

グラフとネットワーク 第7回  
最大流：モデル化 (1)

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017年5月22日

最終更新：2017年5月18日 16:56

## スケジュール 前半 (予定)

- |   |              |        |
|---|--------------|--------|
| 1 | グラフの定義と次数：数理 | (4/10) |
| 2 | 道と閉路：数理      | (4/17) |
| 3 | 木：数理         | (4/24) |
| 4 | マッチング：数理     | (5/1)  |
| 5 | マッチング：モデル化   | (5/8)  |
| 6 | 最大流：数理       | (5/15) |
| 7 | 最大流：モデル化 (1) | (5/22) |
| 8 | 最大流：モデル化 (2) | (5/29) |
| 9 | 連結性：数理とモデル化  | (6/5)  |
|   | ● 中間試験       | (6/12) |

注意：予定の変更もありうる

## スケジュール 後半 (予定)

- |    |               |        |
|----|---------------|--------|
| 10 | 彩色：数理         | (6/19) |
| 11 | 彩色：モデル化       | (6/26) |
| *  | 休講 (出張)       | (7/3)  |
| 12 | 平面グラフ：数理      | (7/10) |
| *  | 休講 (海の日)      | (7/17) |
| 13 | 平面グラフ：モデル化    | (7/24) |
| 14 | 予備日 (たぶんやらない) | (7/31) |
| ●  | 期末試験          | (8/7)  |

注意：予定の変更もありうる

## 主題

離散最適化の入門として、次を概説する

- ▶ グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- ▶ アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

## 達成目標

以下の4項目をすべて達成すること

- 1 グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
- 2 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し、数理モデルを構築できる
- 3 アルゴリズム的解法の背後にある数理、特に、最小最大定理の重要性を説明でき、それを用いて最適性の証明ができる
- 4 グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

## 今日の目標

最大流問題を用いて様々な問題がモデル化できるようになる

- ▶ 割当問題
- ▶ リーグ戦における優勝可能性判定問題

# 目次

- ① 割当問題
- ② リーグ戦における優勝可能性判定問題
- ③ 今日のまとめ

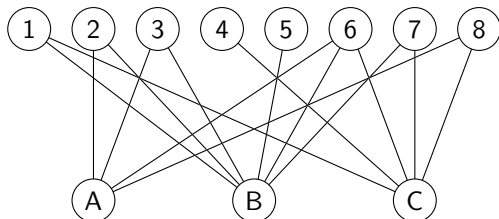
## 例：オアシスでの救護

- ▶ 砂漠で遭難した人々をオアシスで救護したい
- ▶ 遭難者は携帯電話によって決められた場所まで歩くよう誘導できる
- ▶ 遭難者は8人、オアシスは3か所
- ▶ 各オアシスに対して、各遭難者までの距離と救護可能人数は次の通り
- ▶ **[問い]** どの遭難者の歩く距離も3km未満として、全員救護できるか？
- ▶ 可能ならば、どの遭難者をどのオアシスに歩かせればよいか？

距離 (km)	遭難者								救護可能人数 (人)
	1	2	3	4	5	6	7	8	
オアシス A	3	2	1	3	4	2	4	1	3
オアシス B	1	1	1	5	1	1	2	3	3
オアシス C	2	4	4	2	4	2	1	2	4

## グラフを使って状況整理

- ▶ 上側：遭難者，下側：オアシス
- ▶ 辺：距離が 3km 未満のオアシスと遭難者の間



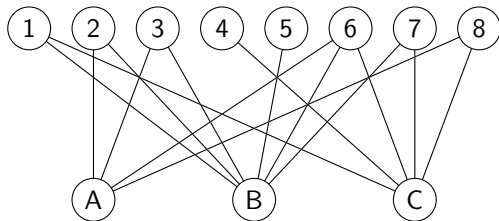
距離 (km)	遭難者								救護可能人数 (人)
	1	2	3	4	5	6	7	8	
オアシス A	3	2	1	3	4	2	4	1	3
オアシス B	1	1	1	5	1	1	2	3	3
オアシス C	2	4	4	2	4	2	1	2	4



## ここからの目標

## ここからの目標

この問題を最大流問題としてモデル化する



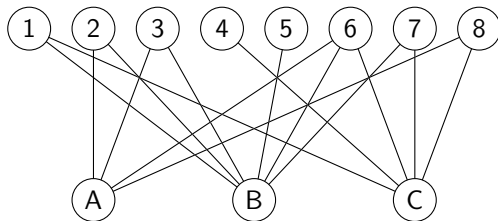
最大救護可能人数を計算する，という問題として捉える

## 最大流問題としてのモデル化：着眼点

アイデア：「割り当てる」ことを「流す」ことに対応させる

考えるべきこと

- ▶  $s$  と  $t$  はどこにあるのか？
- ▶ 弧の向き，容量はどうするのか？

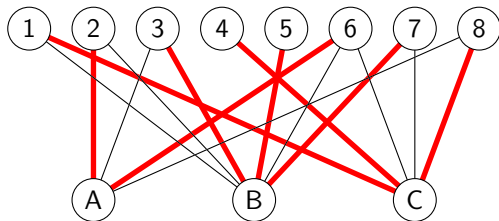


## 最大流問題としてのモデル化：着眼点

アイデア：「割り当てる」ことを「流す」ことに対応させる

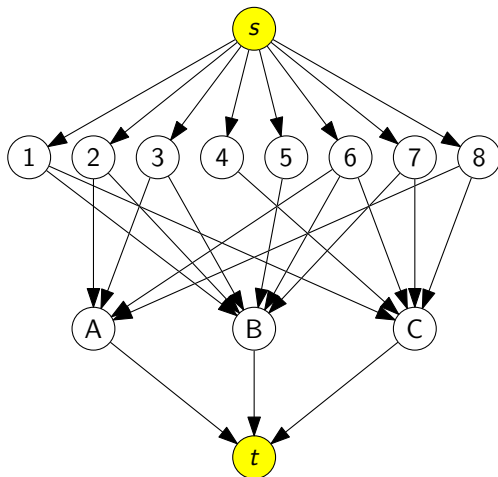
考えるべきこと

- ▶  $s$  と  $t$  はどこにあるのか？
- ▶ 弧の向き，容量はどうするのか？



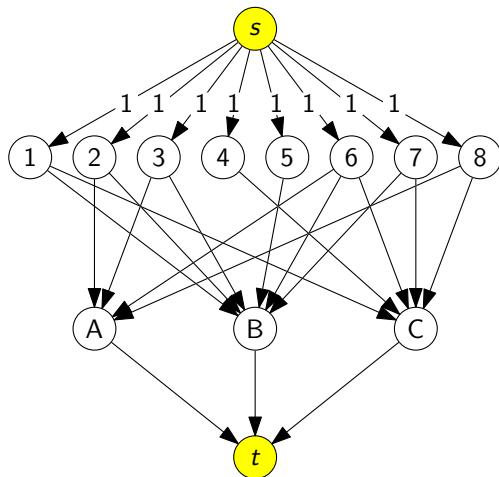
## 最大流問題としてのモデル化

$s$  と  $t$  を新しい頂点として用意して、このように弧を作る



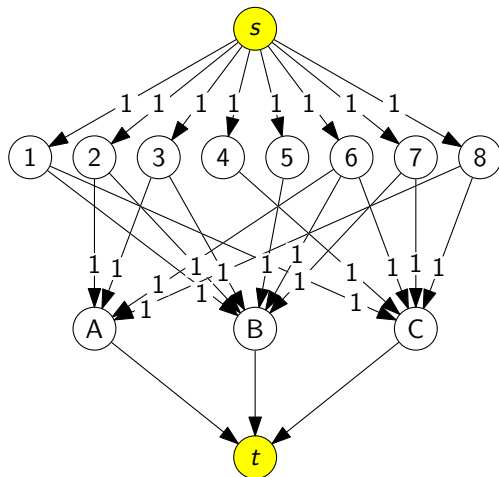
## 最大流問題としてのモデル化

$s$  と遭難者との間の弧容量はどれも 1



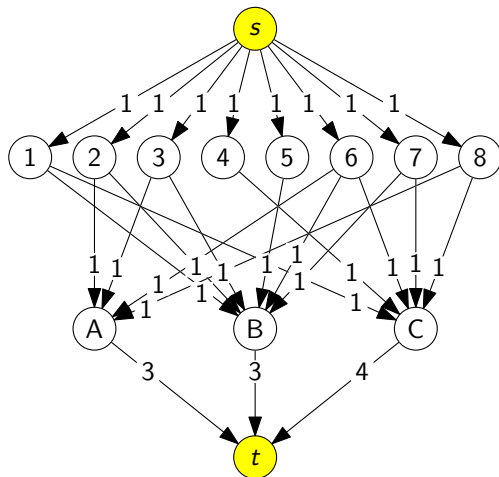
## 最大流問題としてのモデル化

遭難者とオアシスの間の弧容量はどれも 1 (非負整数なら何でもよい)

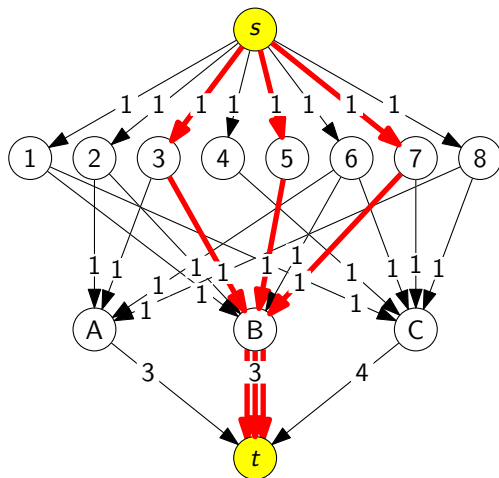


## 最大流問題としてのモデル化

オアシスと  $t$  の間の弧容量はオアシスの救護可能人数



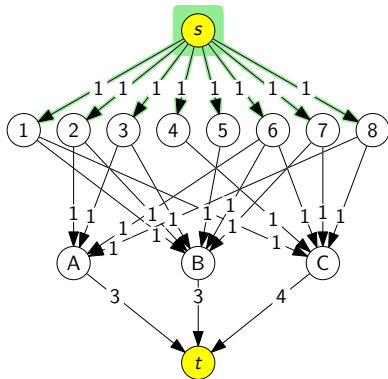
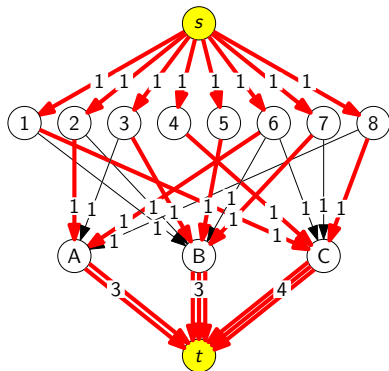
直感：オアシス B で遭難者 3, 5, 7 を救護してる様子





## 最大流と最小カット

増加道法を適用すると、例えば、次の最大流と最小カットが得られる



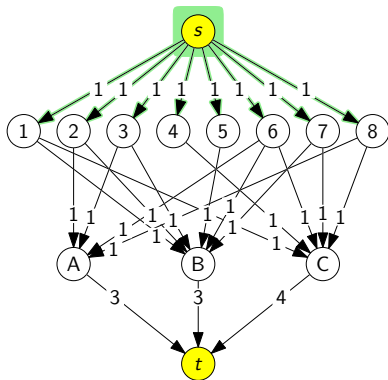
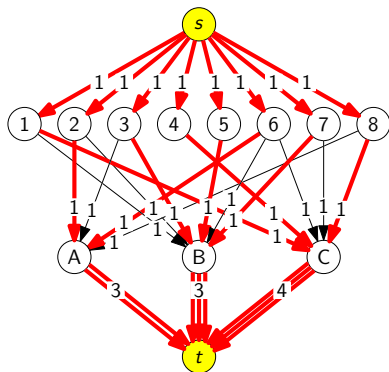
最大流の値 = 最小  $s, t$  カットの容量 = 8

## 「流れ」という比喩

流れ	——	割当
たくさん流す	——	たくさん割り当てる

## 最大流と最小カット：補足

増加道法を適用すると、例えば、次の最大流と最小カットが得られる



最大流の値 = 最小  $s, t$  カットの容量 = 8

## 補足：整数流定理の帰結

整数流定理より、どの弧に流れる量も整数である最大流が存在

$\therefore$  流れ (という連続的なもの) が割当 (という離散的なもの) に対応させられる

# 目次

- ① 割当問題
- ② リーグ戦における優勝可能性判定問題
- ③ 今日のまとめ

## MLB (Major League Baseball) アメリカンリーグ東地区

## MLB AL East 1996年8月30日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYN	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYN	75	59	28	-	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	-	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	-	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	-	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	-	20

NYN = ニューヨーク・ヤンキース, BAL = ボルティモア・オリオールズ,  
 BOS = ボストン・レッドソックス, TOR = トロント・ブルージェイズ,  
 DET = デトロイト・タイガース

## 質問

DETはまだ地区優勝が可能か？

(注：引き分けはない)

<http://lyle.smu.edu/~olinick/riot/detroit.html>

## ちょっと観察

## MLB AL East 1996年8月30日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	-	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	-	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	-	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	-	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	-	20

仮定：DETが残り試合すべてで勝ち、NYYが残り試合すべてで負ける

- ▶ 最終的に、DETは76勝86敗で全日程終了
- ▶ 最終的に、NYYは75勝87敗で全日程終了

この仮定が成り立たなくても、DETは優勝できるかもしれない!?

## ちょっと観察

## MLB AL East 1996年8月30日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	—	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	—	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	—	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	—	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	—	20

仮定：DETが残り試合すべてで勝ち、NYYが残り試合すべてで負ける

- ▶ 最終的に、DETは76勝86敗で全日程終了
- ▶ 最終的に、NYYは75勝87敗で全日程終了
- ▶ しかし、このとき、BOSはNYYから8勝している
- ▶ つまり、BOSの最終成績は77勝以上
- ▶ ∴ DETは優勝できない

この仮定が成り立たなくても、DETは優勝できるかもしれない!?

## ここからの目標

## MLB AL East 1996年8月30日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYN	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYN	75	59	28	-	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	-	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	-	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	-	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	-	20

## ここからの目標

TORとDETが優勝できるかどうか、最大流問題を使って判定する

## 最大流問題としてのモデル化：着眼点

## MLB AL East 1996年8月30日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	-	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	-	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	-	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	-	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	-	20

アイディア：「割り当てる」ことを「流す」ことに対応させる

例えば，NYYとBALに対して「3」という勝利を割り当てる



## TORの優勝可能性判定 (1)

## MLB AL East 1996年8月30日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	-	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	-	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	-	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	-	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	-	20

TORは残り全部に勝ち、他チームは他地区で全部負けると仮定できる

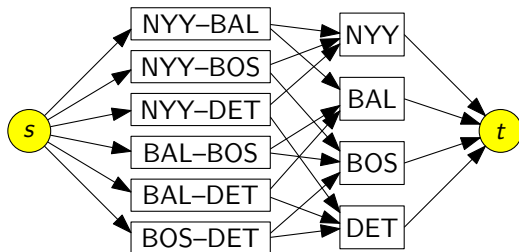
## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	73	14	-	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	-	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	-	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	-	0

## TORの優勝可能性判定 (2)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYN	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYN	75	73	14	-	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	-	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	-	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	-	0

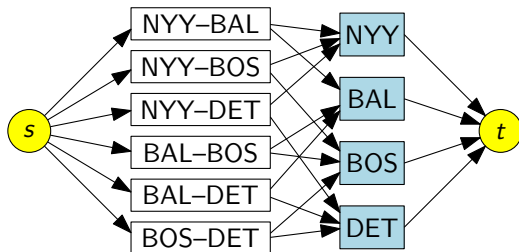


## 有向グラフの構成

## TORの優勝可能性判定 (3)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYN	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYN	75	73	14	-	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	-	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	-	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	-	0

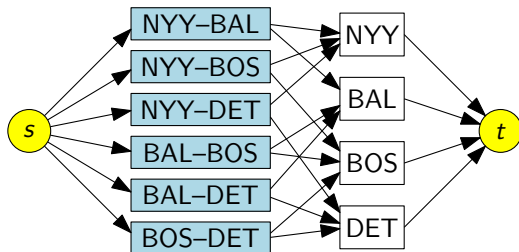


各チームに対応する頂点

## TORの優勝可能性判定 (4)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYN	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYN	75	73	14	-	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	-	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	-	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	-	0

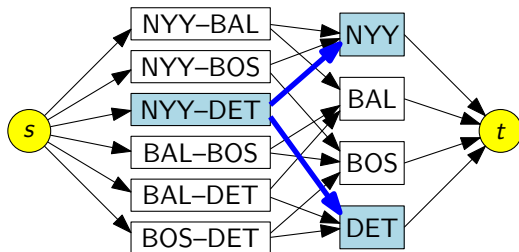


## 各対戦に対応する頂点

## TORの優勝可能性判定 (5)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYN	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYN	75	73	14	-	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	-	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	-	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	-	0

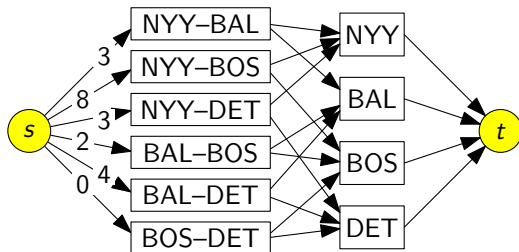


対戦を行うチームに向かって弧を引く

## TORの優勝可能性判定 (6)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYN	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYN	75	73	14	-	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	-	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	-	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	-	0

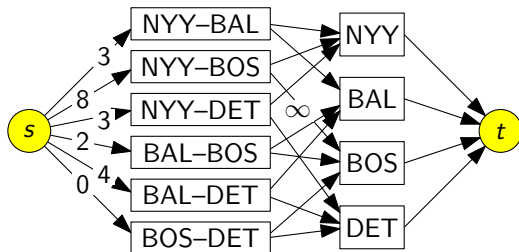


## 残り対戦数

## TORの優勝可能性判定 (7)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYN	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYN	75	73	14	-	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	-	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	-	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	-	0

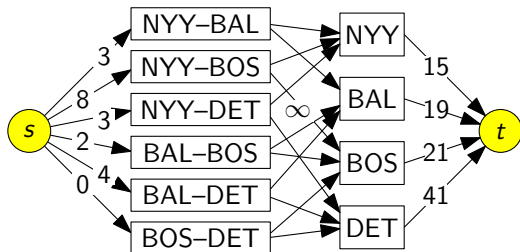


「真ん中」の弧の容量はどれも  $\infty$

## TORの優勝可能性判定 (8)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYN	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYN	75	73	14	-	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	-	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	-	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	-	0



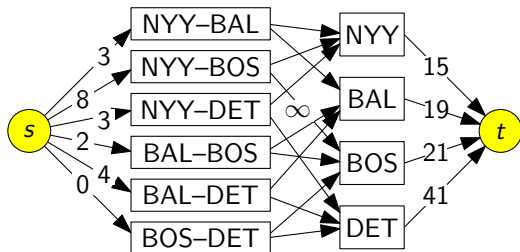
TORが優勝するとき、そのチームがあとどれだけ勝ってもよいか



## TORの優勝可能性判定 (9)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYN	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYN	75	73	14	-	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	-	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	-	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	-	0

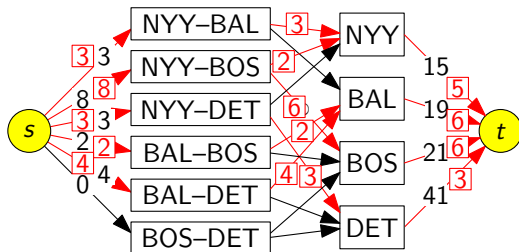


最大流の値が  $3 + 8 + 3 + 2 + 4 + 0 = 20 \Leftrightarrow$  TORは優勝可能

## TORの優勝可能性判定 (10)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYN	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYN	75	73	14	-	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	-	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	-	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	-	0

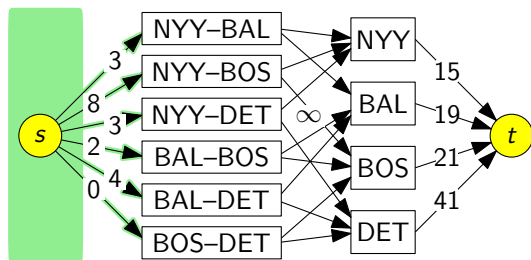


これが最大流で、その値は 20

## TORの優勝可能性判定 (11)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYN	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYN	75	73	14	-	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	-	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	-	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	-	0

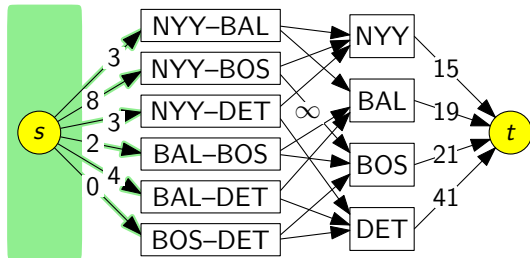


なぜならば、容量が20の  $s, t$  カットが存在するから

## TORの優勝可能性判定 (12)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYN	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYN	75	73	14	-	3	8	0	3	0
BAL	71	82	9	3	-	2	0	4	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	90	72	0	0	0	0	-	0	0
DET	49	106	7	3	4	0	0	-	0



結論：TORは優勝できる

## DET の優勝可能性判定 (1)

## MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	-	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	-	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	-	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	-	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	-	20

DET は残り全部に勝ち、他チームは他地区で全部負けると仮定できる

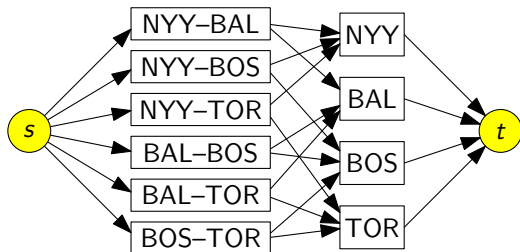
## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	-	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	-	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	-	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	-	0

## DETの優勝可能性判定 (2)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	-	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	-	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	-	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	-	0

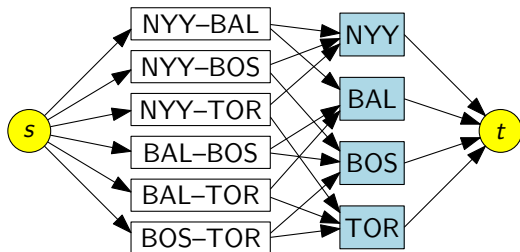


## 有向グラフの構成

## DETの優勝可能性判定 (3)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	-	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	-	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	-	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	-	0

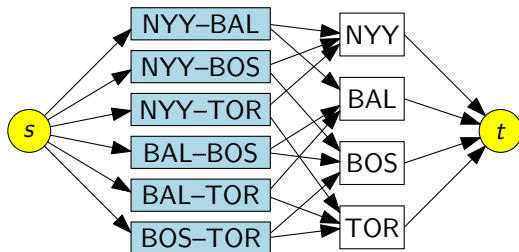


各チームに対応する頂点

## DETの優勝可能性判定 (4)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYN	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYN	75	69	18	-	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	-	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	-	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	-	0



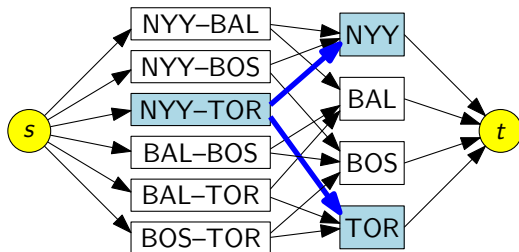
## 各対戦に対応する頂点



## DETの優勝可能性判定 (5)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	-	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	-	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	-	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	-	0

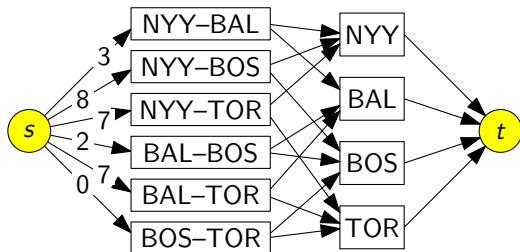


対戦を行うチームに向かって弧を引く

## DETの優勝可能性判定 (6)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	-	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	-	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	-	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	-	0

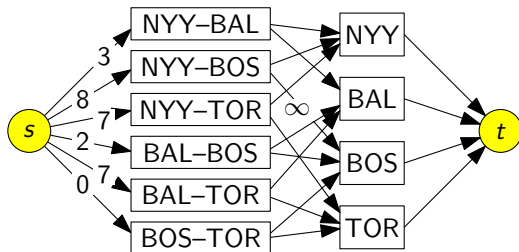


## 残り対戦数

## DETの優勝可能性判定 (7)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	-	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	-	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	-	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	-	0

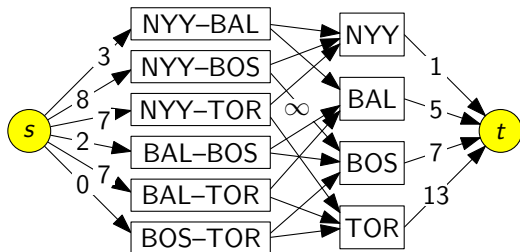


「真ん中」の弧の容量はどれも  $\infty$

## DET の優勝可能性判定 (8)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	-	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	-	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	-	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	-	0

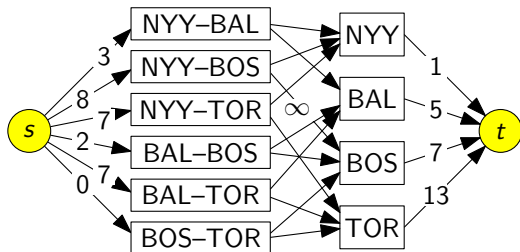


DET が優勝するとき，そのチームがあとどれだけ勝ってもよいか

## DETの優勝可能性判定 (9)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	-	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	-	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	-	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	-	0

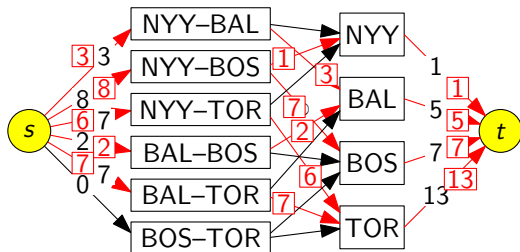


最大流の値が  $3 + 8 + 7 + 2 + 7 + 0 = 27 \Leftrightarrow$  DET は優勝可能

## DETの優勝可能性判定 (10)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYN	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYN	75	69	18	-	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	-	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	-	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	-	0

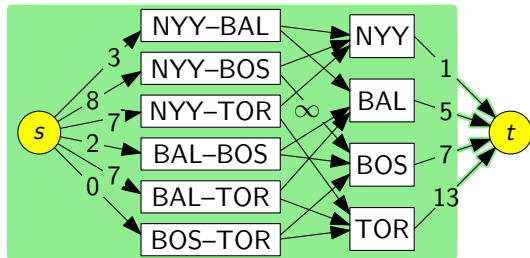


これが最大流で、その値は 26

## DETの優勝可能性判定 (11)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	-	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	-	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	-	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	-	0

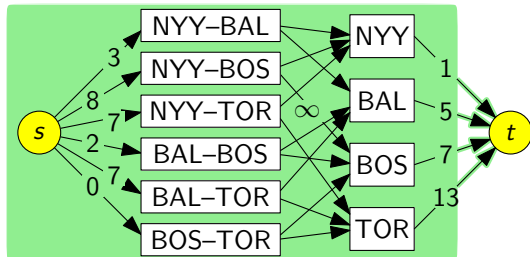


なぜならば、容量が26のカットが存在するから

## DET の優勝可能性判定 (12)

## その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	-	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	-	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	-	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	-	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	-	0



結論：DET は優勝できない



## 優勝可能性判定問題：歴史と結果 (1)

- ▶ 最大流問題を用いた優勝可能性判定
  - ▶ Schwartz (1966)
- ▶  $t$  位以上になれるか, の判定は NP 困難 (難しい)
  - ▶ McCormick (1999)
- ▶ 優勝可能性判定のための高速アルゴリズム
  - ▶ Wayne (2001)
  - ▶ Adler, Erera, Hochbaum, Olinick (2002)
  - ▶ Gusfield, Martel (2002)

## 優勝可能性判定問題：歴史と結果 (2)

$(a, b, c)$ -規則：勝ち  $a$  点，引き分け  $b$  点，負け  $c$  点

(MLB は  $(1, 0, 0)$ -規則)

- ▶  $(2, 1, 0)$ -規則  $\rightsquigarrow$  最大流問題

(1990 年までの FIFA)

- ▶ Schwartz (1966)

- ▶  $(3, 1, 0)$ -規則  $\rightsquigarrow$  NP 困難

(1990 年以降の FIFA)

- ▶ Kern, Paulusma (2001)

- ▶ Bernholt, Gülich, Hofmeister, Schmitt (1999)

- ▶  $a = b$  または  $b = c$  または  $a + c = 2b$   $\rightsquigarrow$  最大流問題

そうでないとき  $\rightsquigarrow$  NP 困難

- ▶ Kern, Paulusma (2001)

# 目次

- ① 割当問題
- ② リーグ戦における優勝可能性判定問題
- ③ 今日のまとめ

## 今日のまとめ

## 今日の目標

最大流問題を用いて様々な問題がモデル化できるようになる

- ▶ 割当問題
- ▶ リーグ戦における優勝可能性判定問題

## 残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
  - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
  - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - ▶ 内容は何でも OK
  - ▶ 匿名で OK

# 目次

- ① 割当問題
- ② リーグ戦における優勝可能性判定問題
- ③ 今日のまとめ