

グラフとネットワーク第 13 回
平面グラフ：モデル化

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 7 月 24 日

最終更新：2017 年 7 月 21 日 12:45

スケジュール 前半 (予定)

- 1 グラフの定義と次数：数理 (4/10)
- 2 道と閉路：数理 (4/17)
- 3 木：数理 (4/24)
- 4 マッチング：数理 (5/1)
- 5 マッチング：モデル化 (5/8)
- 6 最大流：数理 (5/15)
- 7 最大流：モデル化 (1) (5/22)
- 8 最大流：モデル化 (2) (5/29)
- 9 連結性：数理とモデル化 (6/5)
 - 中間試験 (6/12)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- 10 彩色：数理 (6/19)
- 11 彩色：モデル化 (6/26)
 - * 休講 (出張) (7/3)
- 12 平面グラフ：数理 (7/10)
 - * 休講 (海の日) (7/17)
- 13 平面グラフ：モデル化 (7/24)
- 14 予備日 (やらない) (7/31)
 - 期末試験 (8/7)

注意：予定の変更もありうる

概要

今日の目標

平面グラフの彩色を用いて次の問題を解決する

- ▶ 地図の彩色
- ▶ 美術館の監視

目次

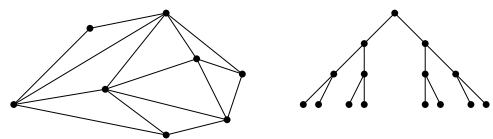
- 1 平面的グラフと平面グラフ (復習)
- 2 地図の彩色
- 3 美術館の監視
- 4 今日のまとめ と 講義全体のまとめ

グラフの平面描画

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの平面描画とは？

グラフ G の平面描画とは、 G の描画で、辺を表す曲線どうしが端点以外に共有点を持たないこと



平面描画のことを平面グラフとも呼ぶ

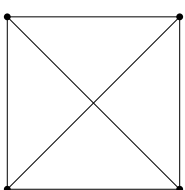
平面的グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

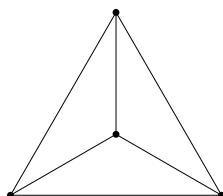
平面的グラフとは？

G が平面的グラフであるとは、 G が平面描画を持つこと

例： K_4 は平面的グラフである



K_4 の非平面描画



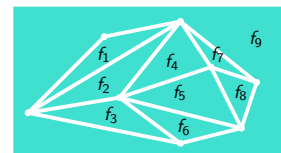
K_4 の平面描画

平面グラフの面

平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

平面グラフの面とは？ (常識に基づく定義)

G の面とは、 G の辺 (を表す曲線) で囲まれた平面上の領域のこと



G の面で非有界であるものを G の外面と呼ぶ

オイラーの公式

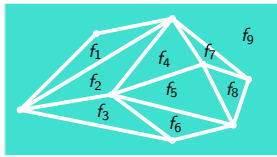
平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

オイラーの公式

G の頂点数が n , 辺数が m , 面数が f , 連結成分数が k のとき,

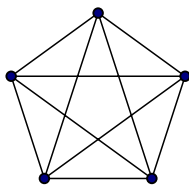
$$n - m + f = 1 + k$$

特に, G が連結ならば, $k = 1$ なので, $n - m + f = 2$



- ▶ $n = 8$
- ▶ $m = 15$
- ▶ $f = 9$
- ▶ $k = 1$
- ▶ $n - m + f = 2$

このグラフは平面的グラフか?: 証明



平面的ではない

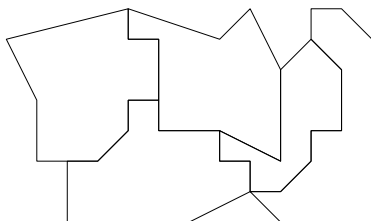
- ▶ 頂点数 $|V|$ は 5, 辺数 $|E|$ は 10
- ▶ $3|V| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9 < 10 = |E|$
- ▶ $\therefore |E| \leq 3|V| - 6$ を満たさないので, 平面的グラフではない \square

地図の彩色



地図の数学的モデル化

地図は, 平面上の領域を複数の部分領域へ分割したものとみなす



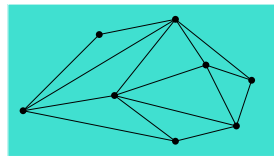
平面的グラフの辺数

連結無向グラフ $G = (V, E)$

平面的グラフの辺数は小さい

G が平面的で, $|V| \geq 3$ ならば,

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

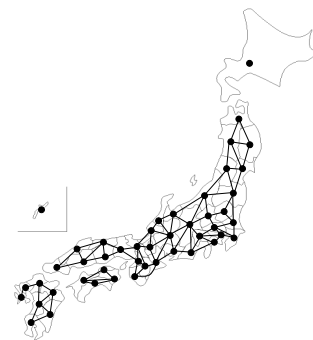


- ▶ $|V| = 8$
- ▶ $3|V| - 6 = 18$
- ▶ $|E| = 15$

目次

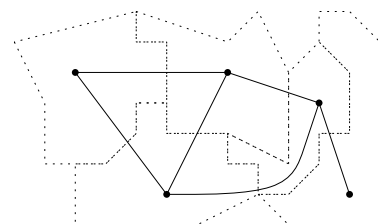
- ① 平面的グラフと平面グラフ (復習)
- ② 地図の彩色
- ③ 美術館の監視
- ④ 今日のまとめ と 講義全体のまとめ

地図からグラフへ

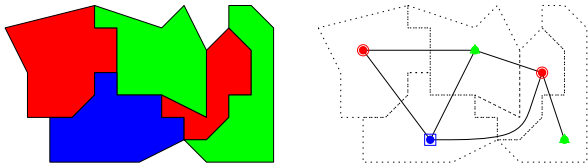


双対グラフ

領域分割の**双対グラフ**とは, 無向グラフで各頂点が分割された部分領域に対応し, 各辺が境界を (1 次的に) 共有する 2 つの部分領域に対応するもの

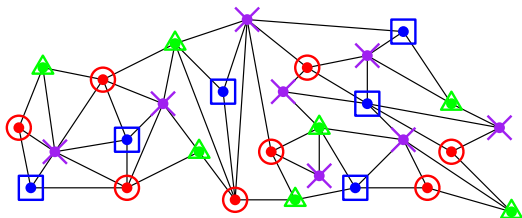


地図の彩色 = その双対グラフの彩色



目標

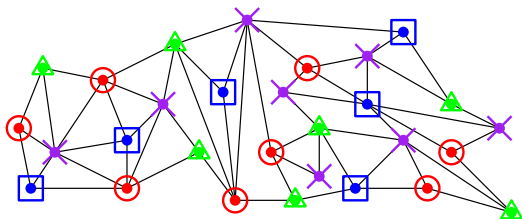
平面的グラフをできるだけ少ない色で彩色する



4 色必要とする平面的グラフは存在

今から証明すること：六色定理

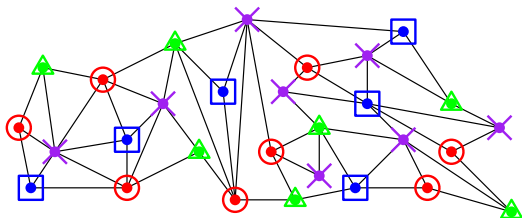
任意の平面的グラフは 6 彩色可能



使用する道具は、オイラーの公式と帰納法のみ

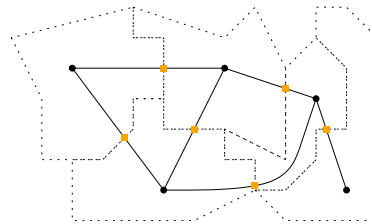
補題

平面的グラフには、必ず次数が 5 以下の頂点が存在する



重要な性質 (証明は略)

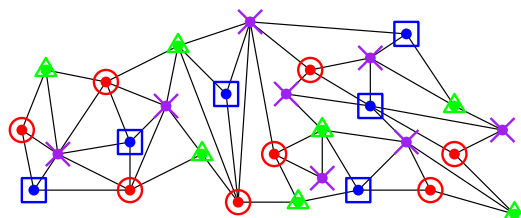
地図の双対グラフは平面的グラフである



つまり、平面的グラフの彩色ができれば、地図の彩色もできる

四色定理 (Appel, Haken '77)

任意の平面的グラフは 4 彩色可能



証明はコンピュータを使った膨大な場合分けによる

証明：頂点数 n に関する帰納法

- ▶ 頂点数が 1 から 6 のとき、頂点の数だけ色を使えば彩色可能なのでグラフは 6 彩色可能である
- ▶ 頂点数 n の任意の平面的グラフが 6 彩色可能であると仮定する
- ▶ このとき、頂点数 $n+1$ の任意の平面的グラフが 6 彩色可能であることを証明する

補題

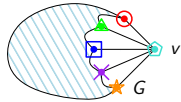
平面的グラフには、必ず次数が 5 以下の頂点が存在する

補題の証明：

- ▶ 頂点数が 3 未満のとき、すべての頂点の次数は 2 以下なので、正しい
- ▶ 頂点数が 3 以上である任意の平面的グラフ $G = (V, E)$ を考える
- ▶ $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$ (オイラーの公式の帰結)
- ▶ G の平均次数 $= \frac{2|E|}{|V|}$ (握手補題の帰結)
- ▶ $\therefore G$ の平均次数 $\leq \frac{2 \cdot (3 \cdot |V| - 6)}{|V|} = 6 - \frac{12}{|V|} < 6$
- ▶ \therefore ある頂点の次数 < 6
- ▶ \therefore ある頂点の次数 ≤ 5 □

頂点数 $n + 1$ の任意の平面的グラフを $G = (V, E)$ とする

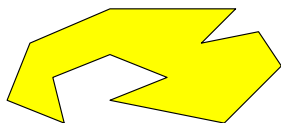
- ▶ 補題より、次数 5 以下の頂点が G に存在する
- ▶ そのような頂点を $v \in V$ として、 $G - v$ を考える
- ▶ $G - v$ は頂点数 n の平面的グラフなので、6 彩色可能
(\because 帰納法の仮定)
- ▶ $G - v$ の 6 彩色において、 v の (G における) 隣接頂点を見ると
高々 5 色しか使われてない
($\because v$ の次数 ≤ 5)
- ▶ すなわち、 $G - v$ の 6 彩色に、 v を付け加えて、
 v の隣接頂点で使われていない色を
 $G - v$ の 6 彩色で使ったパレットから選び
その色で v を塗ることにより、 G の 6 彩色が得られる □



- ① 平面的グラフと平面グラフ (復習)
- ② 地図の彩色
- ③ 美術館の監視
- ④ 今日のまとめ と 講義全体のまとめ

単純多角形

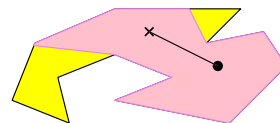
単純多角形：自己交差を持たず、穴も持たない多角形



これが美術館の 1 つのフロアを表していると思う

単純多角形における監視員

監視員は点



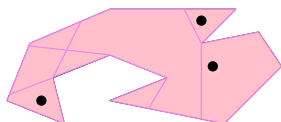
監視員 g が点 p を見ることができるとは？

線分 gp が多角形 P に含まれている

単純多角形の監視

監視員の集合 $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ が多角形 P を監視するとは？

任意の点 $x \in P$ に対して、ある監視員 g_i が存在して
 g_i が x を見ることができる

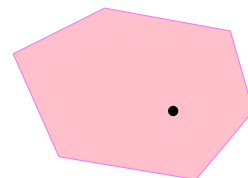


目標

できるだけ少ない数の監視員で、与えられた単純多角形を監視したい

簡単な場合：凸多角形の監視

凸多角形は 1 人で監視できる



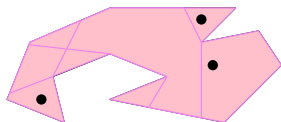
監視員は多角形のどこに置いてよい

単純多角形の監視：定理

美術館定理 (Chvátal '75)

頂点数 n の任意の単純多角形は、高々 $\lfloor n/3 \rfloor$ 人の監視員で監視可能

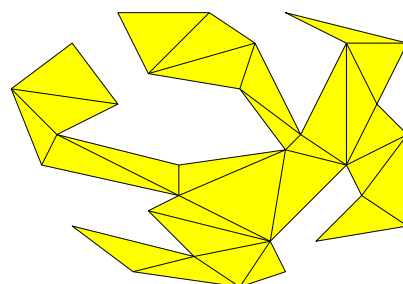
例： $n = 13$, $\lfloor n/3 \rfloor = \lfloor 13/3 \rfloor = 4$



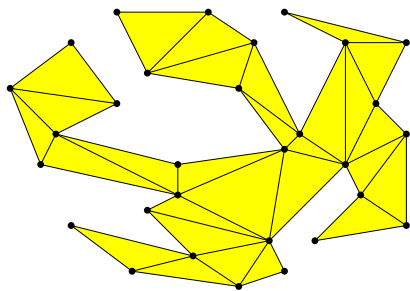
今から行う証明は Fisk ('78) による

単純多角形の監視：証明

基本的なアイデア：単純多角形の三角形分割

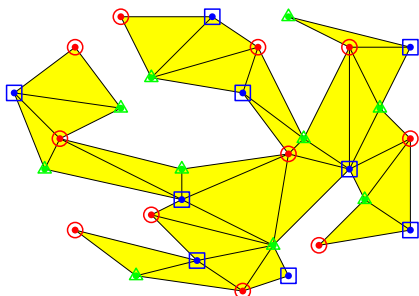


三角形分割をグラフであると見なす



これは外平面グラフ (すべての頂点が外面の境界上にある)

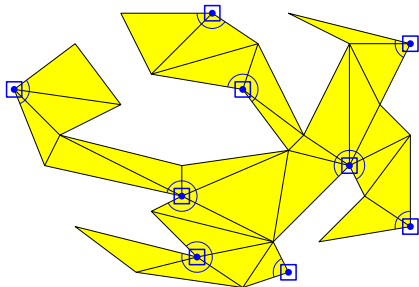
三角形分割における各三角形には 3 色すべて現れている



総頂点数 = 30,

●赤頂点数 = 11, ■青頂点数 = 9, ▲緑頂点数 = 10

その色で塗られた頂点に監視員を置けばよい



- ▶ 三角形分割におけるすべての三角形が監視できる
- ▶ すなわち、多角形全体が監視できる



今日のまとめ

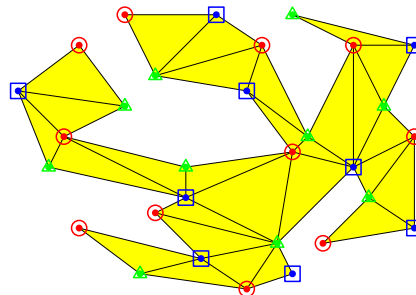
平面グラフの彩色を用いて次の問題を解決する

- ▶ 地図の彩色
- ▶ 美術館の監視

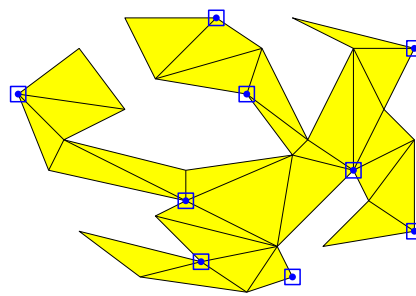
補題 (演習問題)

頂点数 n の任意の外平面的グラフは 3 彩色可能

ヒント：四色定理を使ってもよい (四色定理を使わなくても証明可)



最も使われていない色の頂点数 $\leq \lfloor n/3 \rfloor$



総頂点数 = 30,

●赤頂点数 = 11, ■青頂点数 = 9, ▲緑頂点数 = 10

- ① 平面的グラフと平面グラフ (復習)
- ② 地図の彩色
- ③ 美術館の監視
- ④ 今日のまとめ と 講義全体のまとめ

主題

離散最適化の入門として、次を概説する

- ▶ グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- ▶ アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

達成目標

以下の 4 項目をすべて達成すること

- 1 グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
- 2 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し、数理モデルを構築できる
- 3 アルゴリズム的解法の背後にある数理、特に、最小最大定理の重要性を説明でき、それを用いて最適性の証明ができる
- 4 グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる