

グラフとネットワーク第 10 回  
彩色：数理

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 6 月 19 日

最終更新：2017 年 6 月 10 日 13:10

スケジュール 前半 (予定)

- 1 グラフの定義と次数：数理 (4/10)
- 2 道と閉路：数理 (4/17)
- 3 木：数理 (4/24)
- 4 マッチング：数理 (5/1)
- 5 マッチング：モデル化 (5/8)
- 6 最大流：数理 (5/15)
- 7 最大流：モデル化 (1) (5/22)
- 8 最大流：モデル化 (2) (5/29)
- 9 連結性：数理とモデル化 (6/5)
  - 中間試験 (6/12)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- 10 彩色：数理 (6/19)
- 11 彩色：モデル化 (6/26)
  - \* 休講 (出張) (7/3)
- 12 平面グラフ：数理 (7/10)
  - \* 休講 (海の日) (7/17)
- 13 平面グラフ：モデル化 (7/24)
- 14 予備日 (たぶんやらない) (7/31)
  - 期末試験 (8/7)

注意：予定の変更もありうる

概要

今日の目標

グラフの彩色に関する基礎概念を理解する

- ▶ 彩色と染色数
- ▶ 染色数とクリーク数の関係 (弱双対性)
- ▶ 貪欲彩色による上界

目次

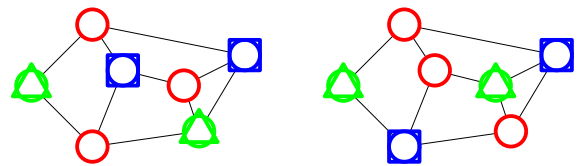
- 1 グラフの彩色と染色数
- 2 辺彩色
- 3 貪欲彩色
- 4 染色数とクリーク数の弱双対性
- 5 今日のまとめ

無向グラフの彩色

無向グラフ  $G = (V, E)$

彩色とは？ (直感的な定義)

$G$  の彩色 (さいしよく) とは、 $G$  の頂点への色の割当てで、各辺の両端点の色が異なるもの



彩色である

彩色ではない

彩色において、同じ色を持つ頂点の集合を彩色クラスとも呼ぶ

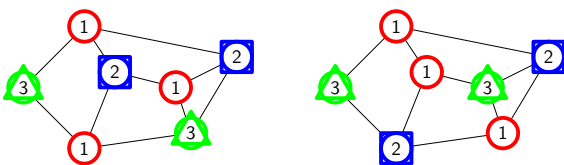
グラフの彩色と染色数

無向グラフの彩色：形式的な定義

無向グラフ  $G = (V, E)$ ，自然数  $k$

彩色とは？ (形式的な定義)

$G$  の  $k$  彩色とは、写像  $c: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  で、任意の辺  $\{u, v\} \in E$  に対して  $c(u) \neq c(v)$  を満たすもの



3 彩色である

3 彩色ではない

$c$  の終域  $\{1, \dots, k\}$  をパレットと呼ぶことがある

グラフの彩色と染色数

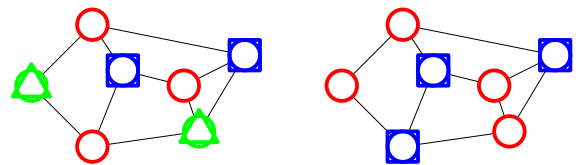
彩色可能性

無向グラフ  $G = (V, E)$ ，自然数  $k$

彩色可能性とは？

$G$  が  $k$  彩色可能であるとは、 $G$  の  $k$  彩色が存在すること

このグラフは 3 彩色可能である



3 彩色である

2 彩色は存在しない

注： $G$  が  $k$  彩色可能  $\Rightarrow G$  は  $k+1$  彩色可能

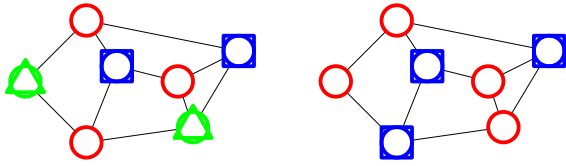
染色数

無向グラフ  $G = (V, E)$

染色数とは？

$G$  の染色数とは、 $G$  の  $k$  彩色が存在するような最小の  $k$

$G$  の染色数を  $\chi(G)$  で表す

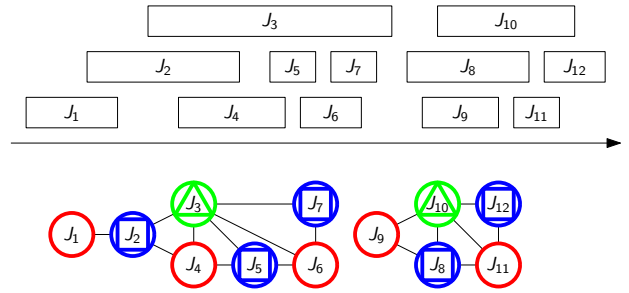


3 彩色である

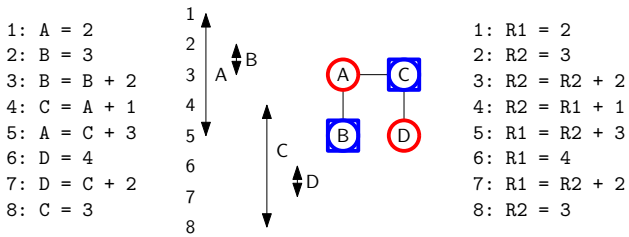
2 彩色は存在しない

∴ このグラフの染色数は 3

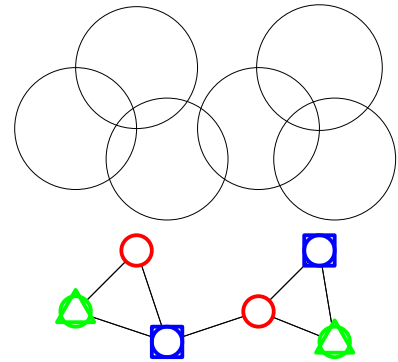
彩色が現れる場面 (1): ジョブスケジューリング



彩色が現れる場面 (2): レジスタ割当



彩色が現れる場面 (3): 移動体通信における周波数割当



2 彩色可能性と二部グラフ

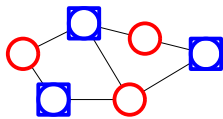
無向グラフ  $G = (V, E)$

2 彩色可能性に対する必要十分条件

$G$  は 2 彩色可能  $\Leftrightarrow G$  は二部グラフ

「 $\Rightarrow$ 」の証明:  $G$  は 2 彩色可能であるとする

- ▶  $G$  の 2 彩色を 1 つ考え、その彩色クラスを  $A, B$  とする
- ▶  $A$  の 2 頂点は辺で結ばれず、 $B$  の 2 頂点も辺で結ばれない
- ▶ ∴  $G$  は  $A, B$  を部集合とする二部グラフである



2 彩色可能性と二部グラフ (続)

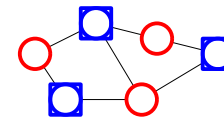
無向グラフ  $G = (V, E)$

2 彩色可能性に対する必要十分条件

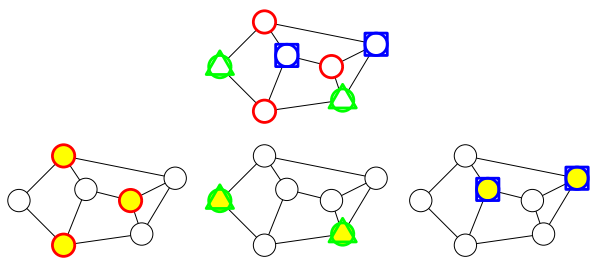
$G$  は 2 彩色可能  $\Leftrightarrow G$  は二部グラフ

「 $\Leftarrow$ 」の証明:  $G$  は二部グラフであるとする

- ▶  $G$  の部集合を  $A, B$  とする
- ▶  $A$  の 2 頂点は辺で結ばれず、 $B$  の 2 頂点も辺で結ばれない
- ▶ ∴  $G$  は  $A, B$  を彩色クラスとする 2 彩色を持つ □



彩色クラスと独立集合



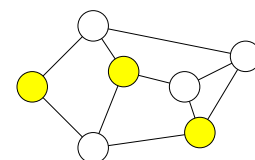
彩色の彩色クラスは独立集合  
(互いに隣接していない頂点から成る部分集合)

独立集合

無向グラフ  $G = (V, E)$

独立集合とは？

$G$  の独立集合とは、頂点部分集合  $I \subseteq V$  で、任意の異なる 2 頂点  $u, v \in I$  に対して  $\{u, v\} \notin E$

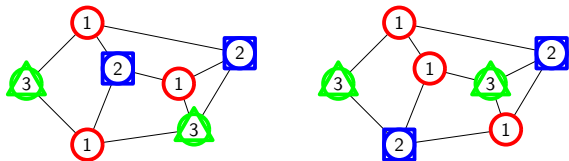


無向グラフ  $G = (V, E)$ , 自然数  $k$

彩色とは？ (独立集合を用いた定義)

$G$  の  $k$  彩色とは,  
 $k$  個の独立集合  $I_1, \dots, I_k$  への頂点集合  $V$  の分割

- $V = I_1 \cup \dots \cup I_k$
- 任意の  $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$  に対して,  $I_i \cap I_j = \emptyset$



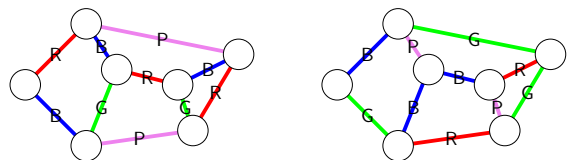
3 彩色である

3 彩色ではない

無向グラフ  $G = (V, E)$

辺彩色とは？ (直感的な定義)

$G$  の **辺彩色** (さいしよく) とは,  
 $G$  の **辺** への色の割当てで, 端点を共有する辺の色が異なるもの



辺彩色である

辺彩色ではない

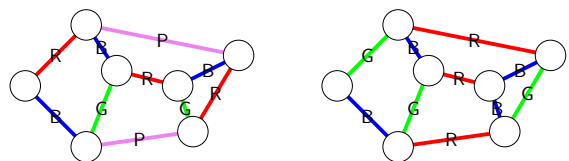
辺彩色において, 同じ色を持つ辺の集合を **彩色クラス** とも呼ぶ

無向グラフ  $G = (V, E)$ , 自然数  $k$

辺彩色可能性とは？

$G$  が  $k$  **辺彩色可能** であるとは,  $G$  の  $k$  辺彩色が存在すること

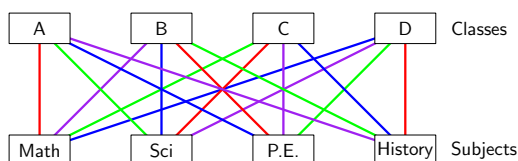
このグラフは 4 辺彩色可能である



4 辺彩色である

3 辺彩色は存在しない

注:  $G$  が  $k$  辺彩色可能  $\Rightarrow G$  は  $k + 1$  辺彩色可能



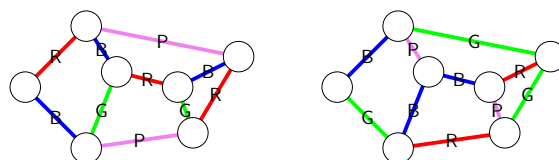
	A	B	C	D
1	Math	P.E.	Sci	History
2	Sci	History	Math	P.E.
3	P.E.	Sci	History	Math
4	History	Math	P.E.	Sci

- 1 グラフの彩色と染色数
- 2 辺彩色
- 3 貪欲彩色
- 4 染色数とクリーク数の弱双対性
- 5 今日のまとめ

無向グラフ  $G = (V, E)$ , 自然数  $k$

辺彩色とは？ (形式的な定義)

$G$  の  $k$  **辺彩色** とは, 写像  $c: E \rightarrow \{1, \dots, k\}$  で,  
 端点を共有する任意の辺  $e, f \in E$  に対して  $c(e) \neq c(f)$  を満たすもの



4 辺彩色である

4 辺彩色ではない

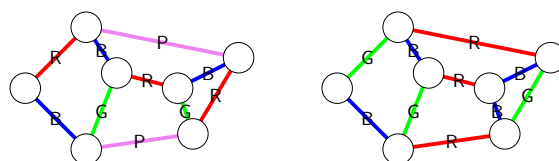
$c$  の終域  $\{1, \dots, k\}$  を **パレット** と呼ぶことがある

無向グラフ  $G = (V, E)$

染色数とは？

$G$  の **辺彩色数** とは,  $G$  の  $k$  辺彩色が存在するような最小の  $k$

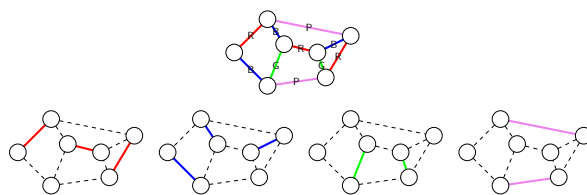
$G$  の辺彩色数を  $\chi'(G)$  で表す



4 辺彩色である

3 辺彩色は存在しない

$\therefore$  このグラフの辺彩色数は 4

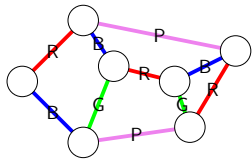


辺彩色の各彩色クラスは **マッチング**

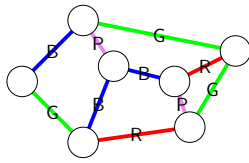
無向グラフ  $G = (V, E)$ , 自然数  $k$

辺彩色とは？ (マッチングを用いた定義)

$G$  の  $k$  辺彩色とは,  
 $k$  個のマッチング  $M_1, \dots, M_k$  への辺集合  $E$  の分割



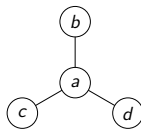
4 辺彩色である



4 辺彩色ではない

すべてのグラフが線グラフであるわけではない

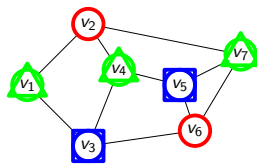
次のグラフは線グラフではない (対応する元のグラフがない)



貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序  $\sigma$  を 1 つ固定する. 使う色は  $\{1, 2, \dots\}$
- ▶ その頂点の隣接点の色と違い, 既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- ▶ 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る

実行例



全順序  $\sigma: v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7$

貪欲彩色の性能評価

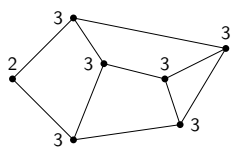
貪欲彩色が費やす色数の上界

任意の無向グラフ  $G = (V, E)$  と  $V$  上の任意の全順序  $\sigma$  に対して,

$$\chi(G) \leq \sigma \text{ に従う } G \text{ の貪欲彩色が費やす色数} \leq \Delta(G) + 1$$

復習：最大次数とは？

無向グラフ  $G$  の最大次数  $\Delta(G)$  とは, その頂点の次数の最大値



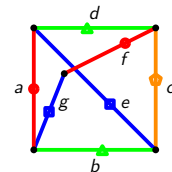
$\Delta(G) = 3$

辺彩色は彩色の特殊な場合

線グラフ

無向グラフ  $G = (V, E)$  の線グラフ  $L(G)$  とは

- ▶ 頂点集合が  $E$  であり,
- ▶ 辺集合が  $\{\{e_1, e_2\} \mid e_1 \text{ と } e_2 \text{ が共通端点を持つ}\}$



$G$

$L(G)$

$G$  の辺彩色  $\leftrightarrow L(G)$  の彩色

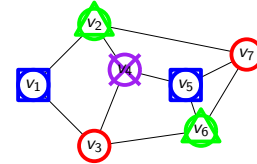
目次

- 1 グラフの彩色と染色数
- 2 辺彩色
- 3 貪欲彩色
- 4 染色数とクリーク数の弱双対性
- 5 今日のまとめ

貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序  $\sigma$  を 1 つ固定する. 使う色は  $\{1, 2, \dots\}$
- ▶ その頂点の隣接点の色と違い, 既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- ▶ 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る

実行例 (別の順序)

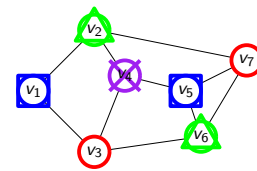


全順序  $\sigma: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4$

貪欲彩色の性能評価：証明

パレットは  $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$

- ▶ 任意の頂点  $v$  に色を塗る瞬間を考える
- ▶  $v$  の隣接頂点とは違う色を  $v$  に塗る
- ▶  $v$  の隣接頂点に使われる色の数  $\leq \deg_G(v)$  (次数)
- ▶  $\therefore v$  を塗るために必要な色は  $1, 2, \dots, \deg_G(v) + 1$  の中にある
- ▶  $\therefore$  どの頂点も  $1, 2, \dots, \Delta(G) + 1$  の中で塗れる  $(\because \deg_G(v) \leq \Delta(G))$
- ▶ よって, 貪欲彩色は多くても  $\Delta(G) + 1$  色しか費やさない  $\square$



## 観察

貪欲彩色の出力は全順序  $\sigma$  に依存する

つまり,  $\sigma$  を変えると, 異なる彩色が得られる (かもしれない)

## 事実 (演習問題)

うまく全順序を選べば, 貪欲彩色の費やす色数が染色数になる

つまり, 染色数を計算するためには, うまい全順序を見つければよい

## 今からやること

- ▶ そのようなうまい全順序をどう見つけるか? (次回)
- ▶ その全順序が与える彩色が「最適」であることを確認するための証拠は何か?

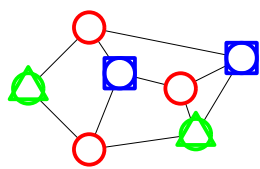
実は, いつもうまくいくとは限らないが, うまくいく場合を紹介する

- 1 グラフの彩色と染色数
- 2 辺彩色
- 3 貪欲彩色
- 4 染色数とクリーク数の弱双対性
- 5 今日のまとめ

## 彩色の最適性

## 染色数とは? (再掲)

無向グラフ  $G$  の染色数とは,  $G$  の  $k$  彩色が存在するような最小の  $k$



$$\chi(G) = 3 \text{ ???}$$

## 疑問

- ▶ 3色未満で塗れないのか?
- ▶ 塗れないことをどう示すのか?

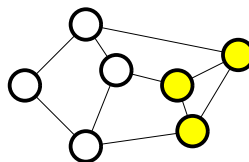
←  $\chi(G) \leq 3$  しか示してない

## クリーク

## グラフのクリークとは?

無向グラフ  $G$  のクリークとは, 頂点部分集合  $C$  で, その中のどの2頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を  $\omega(G)$  で表す ( $G$  のクリーク数と呼ぶ)



## 観察 (弱双対性)

- ▶  $C$  が  $G$  のクリークである  
 $\Rightarrow \chi(G) \geq |C|$   
 なぜか?

直感:  $C$  の部分だけで  $\chi(G)$  色は必要となる

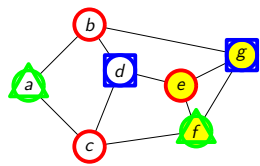
## 彩色とクリークの弱双対性

無向グラフ  $G = (V, E)$

## 彩色とクリークの弱双対性

$G$  の任意のクリーク  $C$  に対して,  $\chi(G) \geq |C|$

証明の着想: 数え上げ論法による



	e	f	g	
● {b, c, e}	1			$\leq 1$
■ {d, g}			1	$\leq 1$
▲ {a, f}		1		$\leq 1$

## 彩色とクリークの弱双対性

証明:  $\chi(G)$  彩色を独立集合  $I_1, \dots, I_{\chi(G)}$  への  $V$  の分割と捉える

- ▶ 各  $i \in \{1, \dots, \chi(G)\}$ ,  $v \in C$  に対して,

$$M_{i,v} = \begin{cases} 1 & (v \in I_i) \\ 0 & (v \notin I_i) \end{cases}$$

として行列  $M \in \mathbb{R}^{\{\chi(G)\} \times C}$  を考える

- ▶ 各独立集合  $I_i$  と  $C$  は頂点を2つ以上共有しないので,

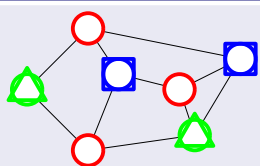
$$\sum_{i=1}^{\chi(G)} \left( \sum_{v \in C} M_{i,v} \right) \leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} 1 = \chi(G)$$

- ▶ 各  $v \in C$  は  $I_1, \dots, I_{\chi(G)}$  中のちょうど1つの要素なので

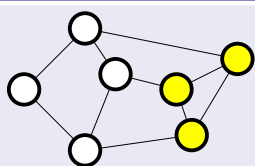
$$\sum_{v \in C} \left( \sum_{i=1}^{\chi(G)} M_{i,v} \right) = \sum_{v \in C} 1 = |C|$$

- ▶ したがって,  $\chi(G) \geq |C|$  □

## 彩色が最適であることの確認法

 $\chi(G)$  の上界

3色で塗れた  
 $\therefore \chi(G) \leq 3$

 $\chi(G)$  の下界

頂点数3のクリークを見つけた  
 $\therefore \chi(G) \geq 3$

上界と下界が一致した

$$\therefore \chi(G) = 3$$

## 彩色が最適であることの確認法: まとめ

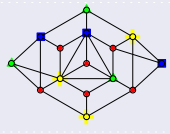
- ▶  $k$  色で塗る (つまり,  $\chi(G) \leq k$ )
- ▶ 頂点数  $k$  のクリークを見つける (つまり,  $\chi(G) \geq k$ )
- ▶ したがって,  $\chi(G) = k$

つまり,

彩色問題では, 色を塗ることだけでなく, クリークを見つけることも重要になる

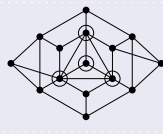
頂点数の大きなクリークが見つけられるとうれしい

$\chi(G)$  の上界



4色で塗れた  
 $\therefore \chi(G) \leq 4$

$\chi(G)$  の下界



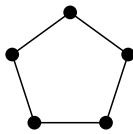
頂点数4のクリークを見つけた  
 $\therefore \chi(G) \geq 4$

上界と下界が一致した

$\therefore \chi(G) = 4$

$\chi(G) > \omega(G)$  となる場合 (1)

頂点数5の閉路  $C_5$



- ▶  $\chi(C_5) = 3$
- ▶  $\omega(C_5) = 2$

目次

- ① グラフの彩色と染色数
- ② 辺彩色
- ③ 貪欲彩色
- ④ 染色数とクリーク数の弱双対性
- ⑤ 今日のまとめ

任意の無向グラフ  $G$  に対して

- ▶ 任意のクリーク  $C$  に対して,  $\chi(G) \geq |C|$
- ▶ 特に,  $C$  を頂点数最大のクリークとすると,  $\chi(G) \geq \omega(G)$

もし

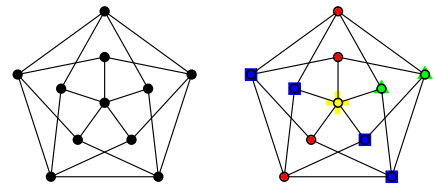
- ▶  $k$  色で塗れれば,  $\chi(G) \leq k$
- ▶ 頂点数  $k$  のクリークが見つければ,  $\omega(G) \geq k$
- ▶  $\therefore \chi(G) \leq k \leq \omega(G) \leq \chi(G)$  となり,  $\chi(G) = k = \omega(G)$

つまり

- ▶  $\chi(G) = \omega(G)$  が成り立つかどうかは重要そう

$\chi(G) > \omega(G)$  となる場合 (2)

Grötzsch グラフ



- ▶  $\chi(\text{Grötzsch}) = 4$
- ▶  $\omega(\text{Grötzsch}) = 2$

今日の目標

- グラフの彩色に関する基礎概念を理解する
- ▶ 彩色と染色数
  - ▶ 染色数とクリーク数の関係 (弱双対性)
  - ▶ 貪欲彩色による上界