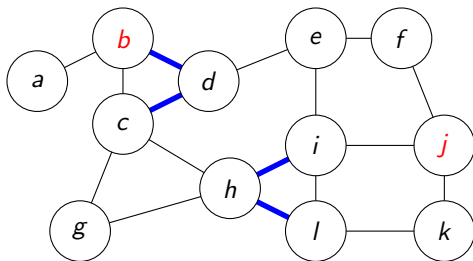
非連結化集合：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$

非連結化集合とは？

辺部分集合 $F \subseteq E$ が G の s, t **非連結化集合** であるとは,
 $G - F$ において, s から t への道が存在しないこと

青い辺から成る集合は b, j 非連結化集合



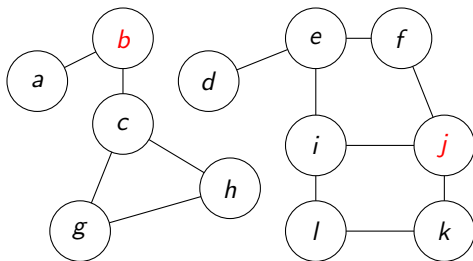
非連結化集合：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$

非連結化集合とは？

辺部分集合 $F \subseteq E$ が G の s, t **非連結化集合** であるとは,
 $G - F$ において, s から t への道が存在しないこと

青い辺から成る集合は b, j 非連結化集合



辺連結度：無向グラフ

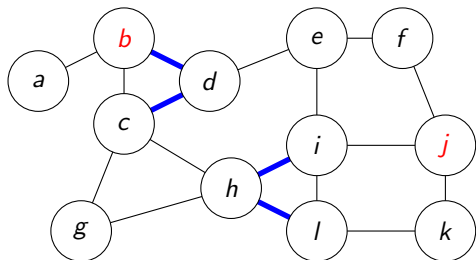
無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$

辺連結度とは？

G の s, t 辺連結度とは,
 G の s, t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda_{s,t}(G)$ で表す

($\lambda_G(s, t)$, $\lambda(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\lambda_{b,j}(G) \leq 4$$

これは局所的, 部分的なリンク故障耐性を表す

辺連結度：無向グラフ

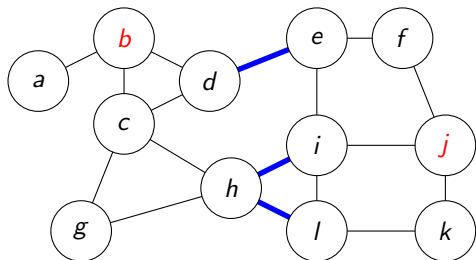
無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$

辺連結度とは？

G の s, t 辺連結度とは,
 G の s, t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda_{s,t}(G)$ で表す

($\lambda_G(s, t)$, $\lambda(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\lambda_{b,j}(G) \leq 3$$

これは局所的, 部分的なリンク故障耐性を表す

辺連結度：無向グラフ

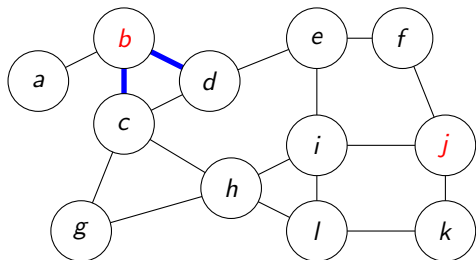
無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$

辺連結度とは？

G の s, t 辺連結度とは,
 G の s, t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda_{s,t}(G)$ で表す

($\lambda_G(s, t)$, $\lambda(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\lambda_{b,j}(G) = 2$$

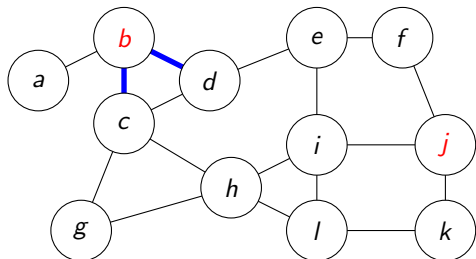
これは局所的, 部分的なリンク故障耐性を表す

大域辺連結度：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

大域辺連結度とは？

G の大域辺連結度とは、 $\lambda(G) = \min\{\lambda_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t\}$
つまり、 s, t 辺連結度の (s, t の選び方に関する) 最小値



$$\lambda(G) \leq \lambda_{b,j}(G) = 2$$

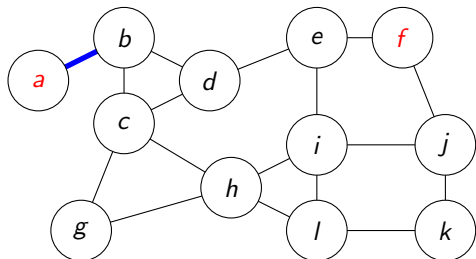
これは大域的、全体的なリンク故障耐性を表す

大域辺連結度：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

大域辺連結度とは？

G の大域辺連結度とは、 $\lambda(G) = \min\{\lambda_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t\}$
つまり、 s, t 辺連結度の (s, t の選び方に関する) 最小値



$$\lambda(G) = \lambda_{a,f}(G) = 1$$

これは大域的、全体的なリンク故障耐性を表す

辺連結性：無向グラフ

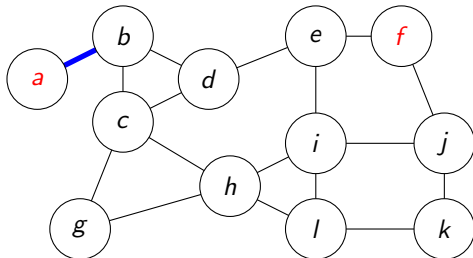
無向グラフ $G = (V, E)$, 自然数 $k \geq 0$

辺連結性とは？

G が k 辺連結であるとは, $\lambda(G) \geq k$ であること

つまり, 要素数 $k-1$ 以下の辺部分集合を除去して G を非連結にできない

このグラフは 1 辺連結であるが, 2 辺連結ではない



注： G が連結 $\Leftrightarrow G$ が 1 辺連結

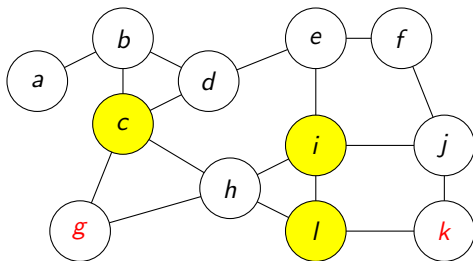
分離集合：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$ (ただし, $\{s, t\} \notin E$)

分離集合とは？

頂点集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の s, t 分離集合であるとは,
 $G - S$ において, s から t への道が存在しないこと

黄色の頂点から成る集合は g, k 分離集合



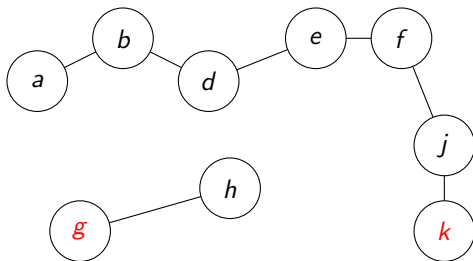
分離集合：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$ (ただし, $\{s, t\} \notin E$)

分離集合とは？

頂点集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の s, t 分離集合であるとは,
 $G - S$ において, s から t への道が存在しないこと

黄色の頂点から成る集合は g, k 分離集合



点連結度：無向グラフ

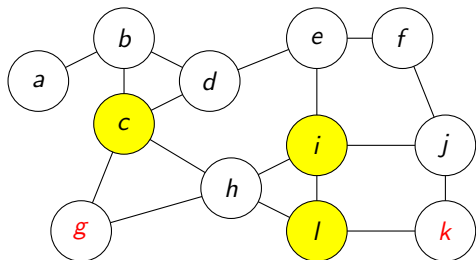
無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$ (ただし, $\{s, t\} \notin E$)

点連結度とは？

G の s, t 点連結度とは,
 G の s, t 分離集合の要素数の最小値

$\kappa_{s,t}(G)$ で表す

($\kappa_G(s, t)$, $\kappa(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\kappa_{g,k}(G) \leq 3$$

これは局所的、部分的なノード故障耐性を表す

点連結度：無向グラフ

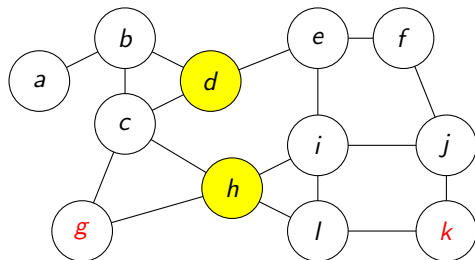
無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$ (ただし, $\{s, t\} \notin E$)

点連結度とは？

G の s, t 点連結度とは,
 G の s, t 分離集合の要素数の最小値

$\kappa_{s,t}(G)$ で表す

($\kappa_G(s, t)$, $\kappa(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\kappa_{g,k}(G) = 2$$

これは局所的, 部分的なノード故障耐性を表す

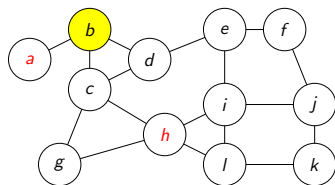
大域点連結度：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

大域点連結度とは？

 G の大域点連結度とは、 G が完全グラフではない場合

$$\kappa(G) = \min\{\kappa_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t, \{s, t\} \notin E\}$$

つまり、 s, t 点連結度の (s, t の選び方に関する) 最小値頂点数 n の完全グラフ K_n に対して、 $\kappa(K_n) = n - 1$ と定義する

これは大域的、全体的なノード故障耐性を表す

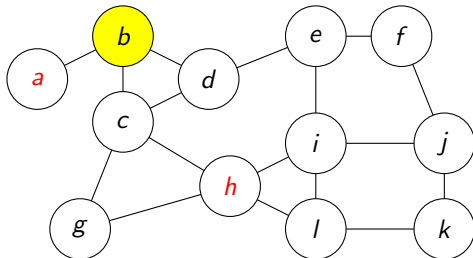
点連結性：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 自然数 $k \geq 0$

点連結性とは？

G が k 点連結であるとは、 $\kappa(G) \geq k$ であること
つまり、要素数 $k-1$ 以下の頂点部分集合を除去しても G は連結

このグラフは 1 点連結であるが、2 点連結ではない



注： G が連結 $\Leftrightarrow G$ が 1 点連結

用語の対応：無向グラフ

辺	頂点
s, t 非連結化集合	s, t 分離集合
s, t 辺連結度	s, t 点連結度
$\lambda_{s,t}(G)$	$\kappa_{s,t}(G)$
大域辺連結度	大域点連結度
$\lambda(G)$	$\kappa(G)$
k 辺連結	k 点連結

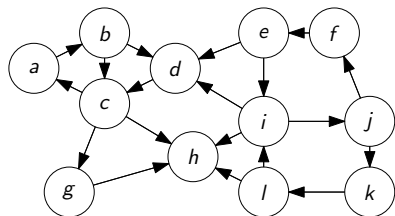
- ▶ s, t 非連結化集合を、 s, t 辺カットと呼ぶことがある
- ▶ s, t 分離集合を、 s, t 点カットと呼ぶことがある

有向グラフの強連結性

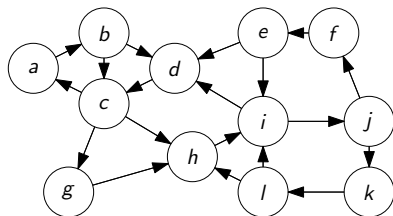
有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフが強連結であるとは？

G が強連結であるとは、
 任意の2頂点 $u, v \in V$ に対して、 u から v へ至る有向道が存在すること



強連結でない



強連結である

注：「グラフが強連結している」とは言わない

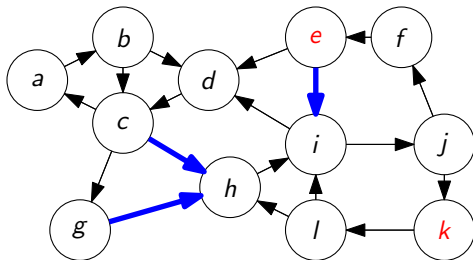
非連結化集合：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

非連結化集合とは？

弧部分集合 $F \subseteq A$ が G の s, t 非連結化集合であるとは,
 $G - F$ において, s から t への有向道が存在しないこと

青い弧から成る集合は e, k 非連結化集合



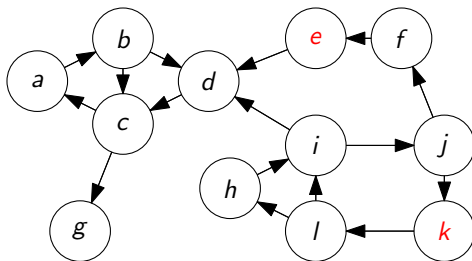
非連結化集合：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

非連結化集合とは？

弧部分集合 $F \subseteq A$ が G の s, t 非連結化集合であるとは,
 $G - F$ において, s から t への有向道が存在しないこと

青い弧から成る集合は e, k 非連結化集合



弧連結度：有向グラフ

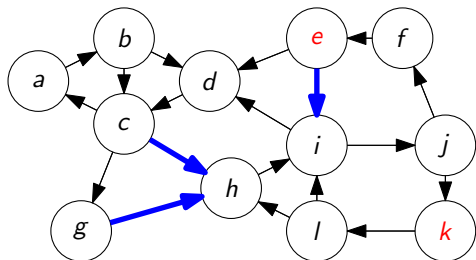
有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

弧連結度とは？

G の s, t 弧連結度とは,
 G の s, t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda_{s,t}(G)$ で表す

($\lambda_G(s, t)$, $\lambda(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\lambda_{e,k}(G) \leq 3$$

これは局所的, 部分的なリンク故障耐性を表す

弧連結度：有向グラフ

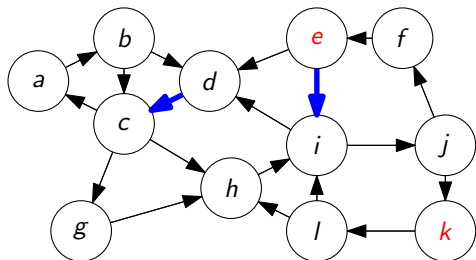
有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

弧連結度とは？

G の s, t 弧連結度とは,
 G の s, t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda_{s,t}(G)$ で表す

($\lambda_G(s, t)$, $\lambda(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\lambda_{e,k}(G) \leq 2$$

これは局所的, 部分的なリンク故障耐性を表す

弧連結度：有向グラフ

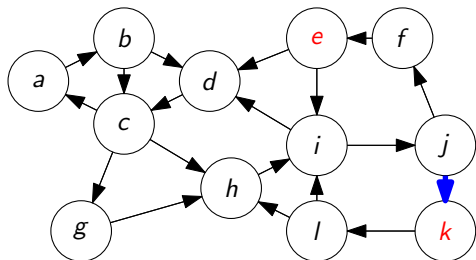
有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

弧連結度とは？

G の s, t 弧連結度とは,
 G の s, t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda_{s,t}(G)$ で表す

($\lambda_G(s, t)$, $\lambda(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\lambda_{e,k}(G) = 1$$

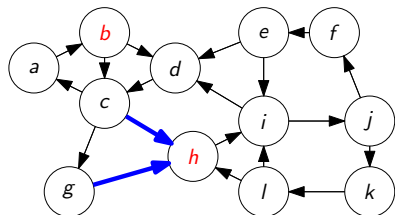
これは局所的, 部分的なリンク故障耐性を表す

弧連結度：有向グラフ (注意)

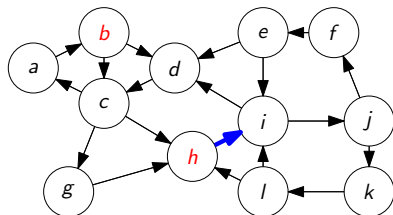
有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$

注意

$\lambda_{s,t}(G) \neq \lambda_{t,s}(G)$ かもしれない



$$\lambda_{b,h}(G) = 2$$



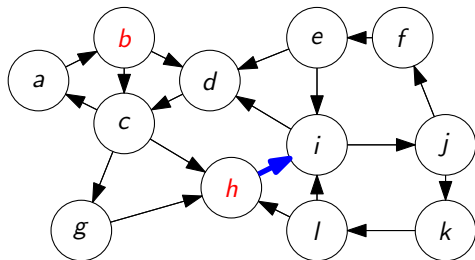
$$\lambda_{h,b}(G) = 1$$

大域弧連結度：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$

大域弧連結度とは？

G の大域弧連結度は、 $\lambda(G) = \min\{\lambda_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t\}$
つまり、 s, t 弧連結度の (s, t の選び方に関する) 最小値



$$\lambda(G) = 1$$

これは大域的、全体的なリンク故障耐性を表す

弧連結性：有向グラフ

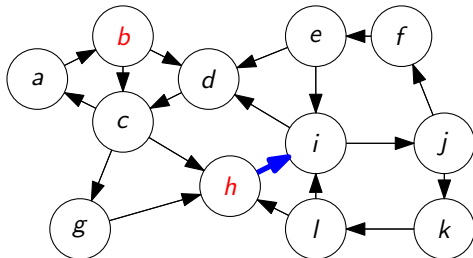
有向グラフ $G = (V, A)$, 自然数 $k \geq 0$

弧連結性とは？

G が k 弧連結であるとは, $\lambda(G) \geq k$ であること

つまり, 要素数 $k-1$ 以下の弧部分集合をどう除去しても G は強連結

このグラフは 1 弧連結であるが, 2 弧連結ではない



注： G が強連結 $\Leftrightarrow G$ が 1 弧連結

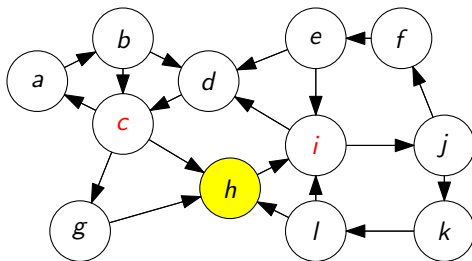
分離集合：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$ (ただし, $(s, t) \notin A$)

分離集合とは？

頂点集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の s, t 分離集合であるとは,
 $G - S$ において, s から t への有向道が存在しないこと

黄色の頂点から成る集合は c, i 分離集合



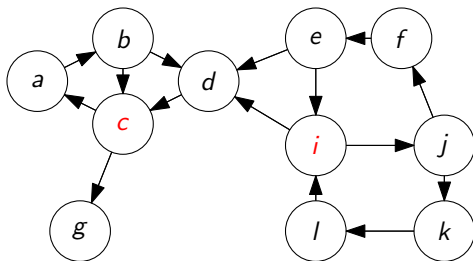
分離集合：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$ (ただし, $(s, t) \notin A$)

分離集合とは？

頂点集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の s, t 分離集合であるとは,
 $G - S$ において, s から t への有向道が存在しないこと

黄色の頂点から成る集合は c, i 分離集合



点連結度：有向グラフ

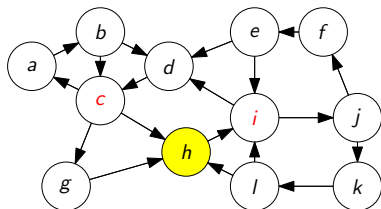
有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし, $(s, t) \notin A$)

点連結度とは？

G の s, t 点連結度とは,
 G の s, t 分離集合の要素数の最小値

$\kappa_{s,t}(G)$ で表す

($\kappa_G(s, t)$, $\kappa(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\kappa_{c,i}(G) = 1$$

これは局所的, 部分的なノード故障耐性を表す

注: $\kappa_{s,t}(G) \neq \kappa_{t,s}(G)$ かもしれない

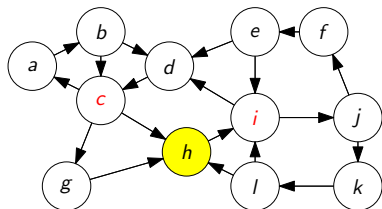
大域点連結度：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$

大域点連結度とは？

 G の大域点連結度とは、ある $u, v \in V$ に対して $(u, v) \notin A$ であるとき、

$$\kappa(G) = \min\{\kappa_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t, (s, t) \notin A\}$$

つまり、 s, t 点連結度の (s, t) の選び方に関する) 最小値任意の $u, v \in V$ ($u \neq v$) に対して $(u, v) \in A$ であるとき、 $\kappa(G) = |V| - 1$ と定義

$$\kappa(G) = 1$$

これは大域的、全体的なノード故障耐性を表す

点連結性：有向グラフ

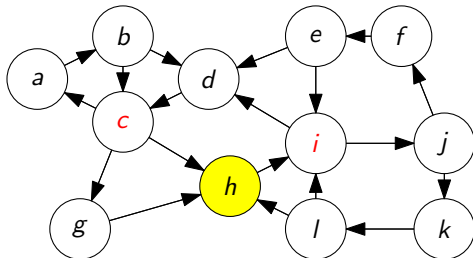
有向グラフ $G = (V, A)$, 自然数 $k \geq 0$

点連結性とは？

G が k 点連結であるとは, $\kappa(G) \geq k$ であること

つまり, 要素数 $k-1$ 以下の頂点部分集合をどう除去しても G は強連結

このグラフは 1 点連結であるが, 2 点連結ではない



注： G が強連結 $\Leftrightarrow G$ が 1 点連結

用語の対応：有向グラフ

弧	頂点
s, t 非連結化集合	s, t 分離集合
s, t 弧連結度	s, t 点連結度
$\lambda_{s,t}(G)$	$\kappa_{s,t}(G)$
大域弧連結度	大域点連結度
$\lambda(G)$	$\kappa(G)$
k 弧連結	k 点連結

- ▶ s, t 非連結化集合を、 s, t 弧カットと呼ぶことがある
- ▶ s, t 分離集合を、 s, t 点カットと呼ぶことがある

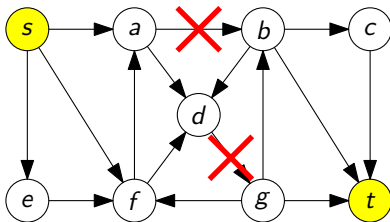
目次

- ① グラフの連結性と連結度
 - 無向グラフの辺連結度
 - 無向グラフの点連結度
 - 有向グラフの弧連結度・点連結度
- ② 連結度と互いに素な道の双対性：Menger の定理
 - 弧連結度
 - 点連結度
- ③ 今日のまとめ

s, t 弧連結度をどのように計算するか？

目標

s, t 弧連結度の計算を最大流問題としてモデル化する



最大流問題としてのモデル化 : 着眼点

観察

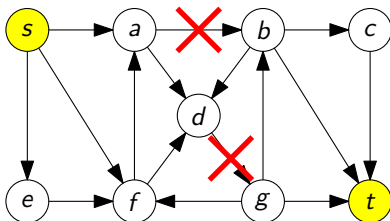
弧を除去すると s から t へ行けなくなる

⇒ 弧を除去した後に, s からたどり着ける部分は G の s, t カット

⇒ 除去した弧の数 = その s, t カットから出る弧の数

⇒ 全ての弧容量 = 1 ならば,
 s, t カットから出る弧の数 = s, t カットの容量

∴ **最小 s, t カットの容量** から弧連結度が分かる



最大流問題としてのモデル化：着眼点

観察

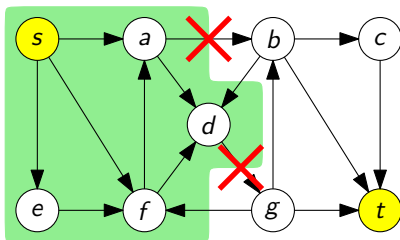
弧を除去すると s から t へ行けなくなる

⇒ 弧を除去した後に、 s からたどり着ける部分は G の s, t カット

⇒ 除去した弧の数 = その s, t カットから出る弧の数

⇒ 全ての弧容量 = 1 ならば、
 s, t カットから出る弧の数 = s, t カットの容量

∴ **最小 s, t カットの容量** から弧連結度が分かる



最大流問題としてのモデル化 : 着眼点

観察

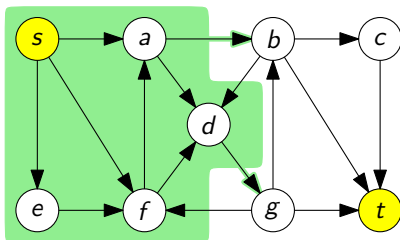
弧を除去すると s から t へ行けなくなる

⇒ 弧を除去した後に, s からたどり着ける部分は G の s, t カット

⇒ 除去した弧の数 = その s, t カットから出る弧の数

⇒ 全ての弧容量 = 1 ならば,
 s, t カットから出る弧の数 = s, t カットの容量

∴ **最小 s, t カットの容量** から弧連結度が分かる



最大流問題としてのモデル化：着眼点

観察

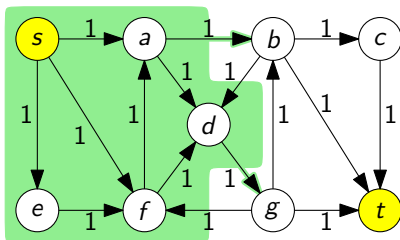
弧を除去すると s から t へ行けなくなる

⇒ 弧を除去した後に、 s からたどり着ける部分は G の s, t カット

⇒ 除去した弧の数 = その s, t カットから出る弧の数

⇒ 全ての弧容量 = 1 ならば、
 s, t カットから出る弧の数 = s, t カットの容量

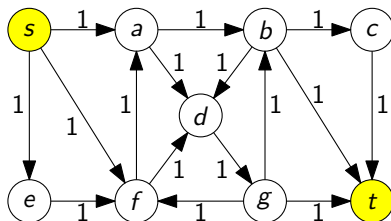
∴ **最小 s, t カットの容量** から弧連結度が分かる

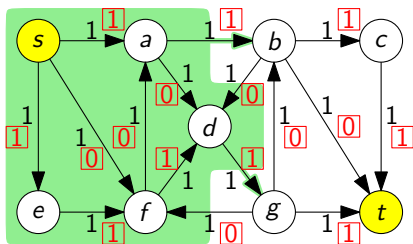


最大流問題としてのモデル化

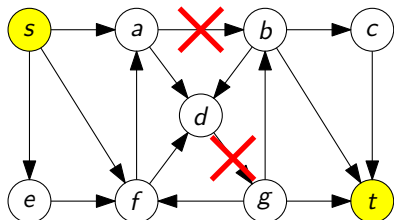
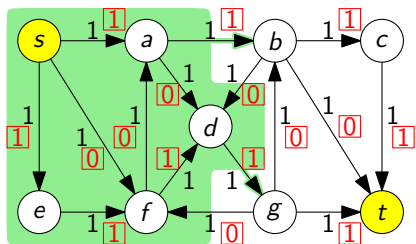
モデル化

- ▶ グラフ : そのまま
- ▶ 容量 : すべての弧の容量 = 1



最大流問題: 最大流と最小 s, t カット

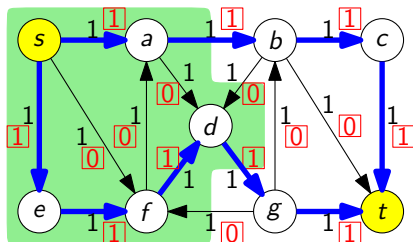
解いた結果を再解釈 (1)



- ▶ s, t カットから出る弧が弧連結度を与える
- ▶ 流れは何に対応するか？

整数流定理と容量の決め方から、各弧上を流れている量は 0 か 1

解いた結果を再解釈 (2)

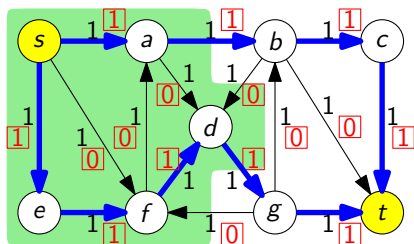


- ▶ 1 だけ流れている弧だけ見てみると、道が構成できる
- ▶ 道の数 = 最大流の値 = 弧連結度
- ▶ \therefore 流れが道に対応している
- ▶ 注: これらの道は同じ弧を共有しない

「流れ」という比喻

流れ	——	道
たくさん流す	——	道を多く選ぶ

Menger の定理



最大流最小カット定理より,
 任意の有向グラフ $G = (V, A)$, 任意の $s, t \in V$ に対して

Menger の定理

s から t へ至る道で
 弧を共有しないものの最大数 = s, t 弧連結度

Karl Menger



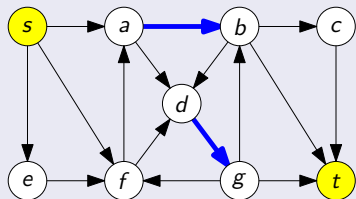
Karl Menger
カール・メンガー
(1902–1985)

http://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Menger

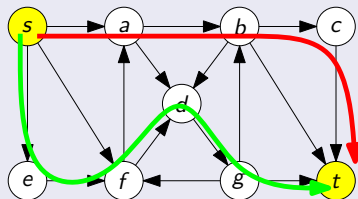
双対性の利用法

次のグラフの s, t 弧連結度は何か？

上界

 s, t 弧連結度 ≤ 2

下界

 s, t 弧連結度 ≥ 2 したがって, s, t 弧連結度 $= 2$

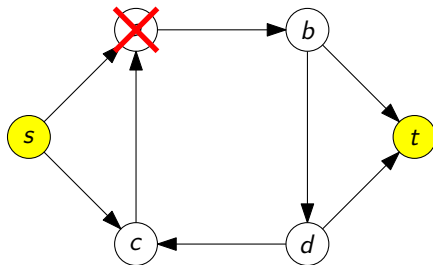
目次

- ① グラフの連結性と連結度
 - 無向グラフの辺連結度
 - 無向グラフの点連結度
 - 有向グラフの弧連結度・点連結度
- ② 連結度と互いに素な道の双対性：Menger の定理
 - 弧連結度
 - 点連結度
- ③ 今日のまとめ

s, t 点連結度をどのように計算するか？

目標

s, t 点連結度の計算を最大流問題としてモデル化する



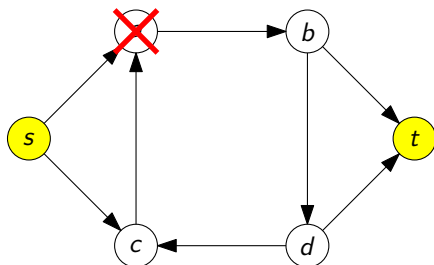
最大流問題としてのモデル化 : 着眼点

観察

弧連結度るときと同様に, s, t カットを見たい

▶ しかし, カットを見るときに壊すのは弧

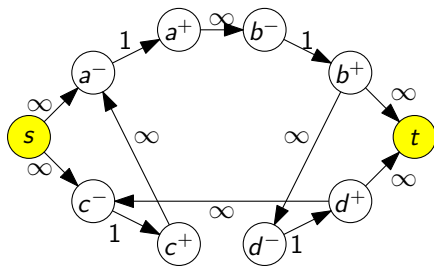
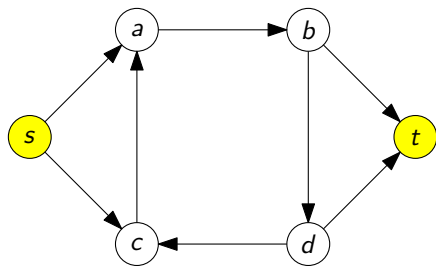
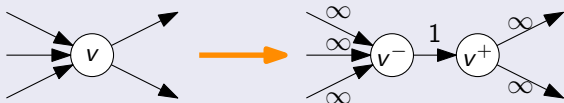
∴ 頂点の問題を弧の問題に変換するため, グラフに操作を施す



最大流問題としてのモデル化: 操作

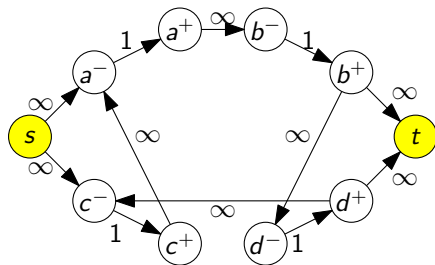
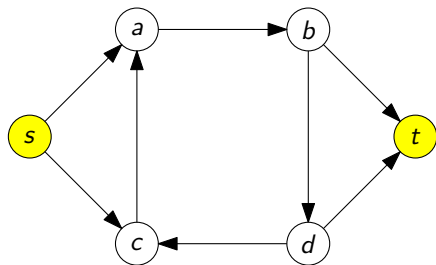
行う操作

各頂点に対して次の操作を行い、弧の容量も次のように定める



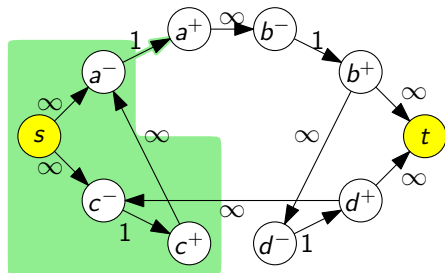
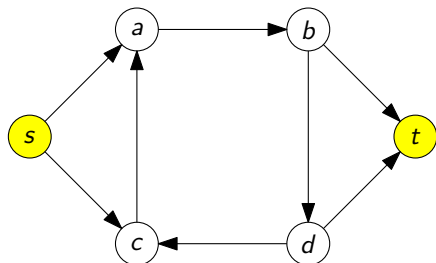
最大流問題としてのモデル化 : 操作に対する直感

- ▶ 最小 s, t カットから容量 ∞ の弧が出ていけない
- ∴ 最小 s, t カットから出る弧の容量はすべて 1
- ▶ そのような弧はもとのグラフにおける頂点に対応
- ▶ 対応する頂点を取り除けば, s から t に行けなくなる



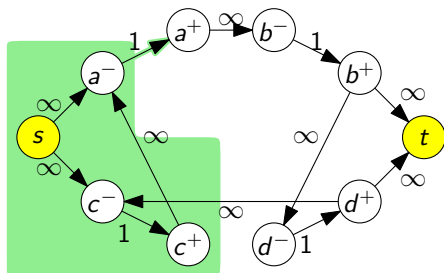
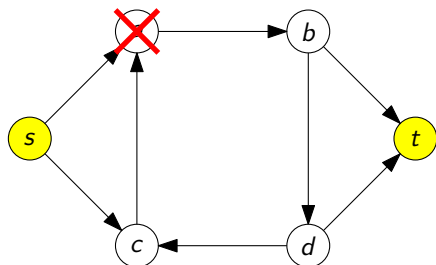
最大流問題としてのモデル化 : 操作に対する直感

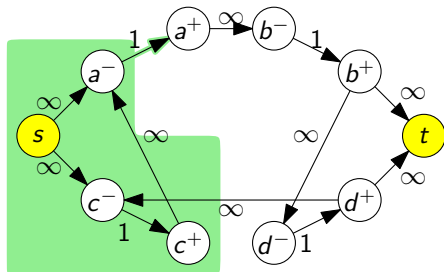
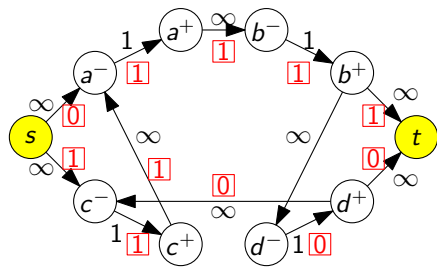
- ▶ 最小 s, t カットから容量 ∞ の弧が出ていけない
- ∴ 最小 s, t カットから出る弧の容量はすべて 1
- ▶ そのような弧はもとのグラフにおける頂点に対応
- ▶ 対応する頂点を取り除けば, s から t に行けなくなる



最大流問題としてのモデル化 : 操作に対する直感

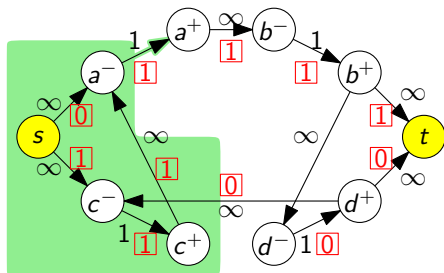
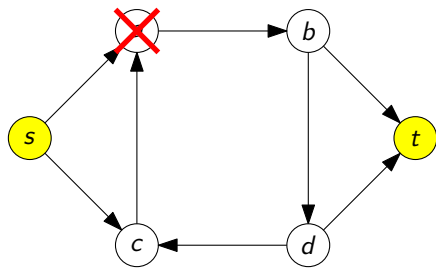
- ▶ 最小 s, t カットから容量 ∞ の弧が出ていけない
- ∴ 最小 s, t カットから出る弧の容量はすべて 1
- ▶ そのような弧はもとのグラフにおける頂点に対応
- ▶ 対応する頂点を取り除けば, s から t に行けなくなる



最大流と最小 s, t カット

最大流の値 = 1 = 最小 s, t カットの容量

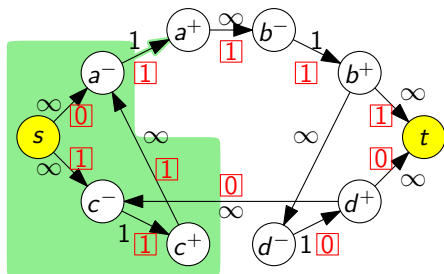
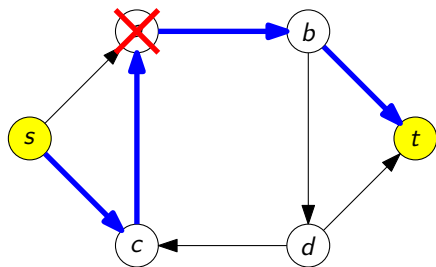
解いた結果を再解釈 (1)



- ▶ カットから出る弧に対応する頂点が点連結度を与える
- ▶ 流れは何に対応するか？

整数流定理と容量の決め方から、各弧上を流れている量は 0 か 1

解いた結果を再解釈 (2)

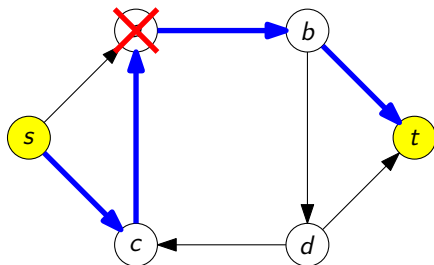


- ▶ 1 だけ流れている弧に対応する部分は道になる
- ▶ 道の数 = 最大流の値 = 点連結度
- ▶ \therefore 流れが道に対応している
- ▶ 注: これらの道は s, t 以外の頂点を共有しない

「流れ」という比喻

流れ	——	道
たくさん流す	——	道を多く選ぶ

Menger の定理 (点連結度版)



最大流最小カット定理より,
 任意の有向グラフ $G = (V, A)$, 任意の $s, t \in V$ (ただし, $(s, t) \notin A$) に
 対して

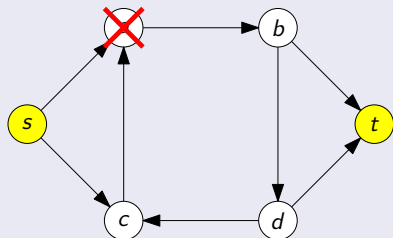
Menger の定理

s から t へ至る道で
 頂点を s, t 以外共有しないものの最大数 $= s, t$ 点連結度

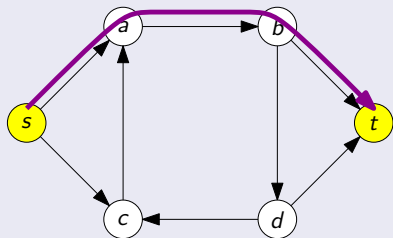
双対性の利用法

次のグラフの s, t 点連結度は何か？

上界

 s, t 点連結度 ≤ 1

下界

 s, t 点連結度 ≥ 1 したがって、 s, t 点連結度 $= 1$

補足 : 無向グラフにおける辺連結度と点連結度

Menger の定理は無向グラフでも成立する

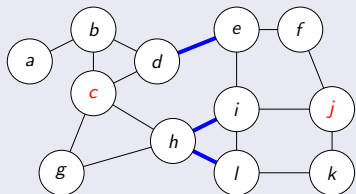
Menger の定理 (無向グラフ版)

- ▶ 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と任意の $s, t \in V$ に対して
 s から t へ至る道で
 辺を共有しないものの最大数 $= s, t$ 辺連結度
- ▶ 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と
 任意の $s, t \in V$ (ただし, $\{s, t\} \notin E$) に対して
 s から t へ至る道で
 s, t 以外に頂点を共有しないものの最大数 $= s, t$ 点連結度

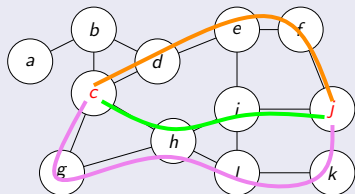
証明は省略 (弱双対性は演習問題 (数え上げによる証明))

双対性の利用法

上界

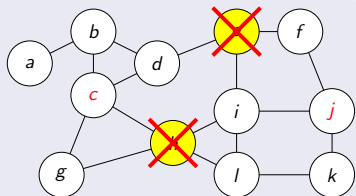
 c, j 辺連結度 ≤ 3

下界

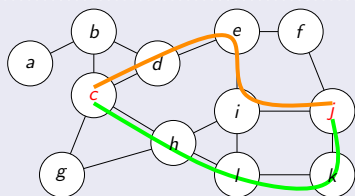
 c, j 辺連結度 ≥ 3 したがって, c, j 辺連結度 $= 3$

双対性の利用法

上界


 c, j 点連結度 ≤ 2

下界


 c, j 点連結度 ≥ 2

したがって, c, j 点連結度 $= 2$

目次

- ① グラフの連結性と連結度
 - 無向グラフの辺連結度
 - 無向グラフの点連結度
 - 有向グラフの弧連結度・点連結度
- ② 連結度と互いに素な道の双対性：Menger の定理
 - 弧連結度
 - 点連結度
- ③ 今日のまとめ

今日のまとめ

今日の目標

- ▶ グラフの連結性に関する概念を理解し、正しく使えるようになる
- ▶ 連結度に関する Menger の定理を最大流と関係づけられるようになる

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← **重要**
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

目次

- ① グラフの連結性と連結度
 - 無向グラフの辺連結度
 - 無向グラフの点連結度
 - 有向グラフの弧連結度・点連結度
- ② 連結度と互いに素な道の双対性：Menger の定理
 - 弧連結度
 - 点連結度
- ③ 今日のまとめ