グラフとネットワーク第 12 回
平面グラフ：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 7 月 10 日

最終更新：2017 年 7 月 2 日　21:20

スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの定義と次数：数理 (4/10)
2. 道と閉路：数理 (4/17)
3. 木：数理 (4/24)
4. マッチング：数理 (5/1)
5. マッチング：モデル化 (5/8)
6. 最大流：数理 (5/15)
7. 最大流：モデル化 (1) (5/22)
8. 最大流：モデル化 (2) (5/29)
9. 連結性：数理とモデル化 (6/5)

- 中間試験 (6/12)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

10. 彩色：数理 (6/19)
11. 彩色：モデル化 (6/26)

- ∗ 休講 (出張) (7/3)

12. 平面グラフ：数理 (7/10)

- ∗ 休講 (海の日) (7/17)

13. 平面グラフ：モデル化 (7/24)
14. 予備日 (やらない) (7/31)

- 期末試験 (8/7)

注意：予定の変更もありうる

概要

今日の目標

平面グラフに関する基礎を理解し，次ができるようになる
- 平面グラフの構造 (頂点，辺，面) を記述できる
- オイラーの公式を用いて平面的グラフではないことの証明ができる

注意：「平面グラフ」と「平面的グラフ」の違い

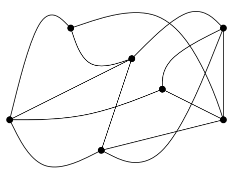
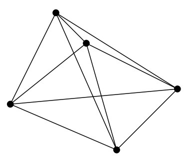
目次

グラフの描画

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの描画とは？

グラフ G の描画とは，平面上に次のように G を表現したもの
- 各頂点 $v \in V$ は平面上の点
- 各辺 $\{u, v\} \in E$ は u と v を表す点を結ぶ (自己交差のない) 曲線

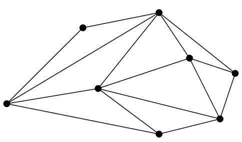
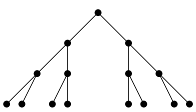



グラフの平面描画

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの平面描画とは？

グラフ G の平面描画とは，G の描画で，
辺を表す曲線どうしが端点以外に共有点を持たないこと

平面描画のことを平面グラフとも呼ぶ

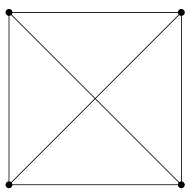
平面的グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

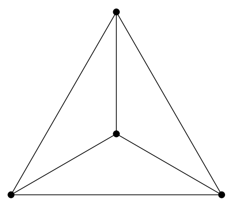
平面的グラフとは？

G が平面的グラフであるとは，G が平面描画を持つこと

例：K_4 は平面的グラフである

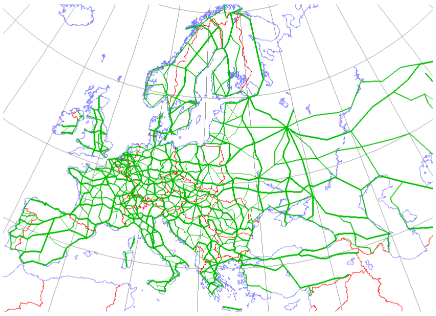


K_4 の非平面描画



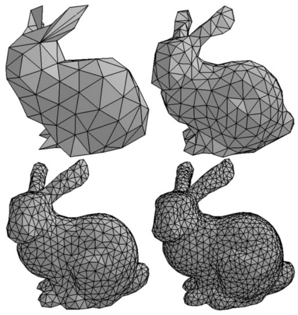
K_4 の平面描画

平面グラフが出てくる場面 (1)：道路ネットワーク



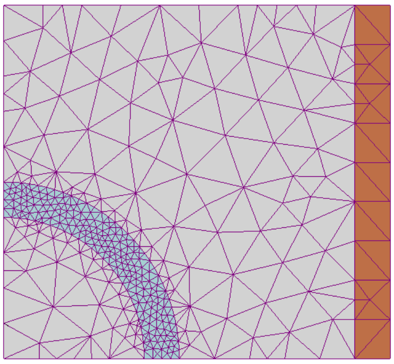
http://en.wikipedia.org/wiki/File:International_E_Road_Network_green.png

平面グラフが出てくる場面 (2)：コンピュータグラフィックス (立体モデリング)



https://humaan.com/blog/web-3d-graphics-using-three-js/

平面グラフが出てくる場面 (3)：2 次元有限要素法 (三角形メッシュ)

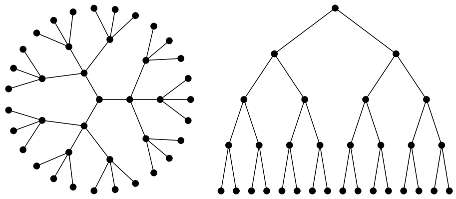


http://en.wikipedia.org/wiki/File:Example_of_2D_mesh.png

木は平面的グラフである

観察

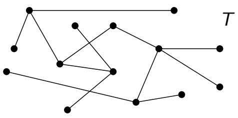
木は平面的グラフである



木は平面的グラフである：証明 (1)

証明：頂点数 n に関する帰納法

- $n = 1$ のとき，グラフは辺を持たないので，平面的である
- $n = k \geq 1$ のとき，頂点数 k の任意の木が平面的グラフであると仮定
- $n = k + 1 \geq 2$ のとき，頂点数 $k + 1$ の任意の木 T を考える



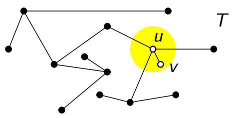
木の性質 (復習)

- 頂点数 2 以上の木は，次数 1 の頂点 (葉) を持つ
- 木から葉を除去しても木である

木は平面的グラフである：証明 (2)

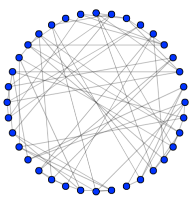
証明：頂点数 n に関する帰納法

- T の任意の葉 v を考え，v に隣接する頂点を u とする
- $T - v$ は頂点数 k の木なので，帰納法の仮定から，$T - v$ は平面的グラフである
- すなわち，$T - v$ は平面描画を持つ
- $T - v$ の平面描画において，u を表す点の周りに v を表す点と辺 $\{u, v\}$ を表す曲線を描く余白がある
- したがって，T も平面描画を持つ □



目次

このグラフは平面的グラフか？

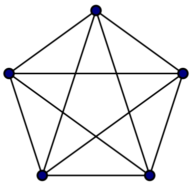


平面的グラフであることを証明するには？

平面描画を見つければよい

http://planarity.net/で，平面描画を作る練習ができる

このグラフは平面的グラフか？



平面的グラフでないことを証明するには？

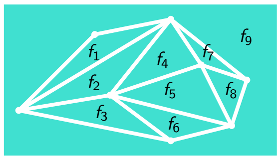
「どうやっても平面描画が作れないから」ではもちろん不十分

平面グラフの面

平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

平面グラフの面とは？ (常識に基づく定義)

G の面とは，G の辺 (を表す曲線) で囲まれた平面上の領域のこと



G の面で非有界であるものを G の外面と呼ぶ

オイラーの公式

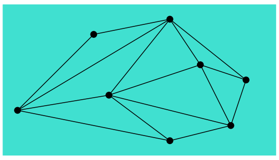
平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

オイラーの公式

G の頂点数が n，辺数が m，面数が f，連結成分数が k のとき，

$$n - m + f = 1 + k$$

特に，G が連結ならば，$k = 1$ なので，$n - m + f = 2$

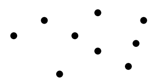


- $n = 8$
- $m = 15$
- $f = 9$
- $k = 1$
- $n - m + f = 8 - 15 + 9 = 2$

オイラーの公式：証明 (1)

証明：辺数 m に関する帰納法

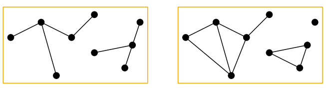
- $m = 0$ のとき
- $n = k$ であり，かつ，$f = 1$
- したがって，$n - m + f = k - 0 + 1 = 1 + k$



- 辺数 $m \geq 0$ の平面グラフがオイラーの公式を満たすと仮定
- 辺数 $m + 1 \geq 1$ の任意の平面グラフ G' を考える

オイラーの公式：証明 (2)

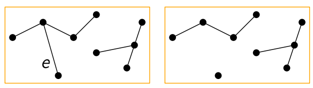
- 辺数 $m' = m + 1 \geq 1$ の任意の平面グラフ G' を考える
- G' の頂点数を n', 面数を f'，連結成分数を k' とする
- 証明すべきことは，$\boxed{n' - m' + f' = 1 + k'}$
- 場合分け
  1. G' が閉路を含まない場合
  2. G' が閉路を含む場合

(1)  (2)

オイラーの公式：証明 (3)

場合 (1)：G' が閉路を含まない場合

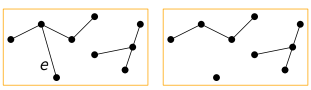
- すなわち，G' は森であり，$f' = 1$
- $m' \geq 1$ なので，G' は辺を持つ
- G' の辺を任意に 1 つ選び，e とする
- $G = G' - e$ として，
  G の頂点数，辺数，面数，連結成分数をそれぞれ n, m, f, k とする

G'  $G{=}G'{-}e$

オイラーの公式：証明 (4)

場合 (1)：G' が閉路を含まない場合

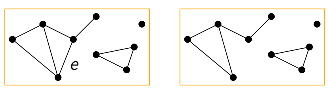
- 帰納法の仮定より，$n - m + f = 1 + k$ である
- G も森なので，$f = 1 = f'$
- 森の連結成分は木であり，木の任意の辺は切断辺なので，$k = k' + 1$
  (第 3 回スライド 26 ページ)
- さらに，$n = n'$ かつ $m = m' - 1$
- したがって，$n' - (m' - 1) + f' = 1 + (k' + 1)$ となる
- ゆえに，$n' - m' + f' = 1 + k'$ となり，この場合の証明は終わる

G'  $G{=}G'{-}e$

オイラーの公式：証明 (5)

場合 (2)：G' が閉路を含む場合

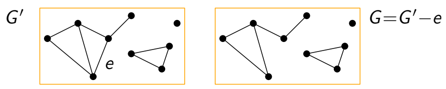
- G' の閉路に含まれる辺を任意に 1 つ選び，e とする
- $G = G' - e$ として，
  G の頂点数，辺数，面数，連結成分数をそれぞれ n, m, f, k とする

G'  $G{=}G'{-}e$

オイラーの公式：証明 (6)

場合 (2)：G' が閉路を含む場合

- 帰納法の仮定より，$n - m + f = 1 + k$ である
- 閉路に含まれる辺は切断辺ではないので，$k = k'$ (第 3 回スライド 38 ページ)
- e を除去することで，e を境界上に持つ 2 つの面が 1 つになるので，$f = f' - 1$
- さらに，$n = n'$ かつ $m = m' - 1$
- したがって，$n' - (m' - 1) + (f' - 1) = 1 + k'$ となる
- ゆえに，$n' - m' + f' = 1 + k'$ となり，この場合の証明も終わる □



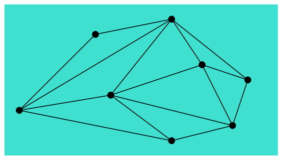
平面的グラフの辺数

連結無向グラフ $G = (V, E)$

平面的グラフの辺数は小さい

G が平面的で，$|V| \geq 3$ ならば，

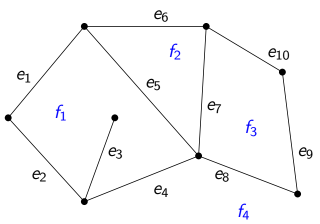
$$|E| \leq 3|V| - 6$$



- $|V| = 8$
- $3|V| - 6 = 18$
- $|E| = 15$

平面的グラフの辺数：証明のあらすじ

数え上げ論法 ＋ オイラーの公式



$$\begin{array}{c|cccccccccc|c}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & \\
\hline
f_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \geq 3 \\
f_2 & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & \geq 3 \\
f_3 & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \geq 3 \\
f_4 & 1 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & 1 & 1 & \geq 3 \\
\hline
 & \rotatebox{90}{$\leq$} & \rotatebox{90}{$\leq$} & \rotatebox{90}{$\leq$} & \rotatebox{90}{$\leq$} & \rotatebox{90}{$\leq$} & \rotatebox{90}{$\leq$} & \rotatebox{90}{$\leq$} & \rotatebox{90}{$\leq$} & \rotatebox{90}{$\leq$} & \rotatebox{90}{$\leq$} & \\
 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 &
\end{array}$$

- $3f \leq 2m$
- オイラーの公式より，$2 \leq 1 + k = n - m + f \leq n - m + \frac{2}{3}m$
- $\therefore m \leq 3n - 6$ □

注：$n = 3$ のときだけ個別の扱いが必要

平面的グラフの辺数：証明 (1)

- 頂点数 $|V| = 3$ のとき，連結グラフの辺数 $|E|$ は 3 以下
- よって，$|E| \leq 3 = 3 \cdot 3 - 6 = 3 \cdot |V| - 6$ で成立

- したがって，$|V| \geq 4$ と仮定
- ここで，辺集合を E，面集合を F として，数え上げ論法を適用
- 行列 $M \in \mathbb{R}^{E \times F}$ を次で定義する

$$\text{任意の } e \in E, f \in F \text{ に対して，} \quad M_{e,f} = \begin{cases} 1 & (e \text{ が } f \text{ の境界上にある}), \\ 0 & (e \text{ が } f \text{ の境界上にない}) \end{cases}$$

平面的グラフの辺数：証明 (2)

- $|V| \geq 4$ なので，各面 $f \in F$ の境界上には 3 つ以上辺が存在し，ゆえに

$$\sum_{e \in E} \sum_{f \in F} M_{e,f} = \sum_{f \in F} \left(\sum_{e \in E} M_{e,f} \right) \geq \sum_{f \in F} 3 = 3|F|$$

- 一方，各辺 $e \in E$ は高々2 つの面の境界にしか存在しないので

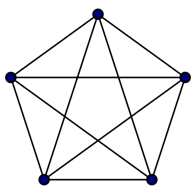
$$\sum_{e \in E} \sum_{f \in F} M_{e,f} = \sum_{e \in E} \left(\sum_{f \in F} M_{e,f} \right) \leq \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$$

- したがって，$3|F| \leq 2|E|$.
- オイラーの公式から，$|V| - |E| + |F| = 2$ が成り立つので，

$$2 = |V| - |E| + |F| \leq |V| - |E| + \frac{2}{3}|E| = |V| - \frac{1}{3}|E|$$

- したがって，$|E| \leq 3|V| - 6$ □

このグラフは平面的グラフか ?: 証明



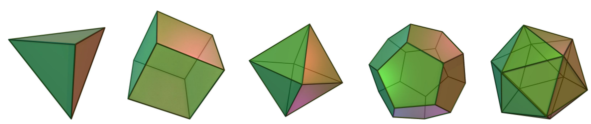
平面的ではない

- 頂点数 $|V|$ は 5，辺数 $|E|$ は 10
- $3|V| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9 < 10 = |E|$
- $\therefore |E| \leq 3|V| - 6$ を満たさないので，平面的グラフではない □

目次

正多面体 (3 次元)

正多面体とは，各面が合同な正多角形であり，
各頂点に集まる面の数が同じであるような多面体のこと



正四面体　正六面体　正八面体　正十二面体　正二十面体

http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

疑問

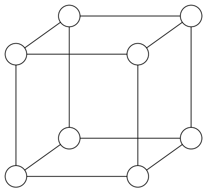
この 5 つの他に，正多面体はあるのか？

解答

この 5 つの他に，正多面体は存在しない

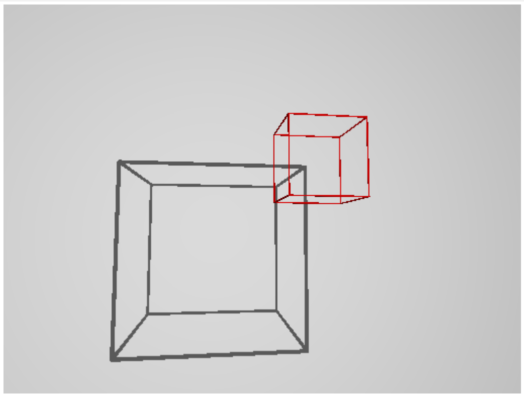
凸多面体のグラフ

凸多面体から無向グラフが作れる



- グラフの頂点 ＝ 多面体の頂点
- グラフの辺 ＝ 多面体の辺

凸多面体のグラフは平面的グラフ



正多面体の分類：証明 (1)

設定

- 頂点数 n，辺数 m，面数 f とする
- 各面が正 p 角形であるとする
- 各頂点の次数が q であるとする

- $n - m + f = 2$ (オイラーの公式)
- $qn = 2m$ (握手補題)
- $pf = 2m$ (数え上げ)
- $\therefore \frac{2m}{q} - m + \frac{2m}{p} = 2$
- $\therefore \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$
- $m \geq 1$ なので，$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$

正多面体の分類：証明 (1)

- この式 $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$ を満たす $p \geq 3$ と $q \geq 3$ は次の表の通り

p	q	n	m	f	
3	3	4	6	4	正四面体
3	4	6	12	8	正八面体
3	5	12	30	20	正二十面体
4	3	8	12	6	正六面体
5	3	20	30	12	正十二面体

- つまり，正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体以外に正多面体は存在しない □

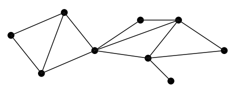
目次

グラフの外平面描画

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの外平面描画とは？

グラフ G の外平面描画とは，G の平面描画で，
すべての頂点が外面に現れているもの



外平面描画のことを外平面グラフとも呼ぶ

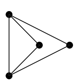
外平面的グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

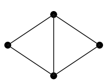
外平面的グラフとは？

G が外平面的グラフであるとは，G が外平面描画を持つこと

例：次のグラフは外平面的グラフである



平面描画だが
外平面描画ではない



外平面描画

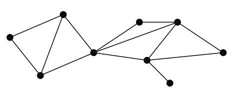
外平面的グラフの辺数

連結無向グラフ $G = (V, E)$

外平面的グラフの辺数は小さい

G が外平面的で，$|V| \geq 3$ ならば，

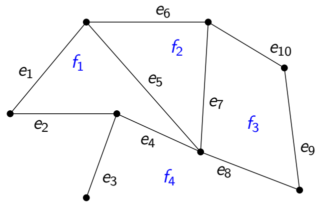
$$|E| \leq 2|V| - 3$$



- $|V| = 9$
- $2|V| - 3 = 15$
- $|E| = 13$

平面的グラフの辺数：証明のあらすじ

数え上げ論法 ＋ オイラーの公式

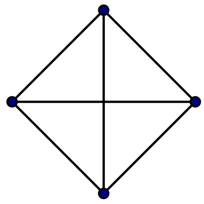


	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	
f_1	1	1		1	1						≥ 3
f_2					1	1	1				≥ 3
f_3							1	1	1	1	≥ 3
f_4	1	1	1	1		1		1	1	1	$\geq n$
	≤ 2	≤ 2	≤ 2	≤ 2	≤ 2	≤ 2	≤ 2	≤ 2	≤ 2	≤ 2	

- $3(f-1)+n \leq 2m$
- オイラーの公式より $2 \leq 1+k = n-m+f \leq n-m+\frac{2m-n+3}{3}$
- $\therefore m \leq 2n-3$ □

注意：グラフが木であるときは個別の扱いが必要 (詳細は演習問題)

次のグラフは外平面的グラフか？



外平面的ではない
- 頂点数 $|V|$ は 4，辺数 $|E|$ は 6
- $2|V|-3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5 < 6 = |E|$
- $\therefore |E| \leq 2|V|-3$ を満たさないので，外平面的グラフではない □

目次

今日のまとめ

今日の目標

平面グラフに関する基礎を理解し，次ができるようになる
- 平面グラフの構造 (頂点，辺，面) を記述できる
- オイラーの公式を用いて平面的グラフではないことの証明ができる

注意：「平面グラフ」と「平面的グラフ」の違い