

グラフとネットワーク 第 6 回  
最大流：数理

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 5 月 15 日

最終更新：2017 年 5 月 12 日 08:54

## スケジュール 前半 (予定)

- |   |              |        |
|---|--------------|--------|
| 1 | グラフの定義と次数：数理 | (4/10) |
| 2 | 道と閉路：数理      | (4/17) |
| 3 | 木：数理         | (4/24) |
| 4 | マッチング：数理     | (5/1)  |
| 5 | マッチング：モデル化   | (5/8)  |
| 6 | 最大流：数理       | (5/15) |
| 7 | 最大流：モデル化 (1) | (5/22) |
| 8 | 最大流：モデル化 (2) | (5/29) |
| 9 | 連結性：数理とモデル化  | (6/5)  |
|   | ● 中間試験       | (6/12) |

注意：予定の変更もありうる

## スケジュール 後半 (予定)

- |    |               |        |
|----|---------------|--------|
| 10 | 彩色：数理         | (6/19) |
| 11 | 彩色：モデル化       | (6/26) |
| *  | 休講 (出張)       | (7/3)  |
| 12 | 平面グラフ：数理      | (7/10) |
| *  | 休講 (海の日)      | (7/17) |
| 13 | 平面グラフ：モデル化    | (7/24) |
| 14 | 予備日 (たぶんやらない) | (7/31) |
| ●  | 期末試験          | (8/7)  |

注意：予定の変更もありうる

## 主題

離散最適化の入門として、次を概説する

- ▶ グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- ▶ アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

## 達成目標

以下の4項目をすべて達成すること

- 1 グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
- 2 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し、数理モデルを構築できる
- 3 アルゴリズム的解法の背後にある数理、特に、最小最大定理の重要性を説明でき、それを用いて最適性の証明ができる
- 4 グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

### 今日の目標

最大流問題に関して次ができるようになる

- ▶ 「流れ」が何であるのか記述でき、基本性質を証明できる
- ▶ **流れとカットの双対性**により流れの最大性を証明できる

### 重要な定理

- ▶ 最大流最小カット定理
- ▶ 整数流定理

# 目次

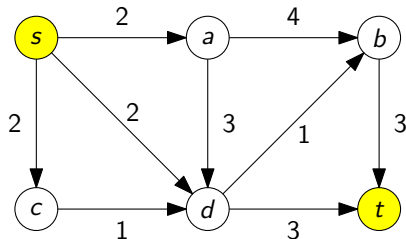
- ① 最大流問題とは？
- ② 流れとカットの弱双対性
- ③ 流れとカットの強双対性：最大流最小カット定理
- ④ 今日のまとめ

## 最大流問題とは？

## 定義：最大流問題とは？

## 入力

- ▶ 有向グラフ  $G = (V, A)$ , 各弧  $a \in A$  の容量  $c(a)$ , 2 頂点  $s, t \in V$   
(弧の容量は非負実数)



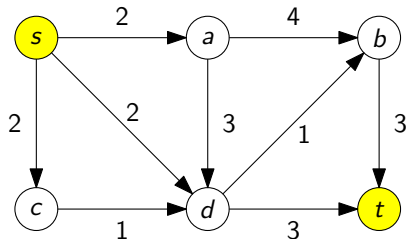
## 最大流問題とは？

定義：最大流問題とは？

出力

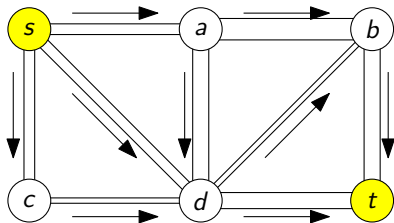
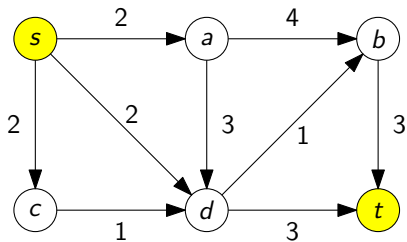
- ▶  $s$  から  $t$  へ至る流れで、その値が最大のもの

( $s$  から  $t$  へ至る最大流)

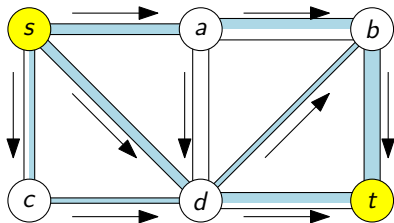
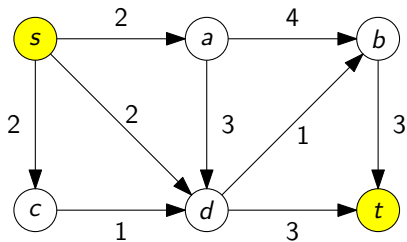




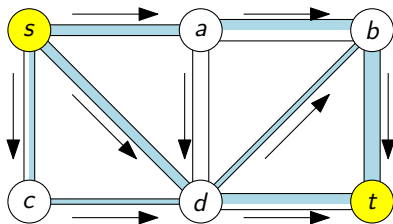
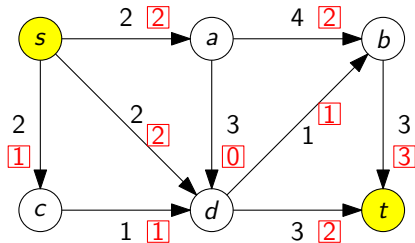
## 流れとは?: 直感 (1)



## 流れとは?: 直感 (2)



## 流れとは?: 直感 (3)



## 流れとは？ (1)

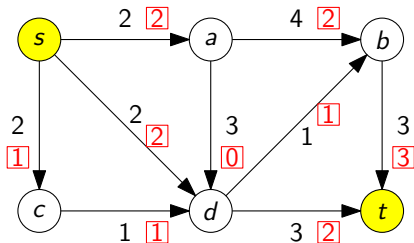
定義：  $s$  から  $t$  へ至る流れとは？

各弧  $a \in A$  に対する実数  $f(a)$  の割り当て (関数  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ) で次の2つを満たすもの

- 1  $s, t$  以外の頂点  $v \in V - \{s, t\}$  に対して, (流量保存制約)

$$\sum_{u:(u,v) \in A} f((u,v)) = \sum_{u:(v,u) \in A} f((v,u))$$

( $v$  へ流入する総量)                      ( $v$  から流出する総量)



## 流れとは？ (2)

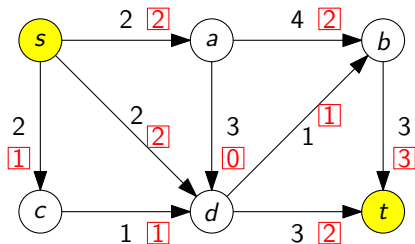
定義：  $s$  から  $t$  へ至る流れとは？

各弧  $a \in A$  に対する実数  $f(a)$  の割り当て (関数  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ) で次の2つを満たすもの

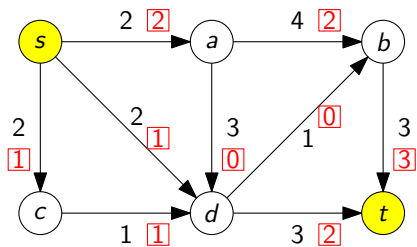
2 各弧  $a \in A$  において,

(容量制約)

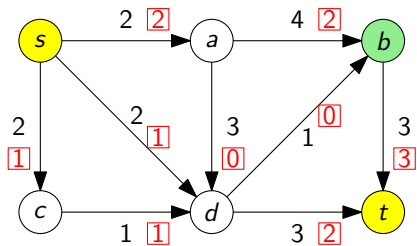
$$0 \leq f(a) \leq c(a)$$



## これは流れか？ (1)

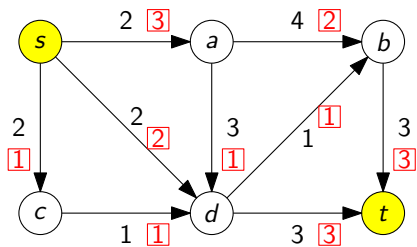


## これは流れか？ (1)



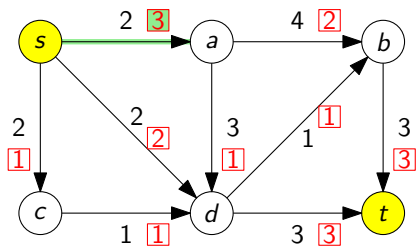
流れではない

## これは流れか？ (2)



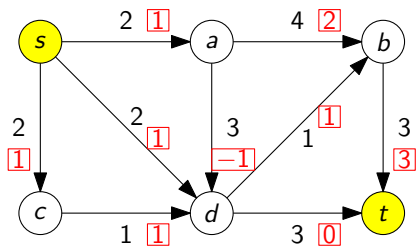


## これは流れか？ (2)

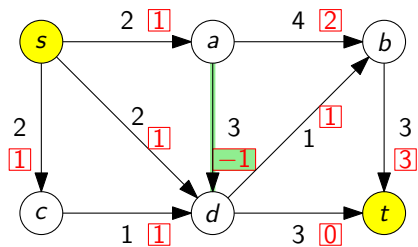


流れではない

## これは流れか？ (3)

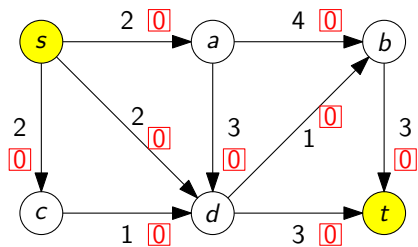


## これは流れか？ (3)

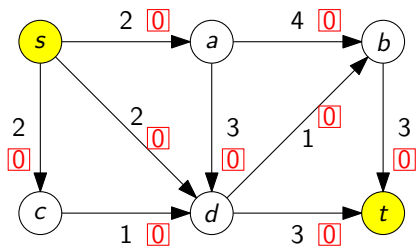


流れではない

## これは流れか？ (4)



これは流れか？ (4)



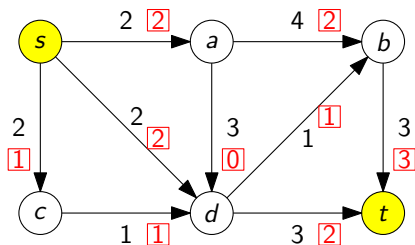
流れである

## 流れの値

定義：流れ  $f$  の値とは？

$s$  から  $t$  へ至る流れ  $f$  の値を次の量で定義し、 $\text{val}(f)$  と表記する

$$\text{val}(f) = \sum_{u:(s,u) \in A} f((s,u)) - \sum_{u:(u,s) \in A} f((u,s))$$



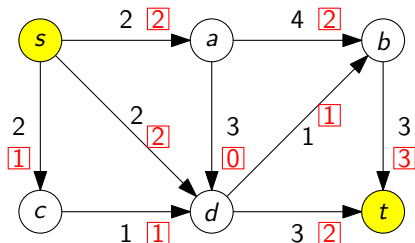
この流れの値は 5

## 最大流

## 定義：最大流とは？

$s$  から  $t$  へ至る流れ  $f$  が**最大流**であるとは、

$s$  から  $t$  へ至る任意の流れ  $f'$  に対して  $\text{val}(f') \leq \text{val}(f)$  が成り立つこと



**注**：最大流が存在する，ということは当たり前ではない

## 記法の簡略化：流入，流出，純流入，純流出

$s$  から  $t$  へ至る流れ  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

## 記法と用語

各頂点  $v \in V$  に対して，次のように記号を定義

$$\blacktriangleright f^+(v) = \sum_{u:(v,u) \in A} f((v,u)) \quad (v \text{ からの流出})$$

$$\blacktriangleright f^-(v) = \sum_{u:(u,v) \in A} f((u,v)) \quad (v \text{ への流入})$$

このとき，

$\blacktriangleright f^+(v) - f^-(v)$  は  $v$  における純流出

$\blacktriangleright f^-(v) - f^+(v)$  は  $v$  における純流入

$f^+(v) - f^-(v)$  を  $\partial f(v)$  と書いて， $f$  の  $v$  における境界と呼ぶことがある



## 記法の簡略化：流れの定義と流れの値の定義の書き換え

$s$  から  $t$  へ至る流れ  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

つまり、次のように書き換えられる

流量保存制約

- ▶ 任意の頂点  $v \in V - \{s, t\}$  に対して,  $f^+(v) = f^-(v)$

流れ  $f$  の値

- ▶  $\text{val}(f) = f^+(s) - f^-(s)$

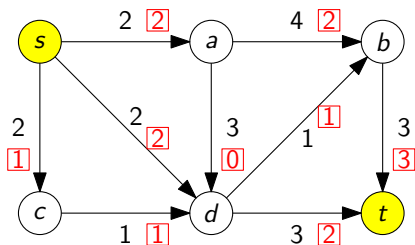
流れの総和 = 流出量の総和 = 流入量の総和

$s$  から  $t$  へ至る流れ  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

次が成り立つ

$$\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{v \in V} f^+(v) = \sum_{v \in V} f^-(v)$$

証明：演習問題 (ヒント：握手補題の証明を思い出す)



$v$	$f^+(v)$	$f^-(v)$
$s$	5	0
$a$	2	2
$b$	3	3
$c$	1	1
$d$	3	3
$t$	0	5
計	14	14

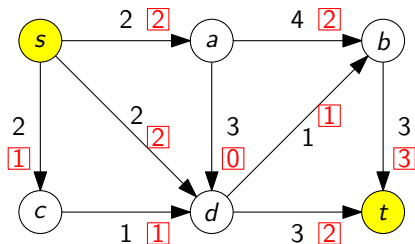
$s$  における純流出 =  $t$  における純流入

## 次が成り立つ

$s$  から  $t$  へ至る任意の流れ  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  に対して

$$f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$$

( $s$  における純流出)          ( $t$  における純流入)



左辺 = 5 = 右辺

$s$  における純流出 =  $t$  における純流入 : 証明

### 流量保存制約

- ▶ 任意の頂点  $v \in V - \{s, t\}$  に対して,  $f^+(v) = f^-(v)$

$s$  における純流出 =  $t$  における純流入：証明

## 流量保存制約

- ▶ 任意の頂点  $v \in V - \{s, t\}$  に対して,  $f^+(v) = f^-(v)$

から,

- ▶ 
$$\sum_{v \in V - \{s, t\}} f^+(v) = \sum_{v \in V - \{s, t\}} f^-(v) \dots\dots\dots (1)$$

が得られる.

$s$  における純流出 =  $t$  における純流入：証明

## 流量保存制約

- ▶ 任意の頂点  $v \in V - \{s, t\}$  に対して,  $f^+(v) = f^-(v)$

から,

- ▶ 
$$\sum_{v \in V - \{s, t\}} f^+(v) = \sum_{v \in V - \{s, t\}} f^-(v) \dots\dots\dots (1)$$

が得られる。また,

- ▶ 
$$\sum_{v \in V} f^+(v) = \sum_{v \in V} f^-(v) \dots\dots\dots (2)$$

となる

$s$  における純流出 =  $t$  における純流入：証明

## 流量保存制約

- ▶ 任意の頂点  $v \in V - \{s, t\}$  に対して,  $f^+(v) = f^-(v)$

から,

- ▶ 
$$\sum_{v \in V - \{s, t\}} f^+(v) = \sum_{v \in V - \{s, t\}} f^-(v) \dots\dots\dots (1)$$

が得られる。また,

- ▶ 
$$\sum_{v \in V} f^+(v) = \sum_{v \in V} f^-(v) \dots\dots\dots (2)$$

となるので, 式(2) - 式(1)より,

- ▶  $f^+(s) + f^+(t) = f^-(s) + f^-(t)$

が得られる。

$s$  における純流出 =  $t$  における純流入：証明

## 流量保存制約

- ▶ 任意の頂点  $v \in V - \{s, t\}$  に対して,  $f^+(v) = f^-(v)$

から,

- ▶ 
$$\sum_{v \in V - \{s, t\}} f^+(v) = \sum_{v \in V - \{s, t\}} f^-(v) \dots\dots\dots (1)$$

が得られる。また,

- ▶ 
$$\sum_{v \in V} f^+(v) = \sum_{v \in V} f^-(v) \dots\dots\dots (2)$$

となるので, 式(2) - 式(1)より,

- ▶  $f^+(s) + f^+(t) = f^-(s) + f^-(t)$

が得られる。整理すると

- ▶  $f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$

が得られる。

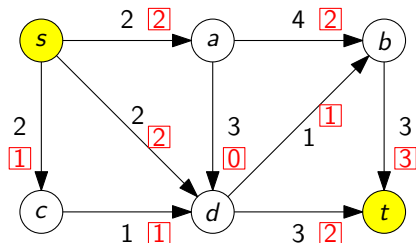




## 最大流問題が出てくる場面：配送問題

- ▶ 有向グラフは 道路ネットワーク をモデル化
- ▶  $s$  は 部品工場 をモデル化
- ▶  $t$  は 組立工場 をモデル化
- ▶ 弧の容量は 道幅 をモデル化

最大流問題 = できるだけ多くの部品を組み立て工場に運ぶには？

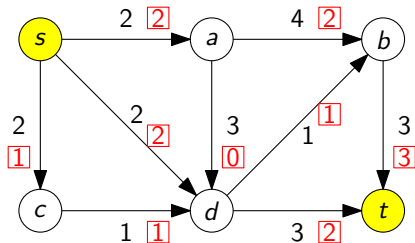


他の応用は後の講義で

## 目次

- ① 最大流問題とは？
- ② 流れとカットの弱双対性
- ③ 流れとカットの強双対性：最大流最小カット定理
- ④ 今日のまとめ

疑問：流れと「対」になるものは何か？



この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

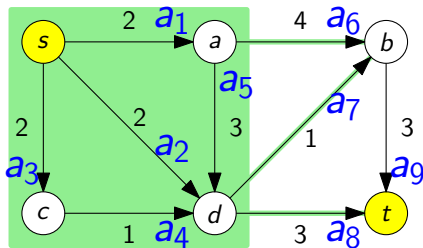
- ▶  $\rightsquigarrow$  流れと「対」になるものが何なのか考えたい

最大化	最小化
マッチング	頂点被覆
流れ	???

## カット

定義： $s, t$  カットとは？

$s, t$  カットとは、頂点部分集合  $S$  で、 $s \in S$  と  $t \notin S$  を満たすもののこと



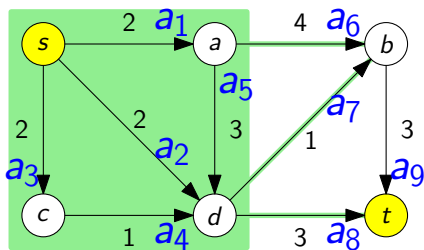
イメージ： $s$  から  $t$  へ至る流れは  $S$  の側から  $V - S$  の側に向かっていく

## カットの容量

定義： $s, t$  カットの容量とは？

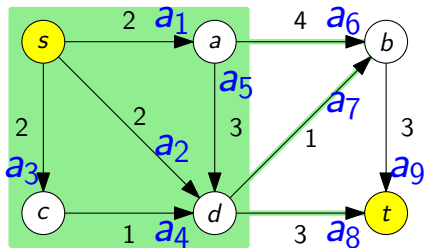
$s, t$  カット  $S$  の容量とは、次の式で定義され、 $\text{cap}(S)$  と表記する

$$\text{cap}(S) = \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v))$$



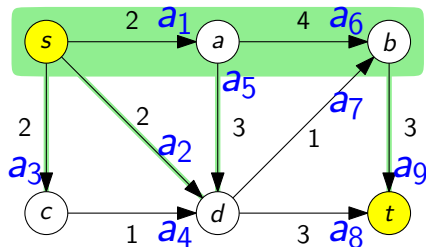
$S$  に始点を持ち、 $V - S$  に終点を持つ弧の容量の合計

## カット容量の例 (1)



$\{s, a, c, d\}$  は  $s, t$  カットで、その容量は 8

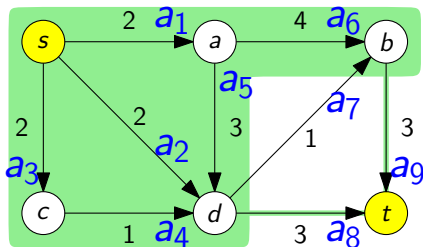
## カット容量の例 (2)



$\{s, a, b\}$  は  $s, t$  カットで、その容量は 10

注意：  $a_7$  の容量はカットの容量に含めない

## カット容量の例 (3)

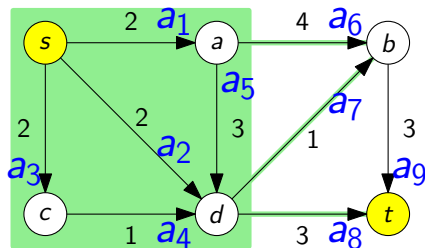


$\{s, a, b, c, d\}$  は  $s, t$  カットで, その容量は 6

注意:  $a_7$  の容量はカットの容量に含めない



## カットの容量と流れ



## 直感

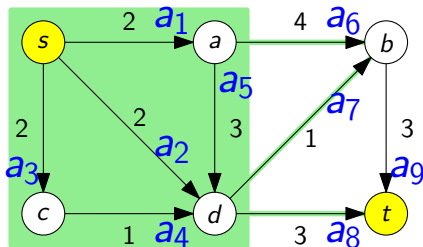
- ▶  $s$  から  $t$  へ至る流れ  $f$  は  $S$  から  $V - S$  へ向かっていく
- ▶  $\therefore \text{cap}(S)$  よりもたくさん  $s$  から  $t$  へ流れない
- ▶  $\therefore \text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$

## カットの容量と流れ：より厳密に

## 流れとカットの関係

$s$  から  $t$  へ至る任意の流れ  $f$  と任意の  $s, t$  カット  $S$  に対して

$$\text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$$



## カットの容量と流れ：補題

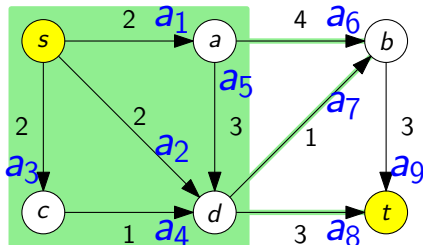
## 補題 A

$s$  から  $t$  へ至る任意の流れ  $f$  と任意の  $s, t$  カット  $S$  に対して

$$\text{val}(f) = \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u,v))$$

(  $S$  から出る総流量 )                      (  $S$  に入る総流量 )

証明：演習問題



## カットの容量と流れ：証明

## 証明したいこと：流れとカットの関係

$s$  から  $t$  へ至る任意の流れ  $f$  と任意の  $s, t$  カット  $S$  に対して

$$\text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$$

証明：

$$\text{val}(f) \stackrel{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u, v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u, v))$$

## カットの容量と流れ：証明

## 証明したいこと：流れとカットの関係

$s$  から  $t$  へ至る任意の流れ  $f$  と任意の  $s, t$  カット  $S$  に対して

$$\text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$$

証明：

$$\begin{aligned} \text{val}(f) &\stackrel{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u,v)) \\ &\leq \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) \quad \because f((u,v)) \geq 0 \end{aligned}$$

## カットの容量と流れ：証明

## 証明したいこと：流れとカットの関係

$s$  から  $t$  へ至る任意の流れ  $f$  と任意の  $s, t$  カット  $S$  に対して

$$\text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$$

証明：

$$\begin{aligned} \text{val}(f) &\stackrel{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u,v)) \\ &\leq \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) \quad \because f((u,v)) \geq 0 \\ &\leq \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v)) \quad \because f((u,v)) \leq c((u,v)) \end{aligned}$$

## カットの容量と流れ：証明

## 証明したいこと：流れとカットの関係

$s$  から  $t$  へ至る任意の流れ  $f$  と任意の  $s, t$  カット  $S$  に対して

$$\text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$$

証明：

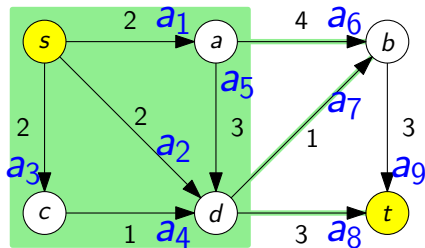
$$\begin{aligned} \text{val}(f) &\stackrel{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u,v)) \\ &\leq \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) \quad \because f((u,v)) \geq 0 \\ &\leq \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v)) \quad \because f((u,v)) \leq c((u,v)) \\ &= \text{cap}(S) \end{aligned}$$



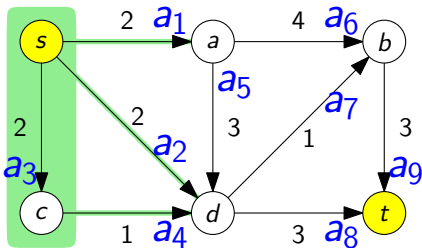
## 最小カット

定義：最小  $s, t$  カットとは？

最小  $s, t$  カットとは、 $s, t$  カット  $S$  で、  
 任意の  $s, t$  カット  $S'$  に対して、 $\text{cap}(S) \leq \text{cap}(S')$  を満たすもの



最小  $s, t$  カットではない



最小  $s, t$  カットである



## 流れとカットの関係：帰結

有向グラフ  $G = (V, A)$ , 容量  $c: A \rightarrow \mathbb{R}$ , 2 頂点  $s, t \in V$

## 流れとカットの関係 (重要)

$f$  が流れ  
 $S$  が  $s, t$  カット  $\Rightarrow \text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$

## 流れとカットの関係：帰結

有向グラフ  $G = (V, A)$ , 容量  $c: A \rightarrow \mathbb{R}$ , 2 頂点  $s, t \in V$

## 流れとカットの関係 (重要)

$f$  が流れ  
 $S$  が  $s, t$  カット  $\Rightarrow \text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$

## 最大流とカットの関係

$f$  が最大流  
 $S$  が  $s, t$  カット  $\Rightarrow \text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$

## 流れとカットの関係：帰結

有向グラフ  $G = (V, A)$ , 容量  $c: A \rightarrow \mathbb{R}$ , 2 頂点  $s, t \in V$

## 流れとカットの関係 (重要)

$f$  が流れ  
 $S$  が  $s, t$  カット  $\Rightarrow \text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$

## 最大流とカットの関係

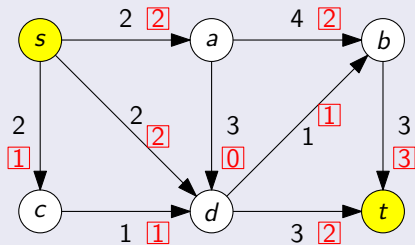
$f$  が最大流  
 $S$  が  $s, t$  カット  $\Rightarrow \text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$

## 最大流と最小カットの関係 (弱双対性)

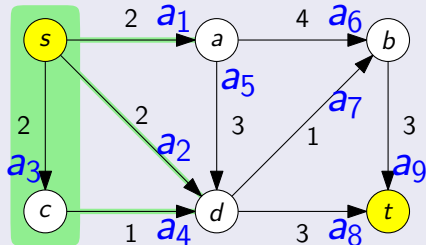
$f$  が最大流  
 $S$  が最小  $s, t$  カット  $\Rightarrow \text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$

## 弱双対性の使い方

下界

最大流の値  $\geq 5$ 

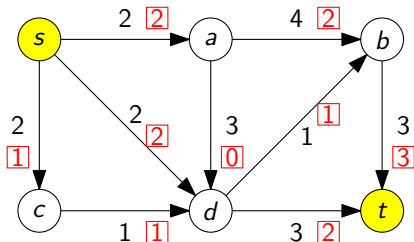
上界

最大流の値  $\leq 5$ 

したがって

- ▶ 左の図にある流れは最大流であり、その値は5
- ▶ 右の図にある  $s, t$  カットは最小  $s, t$  カットであり、その容量は5

## 疑問：流れと「対」になるものは何か？ — 解答編



この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

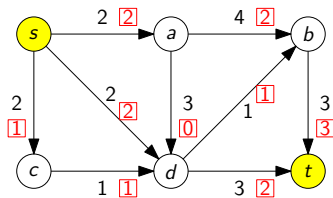
- ▶  $\rightsquigarrow$  流れと「対」になるものが何なのか考えたい
- ▶  $\rightsquigarrow$  それは  $s, t$  カット !!!

最大化	最小化
マッチング	頂点被覆
流れ	$s, t$ カット

## 目次

- ① 最大流問題とは？
- ② 流れとカットの弱双対性
- ③ 流れとカットの強双対性：最大流最小カット定理**
- ④ 今日のまとめ

## 疑問：流れと「対」になるものは何か？ — 解答編 (再)



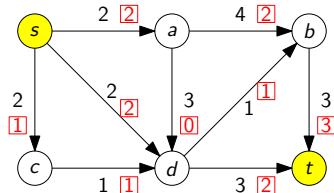
この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

- ▶  $\rightsquigarrow$  流れと「対」になるものが何なのか考えたい
- ▶  $\rightsquigarrow$  それは  $s, t$  カット !!!

## 問題点？

$\text{val}(f) = \text{cap}(S)$  となる  $f$  と  $S$  が存在しないかもしれない？

## 疑問：流れと「対」になるものは何か？ — 解答編 (再)



この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

- ▶  $\rightsquigarrow$  流れと「対」になるものが何なのか考えたい
- ▶  $\rightsquigarrow$  それは  $s, t$  カット !!!

## 問題点？

$\text{val}(f) = \text{cap}(S)$  となる  $f$  と  $S$  が存在しないかもしれない？

解決  $\rightsquigarrow$  (最大流最小カット定理)

$\text{val}(f) = \text{cap}(S)$  となる  $f$  と  $S$  が必ず存在する !!



## 最大流最小カット定理

## 最大流最小カット定理 (強双対性)

(Ford, Fulkerson '56)

$f$  が最大流  
 $S$  が最小  $s, t$  カット  $\Rightarrow \text{val}(f) = \text{cap}(S)$

## 注意

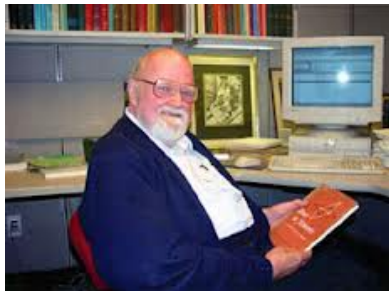
## 弱双対性

- ▶  $\text{val}(f) = \text{cap}(S)$  ならば  $f$  は最大流

## 強双対性

- ▶  $\text{val}(f) = \text{cap}(S)$  となる  $f, S$  が必ず存在

## Lester R. Ford, Jr. と Delbert R. Fulkerson



L. R. Ford, Jr.  
フォード  
(1927-)



D. R. Fulkerson  
ファルカーソン  
(1924-1976)

[https://arodrigu.webs.upv.es/grafos/doku.php?id=algoritmo\\_ford\\_fulkerson](https://arodrigu.webs.upv.es/grafos/doku.php?id=algoritmo_ford_fulkerson)

## 最大流最小カット定理 — 証明に向けて

## 最大流最小カット定理 (強双対性)

(Ford, Fulkerson '56)

$f$  が最大流  
 $S$  が最小  $s, t$  カット  $\Rightarrow \text{val}(f) = \text{cap}(S)$

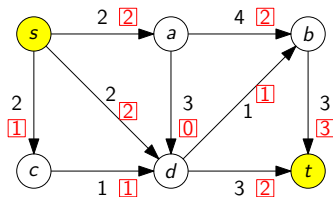
この講義では容量が整数の場合のみ証明する

- ▶ 容量が無理数の場合の証明は、この講義の範囲を超える (最後に補足)

証明法：アルゴリズムによる証明

## 最大流問題の解き方

- 1 線形計画問題として定式化し，線形計画法のアルゴリズムを使う  
(『数理計画法』で学ぶ)
- 2 最大流問題独自のアルゴリズムを利用する  
(特に，増加道法を紹介する)

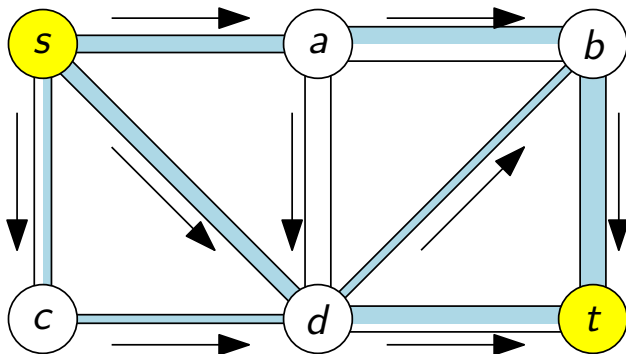


## 今からやること

## 増加道法を説明する

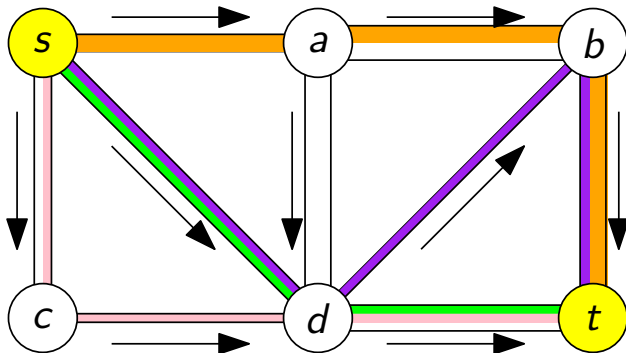
- ▶ 重要概念：補助ネットワーク，増加道

## 増加道法：基本アイデア



- ▶ 事実：「流れ」は「道に沿った流れ」に分解できる
- ▶ 方針：「道に沿った流れ」を次々と見つけていく

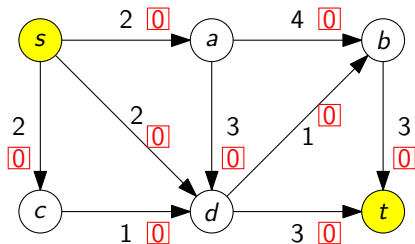
## 増加道法：基本アイデア



- ▶ 事実：「流れ」は「道に沿った流れ」に分解できる
- ▶ 方針：「道に沿った流れ」を次々と見つけていく

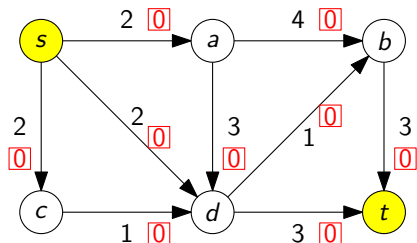
## 増加道法の動き (1)

任意の流れから始める (例えば、どの弧の上にも 0 だけ流れるもの)

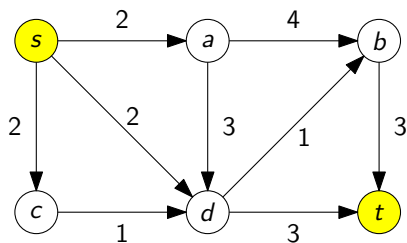


## 増加道法の動き (1)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る (残余ネットワークとも呼ばれる)



元のネットワーク



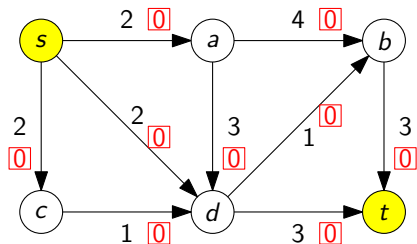
補助ネットワーク

この場合は、始めのグラフと同じ  
(次から変わるので、定義はそこで説明)

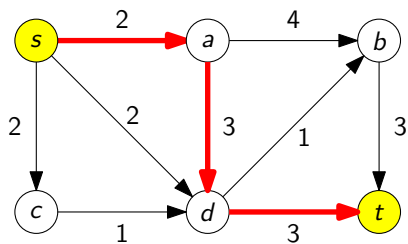


## 増加道法の動き (1)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて、 $s$  を始点、 $t$  を終点とする道を見つける



元のネットワーク

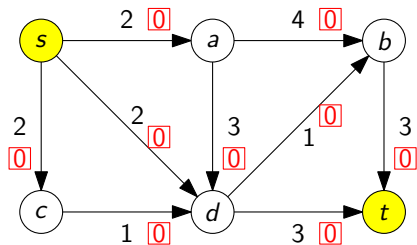


補助ネットワーク

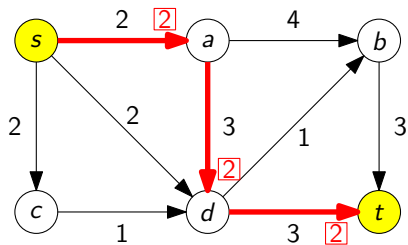
このような道を**増加道** (ぞうかどう) と呼ぶ

## 増加道法の動き (1)：流れの増加

道に沿って、できる限り流れを増加させる



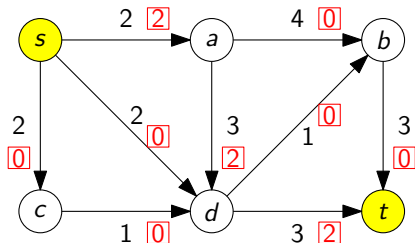
元のネットワーク



補助ネットワーク

## 増加道法の動き (2)

現在得られている流れ

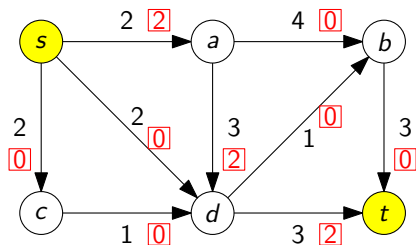


先ほどの手順を繰り返す

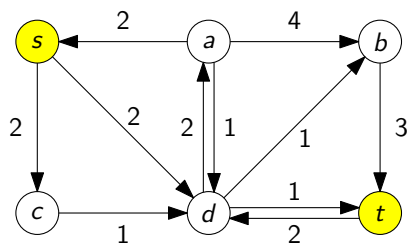
- ▶ 補助ネットワークの作成
- ▶ 増加道の発見
- ▶ 流れの増加

## 増加道法の動き (2)：補助ネットワークの作成

## 補助ネットワークを作る



元のネットワーク



補助ネットワーク

## 補助ネットワークとは？

- ▶ 頂点集合はもとの有向グラフと同じ
- ▶ 2 頂点間に弧がある  $\Leftrightarrow$  その弧を通してまだ流せる (逆向き弧に注意)
- ▶ 弧の容量 = 流せる最大量

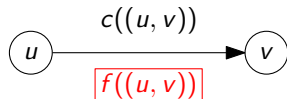
## 補助ネットワーク：定義

有向グラフ  $G = (V, A)$ , 容量  $c: A \rightarrow \mathbb{R}$ , 2 頂点  $s, t$

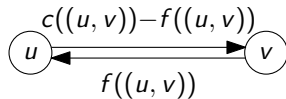
定義：流れ  $f$  に対する補助ネットワークとは？

流れ  $f$  に対する補助ネットワークは次で定義される

- ▶ 有向グラフ  $G_f = (V, A_f)$ ,  $A_f = A_f^F \cup A_f^B$ 
  - ▶  $A_f^F = \{(u, v) \mid (u, v) \in A, f((u, v)) < c((u, v))\}$  (順向きの弧集合)
  - ▶  $A_f^B = \{(v, u) \mid (u, v) \in A, f((u, v)) > 0\}$  (逆向きの弧集合)
- ▶ 容量  $c_f: A_f \rightarrow \mathbb{R}$ 
  - ▶  $(u, v) \in A_f^F$  のとき,  $c_f((u, v)) = c((u, v)) - f((u, v))$
  - ▶  $(v, u) \in A_f^B$  のとき,  $c_f((v, u)) = f((u, v))$



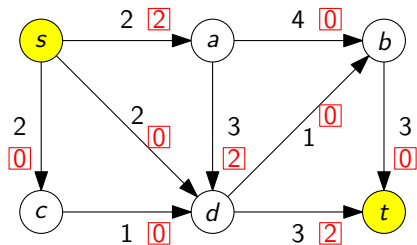
元のネットワーク



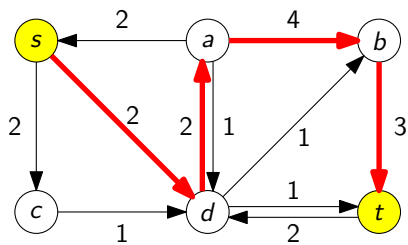
補助ネットワーク

## 増加道法の動き (2)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて、 $s$  を始点、 $t$  を終点とする道を見つける



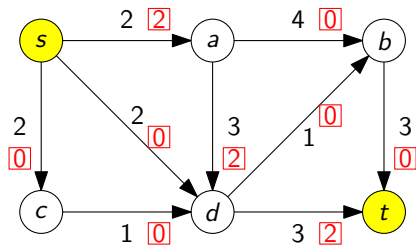
元のネットワーク



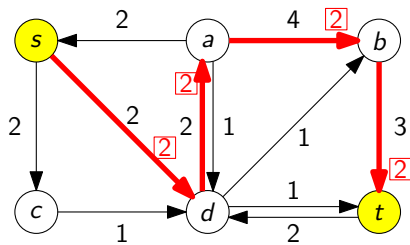
補助ネットワーク

## 増加道法の動き (2)：流れの増加

道に沿って、できる限り流れを増加させる



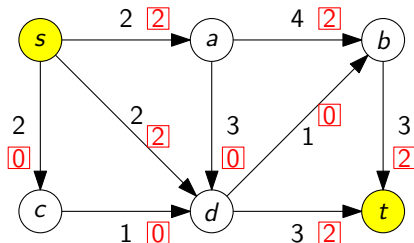
元のネットワーク



補助ネットワーク

## 増加道法の動き (3)

現在得られている流れ



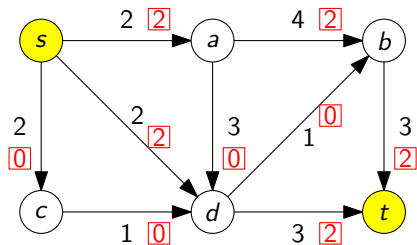
先ほどの手順を繰り返す

- ▶ 補助ネットワークの作成
- ▶ 増加道の発見
- ▶ 流れの増加

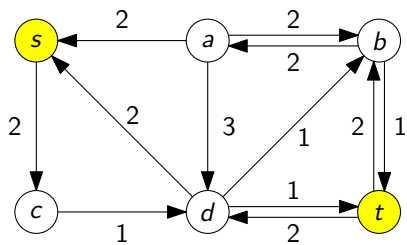


## 増加道法の動き (3)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る



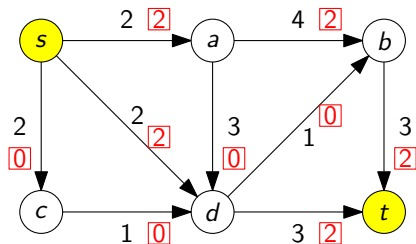
元のネットワーク



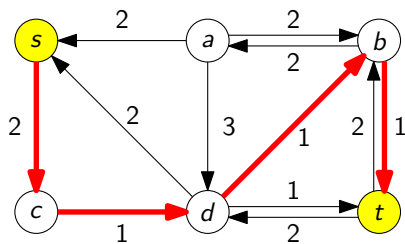
補助ネットワーク

## 増加道法の動き (3)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて、 $s$  を始点、 $t$  を終点とする道を見つける



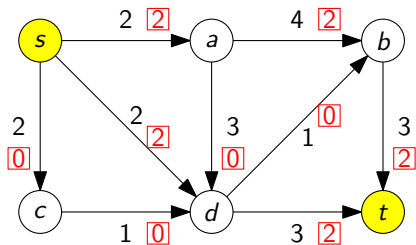
元のネットワーク



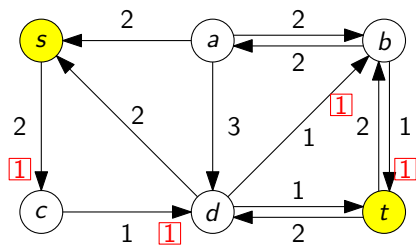
補助ネットワーク

## 増加道法の動き (3)：流れの増加

道に沿って、できる限り流れを増加させる



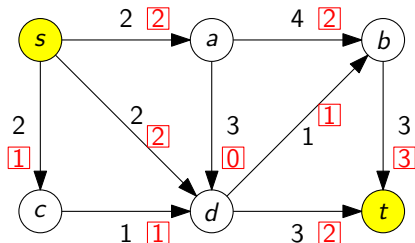
元のネットワーク



補助ネットワーク

## 増加道法の動き (4)

現在得られている流れ

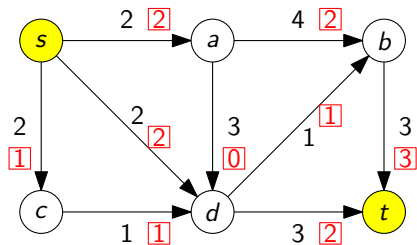


先ほどの手順を繰り返す

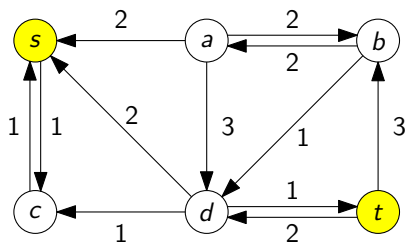
- ▶ 補助ネットワークの作成
- ▶ 増加道の発見
- ▶ 流れの増加

## 増加道法の動き (4)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る



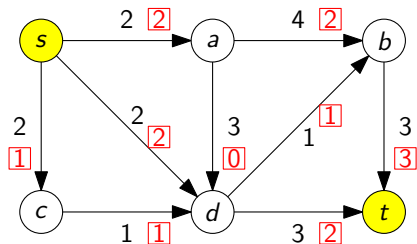
元のネットワーク



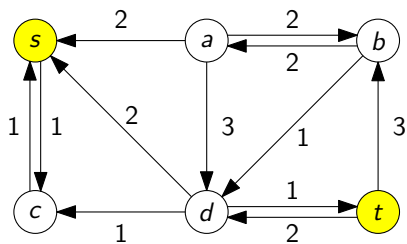
補助ネットワーク

## 増加道法の動き (4)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて、 $s$  を始点、 $t$  を終点とする道を見つける



元のネットワーク

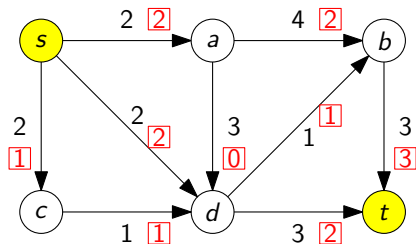


補助ネットワーク

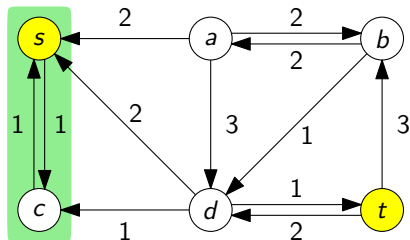
しかし、見つからない！ (存在しない)  $\rightsquigarrow$  アルゴリズムは次の段階へ

## 増加道法の動き (4)：到達可能頂点の探索

補助ネットワークにおいて、 $s$  から到達可能な頂点をすべて見つける



元のネットワーク



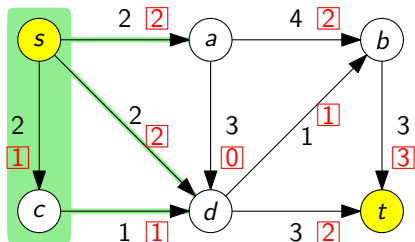
補助ネットワーク

$$S = \left\{ v \in V \mid \begin{array}{l} \text{補助ネットワークにおいて、} s \text{ を始点として、} \\ v \text{ を終点とする道が存在する} \end{array} \right\}$$

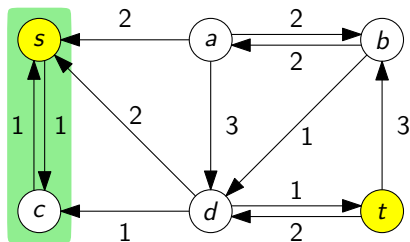
⇨ この  $S$  は  $s, t$  カットである (なぜか?)

## 増加道法の動き (4)：最小カットの発見

元の有向グラフにおいて、この  $s, t$  カット  $S$  の容量  $\text{cap}(S)$  を見る



元のネットワーク



補助ネットワーク

⇨ この容量  $\text{cap}(S)$  は得られた流れの値に等しい

- ▶ つまり、最大流と最小  $s, t$  カットが得られた！ (アルゴリズム停止)



## 増加道法：動きのまとめ

有向グラフ  $G = (V, A)$ , 容量  $c: A \rightarrow \mathbb{R}$ , 2 頂点  $s, t$

## アルゴリズム：増加道法

初期化：流れ  $f := 0$

- 1  $f$  に対する補助ネットワーク ( $G_f$  と  $c_f$ ) を作る
- 2  $G_f$  において  $s$  を始点,  $t$  を終点とする道を見つける
- 3 存在するとき, その道に沿って流れを増加. 1 に戻る
- 4 存在しないとき,  $f$  を出力

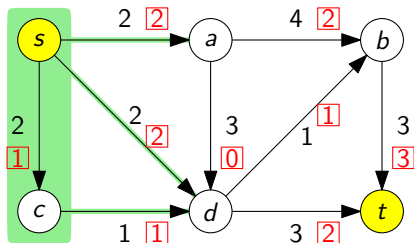
今から証明すること

- ▶ 増加道法が停止したとき, 最大流を出力すること (正当性)
- ▶ 増加道法が必ず停止すること (停止性)

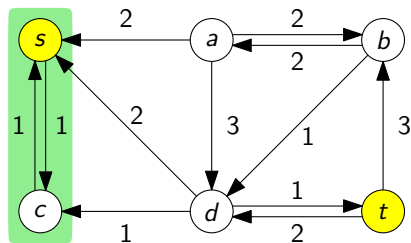
注：とりあえず, アルゴリズムの「効率性」は無視

## 増加道法の正当性：例

なぜ、これが最大流なのか？



元のネットワーク

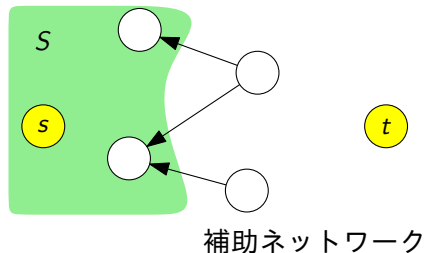
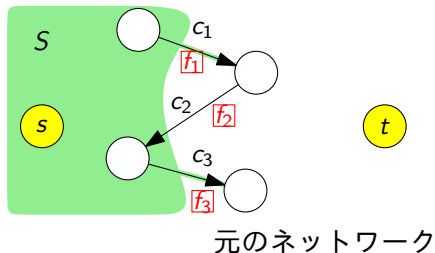


補助ネットワーク

- ▶ 補助ネットワークにおいて、 $S$  から出ていく弧は存在しない
- ▶  $S$  から出る総流量 = 5 なので、 $\text{val}(f) \geq 5$
- ▶ 一方で、 $\text{cap}(S) = 5$ . つまり、 $\text{val}(f) \leq 5$
- ▶  $\therefore \text{val}(f) = 5$  であり、 $\text{cap}(S) = 5$

## 増加道法の正当性：証明 (1)

## 増加道法の正当性

増加道法が停止したとき、その出力  $f$  は最大流である証明：増加道法が停止したときの状況を考える

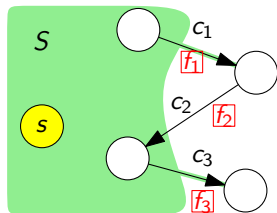
## 増加道法の正当性：証明 (1)

## 増加道法の正当性

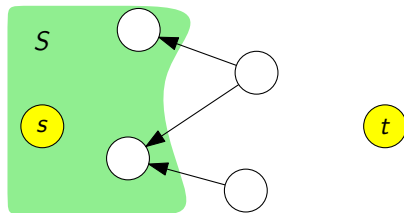
増加道法が停止したとき、その出力  $f$  は最大流である

証明：増加道法が停止したときの状況を考える

- ▶ 出力  $f$  に対する補助ネットワークにおいて、 $s$  から到達可能な頂点全体の集合を  $S$  とする



元のネットワーク



補助ネットワーク

## 増加道法の正当性：証明 (1)

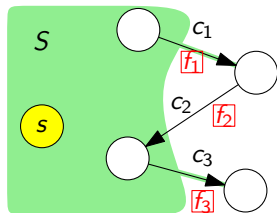
### 増加道法の正当性

増加道法が停止したとき、その出力  $f$  は最大流である

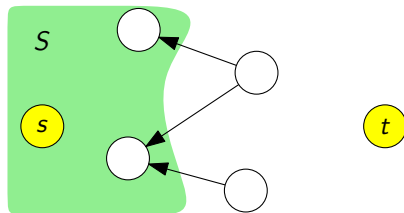
証明：増加道法が停止したときの状況を考える

- ▶ 出力  $f$  に対する補助ネットワークにおいて、 $s$  から到達可能な頂点全体の集合を  $S$  とする
- ▶  $S$  は  $s, t$  カットである

(なぜか?)



元のネットワーク



補助ネットワーク

## 増加道法の正当性：証明 (1)

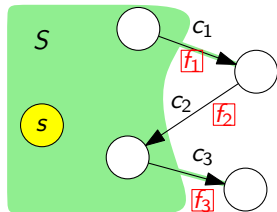
## 増加道法の正当性

増加道法が停止したとき、その出力  $f$  は最大流である

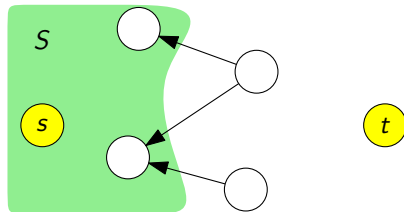
証明：増加道法が停止したときの状況を考える

- ▶ 出力  $f$  に対する補助ネットワークにおいて、 $s$  から到達可能な頂点全体の集合を  $S$  とする
- ▶  $S$  は  $s, t$  カットである
- ▶ つまり、補助ネットワークの弧  $(u, v) \in A_f$  で  $u \in S$  かつ  $v \notin S$  となるものは存在しない

(なぜか?)



元のネットワーク

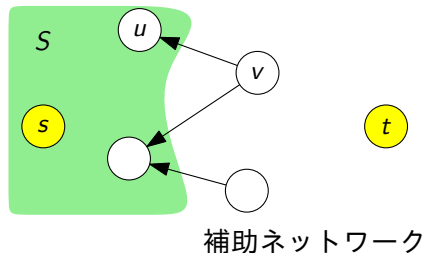
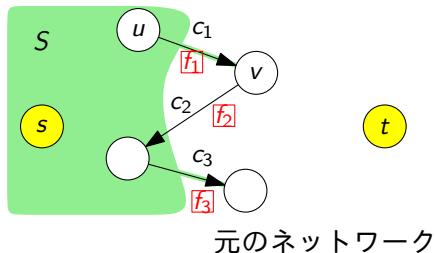


補助ネットワーク

## 増加道法の正当性：証明 (2)

元のネットワークの弧  $(u, v) \in A$  で  $u \in S, v \notin S$  であるものを考える

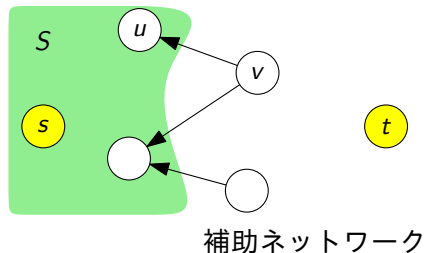
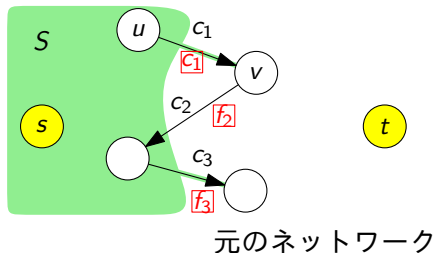
- ▶  $(u, v) \notin A_f$  であるので、特に  $(u, v) \notin A_f^E$
- ▶  $(u, v) \notin A_f^E$  より、 $f((u, v)) = c((u, v))$



## 増加道法の正当性：証明 (2)

元のネットワークの弧  $(u, v) \in A$  で  $u \in S, v \notin S$  であるものを考える

- ▶  $(u, v) \notin A_f$  であるので、特に  $(u, v) \notin A_f^E$
- ▶  $(u, v) \notin A_f^E$  より、 $f((u, v)) = c((u, v))$

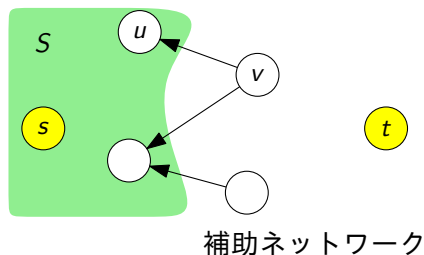
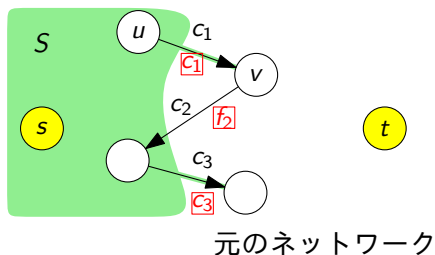




## 増加道法の正当性：証明 (2)

元のネットワークの弧  $(u, v) \in A$  で  $u \in S, v \notin S$  であるものを考える

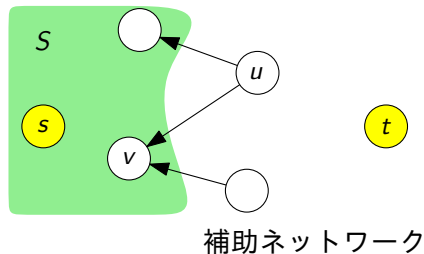
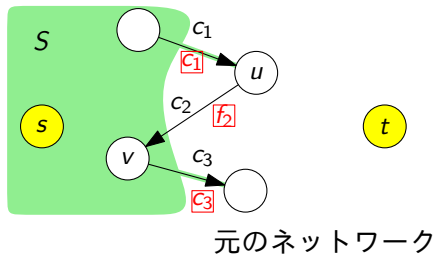
- ▶  $(u, v) \notin A_f$  であるので、特に  $(u, v) \notin A_f^E$
- ▶  $(u, v) \notin A_f^E$  より、 $f((u, v)) = c((u, v))$



## 増加道法の正当性：証明 (3)

元のネットワークの弧  $(u, v) \in A$  で  $u \notin S, v \in S$  であるものを考える

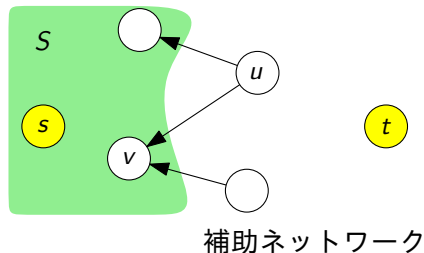
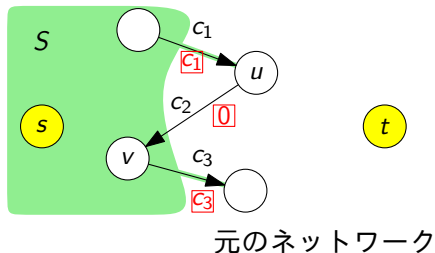
- ▶  $(v, u) \notin A_f$  であるので、特に  $(v, u) \notin A_f^B$
- ▶  $(v, u) \notin A_f^B$  より、 $f((u, v)) = 0$



## 増加道法の正当性：証明 (3)

元のネットワークの弧  $(u, v) \in A$  で  $u \notin S, v \in S$  であるものを考える

- ▶  $(v, u) \notin A_f$  であるので、特に  $(v, u) \notin A_f^B$
- ▶  $(v, u) \notin A_f^B$  より、 $f((u, v)) = 0$



## 増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$\text{val}(f) \stackrel{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u,v))$$

### 補足

この  $S$  は最小  $s, t$  カットである

## 増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$\begin{aligned} \text{val}(f) &\stackrel{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u, v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u, v)) \\ &= \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u, v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} 0 \end{aligned}$$

### 補足

この  $S$  は最小  $s, t$  カットである

## 増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$\begin{aligned}
 \text{val}(f) &\stackrel{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u,v)) \\
 &= \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} 0 \\
 &= \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v))
 \end{aligned}$$

## 補足

この  $S$  は最小  $s, t$  カットである

## 増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$\begin{aligned}
 \text{val}(f) &\stackrel{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u,v)) \\
 &= \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} 0 \\
 &= \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v)) \\
 &= \text{cap}(S)
 \end{aligned}$$

## 補足

この  $S$  は最小  $s, t$  カットである

## 増加道法の正当性：証明 (4)

以上をまとめると

$$\begin{aligned}
 \text{val}(f) &\stackrel{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u,v)) \\
 &= \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} 0 \\
 &= \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v)) \\
 &= \text{cap}(S)
 \end{aligned}$$

つまり、 $\text{val}(f) = \text{cap}(S)$  となり、弱双対性より、 $f$  は最大流である  $\square$

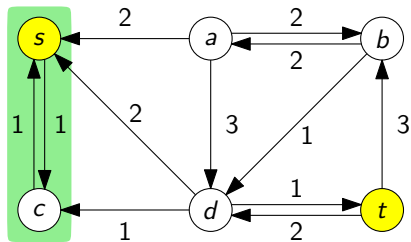
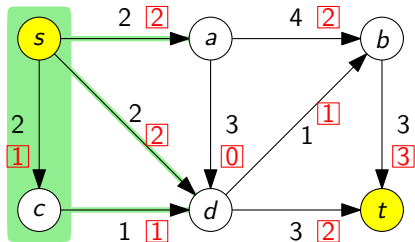
## 補足

この  $S$  は最小  $s, t$  カットである



## 増加道法の停止性：略証

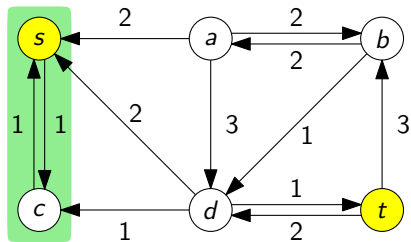
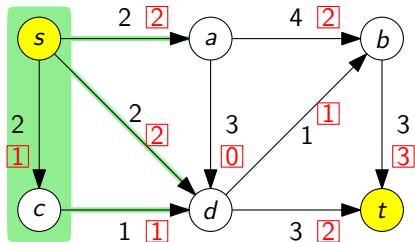
なぜ増加道法は停止するのか？



- ▶ 容量は整数なので，最小  $s, t$  カットの容量も整数
- ▶ 容量は整数なので，補助ネットワークの容量も 1 以上の整数

## 増加道法の停止性：略証

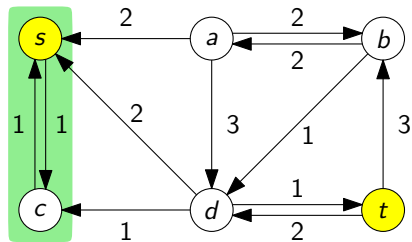
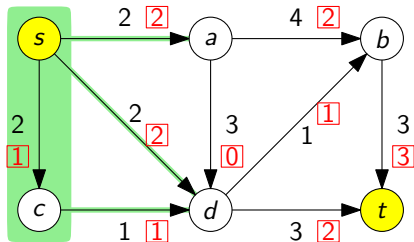
なぜ増加道法は停止するのか？



- ▶ 容量は整数なので，最小  $s, t$  カットの容量も整数
- ▶ 容量は整数なので，補助ネットワークの容量も 1 以上の整数
- ▶  $\therefore$  反復が行われる度に，流れの値は 1 以上増える

## 増加道法の停止性：略証

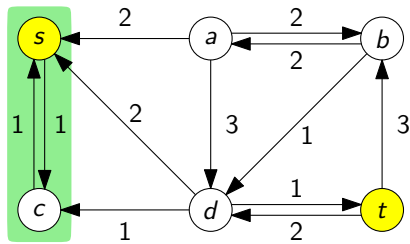
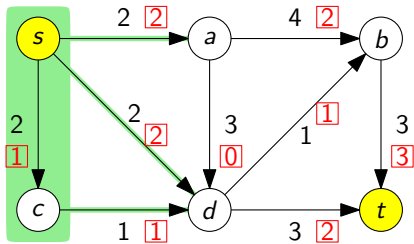
なぜ増加道法は停止するのか？



- ▶ 容量は整数なので，最小  $s, t$  カットの容量も整数
- ▶ 容量は整数なので，補助ネットワークの容量も 1 以上の整数
- ▶  $\therefore$  反復が行われる度に，流れの値は 1 以上増える
- ▶  $\therefore$  反復回数は高々最小  $s, t$  カットの容量で，これは有限 □

## 整数流定理

- つまり、容量が整数であるならば、出力される最大流も整数



### 整数流定理 (重要)

容量が整数  $\Rightarrow$  どの弧に流れる量も整数である最大流が存在

最大流の値が整数であり、なおかつ、どの弧に流れる量も整数

## 増加道法に対する注意

## 注意 1

弧の容量に無理数が出てくるとき、

- ▶ 増加道法が有限ステップで終了しないこともある
- ▶ 増加道法の収束先が最大流ではないこともある
- ▶ その2つが同時に起こることもある

## 注意 2

増加道法における、増加道の選び方は工夫できる

- ▶ 工夫しない (Ford-Fulkerson のアルゴリズム)
- ▶ 幅優先探索を用いる (Edmonds-Karp のアルゴリズム)

Edmonds-Karp のアルゴリズムは多項式時間アルゴリズムである  
(Ford-Fulkerson のアルゴリズムはそうではない)

## 目次

- ① 最大流問題とは？
- ② 流れとカットの弱双対性
- ③ 流れとカットの強双対性：最大流最小カット定理
- ④ 今日のまとめ

## 今日のまとめ

## 今日の目標

最大流問題に関して次ができるようになる

- ▶ 「流れ」が何であるのか記述でき、基本性質を証明できる
- ▶ **流れとカットの双対性**により流れの最大性を証明できる

## 重要な定理

- ▶ 最大流最小カット定理
- ▶ 整数流定理

## 次回予告

最大流を用いた数理モデル化

## 残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
  - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
  - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - ▶ 内容は何でも OK
  - ▶ 匿名で OK



## 目次

- ① 最大流問題とは？
- ② 流れとカットの弱双対性
- ③ 流れとカットの強双対性：最大流最小カット定理
- ④ 今日のまとめ