

グラフとネットワーク第 9 回
連結性：数理とモデル化

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 6 月 5 日

最終更新：2017 年 6 月 2 日 10:40

スケジュール 前半 (予定)

- 1 グラフの定義と次数：数理 (4/10)
- 2 道と閉路：数理 (4/17)
- 3 木：数理 (4/24)
- 4 マッチング：数理 (5/1)
- 5 マッチング：モデル化 (5/8)
- 6 最大流：数理 (5/15)
- 7 最大流：モデル化 (1) (5/22)
- 8 最大流：モデル化 (2) (5/29)
- 9 連結性：数理とモデル化 (6/5)
 - 中間試験 (6/12)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- 10 彩色：数理 (6/19)
- 11 彩色：モデル化 (6/26)
 - * 休講 (出張) (7/3)
- 12 平面グラフ：数理 (7/10)
 - * 休講 (海の日) (7/17)
- 13 平面グラフ：モデル化 (7/24)
- 14 予備日 (たぶんやらない) (7/31)
 - 期末試験 (8/7)

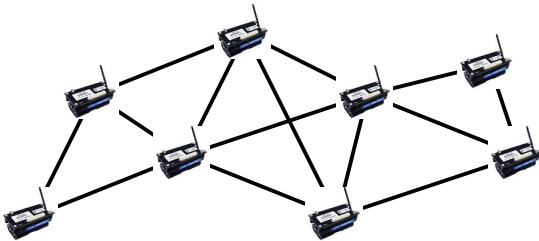
注意：予定の変更もありうる

概要

今日の目標

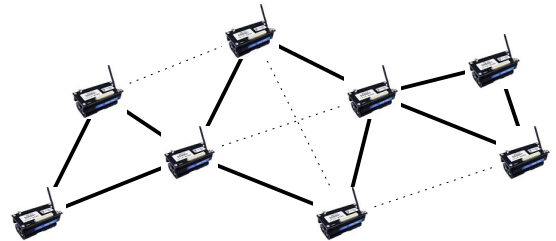
- ▶ グラフの連結性に関する概念を理解し、正しく使えるようになる
- ▶ 連結度に関する Menger の定理を最大流と関係づけられるようになる

センサネットワークにおける通信



<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

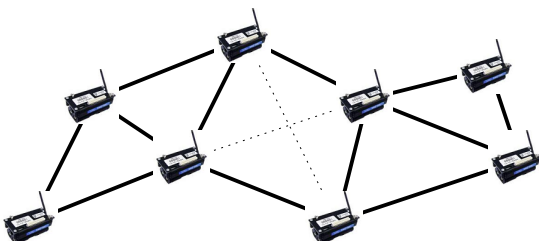
センサネットワークにおける通信：リンク故障



<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

↪ 辺連結度：リンク故障への耐性を表す数

センサネットワークにおける通信：ノード故障



<http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/>

↪ 点連結度：ノード故障への耐性を表す数

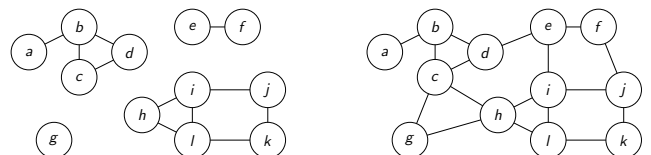
グラフの連結性 (復習)

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフが連結であるとは？

G が連結であるとは、任意の 2 頂点 $u, v \in V$ に対して、 u から v へ至る道が存在すること

連結ではないグラフは非連結と呼ばれる



非連結グラフ

連結グラフ

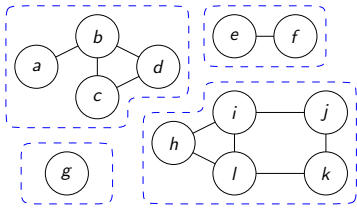
注：「グラフが連結している」とは言わない

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの連結成分とは？

G の連結成分とは、 G の極大連結部分グラフのこと

(「極大」とは、グラフの包含関係を半順序であるとみなしたときの「極大」)



連結成分の数 = 4

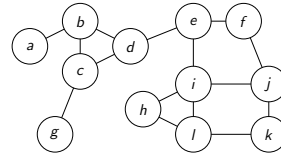
無向グラフ $G = (V, E)$, 辺 $e \in E$

グラフの切断辺とは？

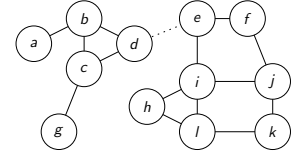
e が G の切断辺であるとは、 G から e を除去したグラフ $G - e$ に対して次が成り立つこと

$$G - e \text{ の連結成分の数} > G \text{ の連結成分の数}$$

$\{d, e\}$ は G の切断辺



G



$G - \{d, e\}$

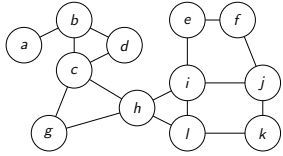
無向グラフ $G = (V, E)$, 頂点 $v \in V$

グラフの切断点とは？

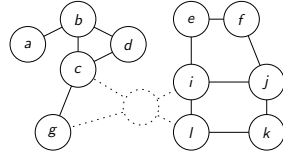
v が G の切断点であるとは、 G から v を除去したグラフ $G - v$ に対して次が成り立つこと

$$G - v \text{ の連結成分の数} > G \text{ の連結成分の数}$$

h は G の切断点 (「 v を除去」とは、 v と v に接続する辺すべてを除去すること)



G



$G - h$

目次

- ① グラフの連結性と連結度
 - 無向グラフの辺連結度
 - 無向グラフの点連結度
 - 有向グラフの弧連結度・点連結度
- ② 連結度と互いに素な道の双対性: Menger の定理
 - 弧連結度
 - 点連結度
- ③ 今日のまとめ

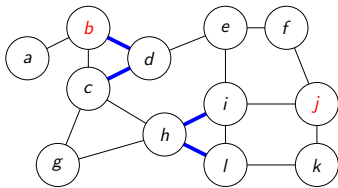
非連結化集合: 無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$

非連結化集合とは？

辺部分集合 $F \subseteq E$ が G の s, t 非連結化集合であるとは、 $G - F$ において、 s から t への道が存在しないこと

青い辺から成る集合は b, j 非連結化集合



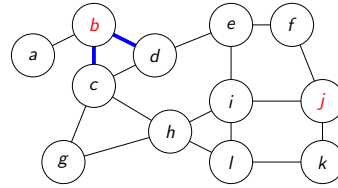
辺連結度: 無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$

辺連結度とは？

G の s, t 辺連結度とは、 G の s, t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda_{s,t}(G)$ で表す ($\lambda_G(s, t), \lambda(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\lambda_{b,j}(G) = 2$$

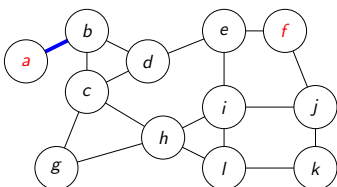
これは局所的、部分的なリンク故障耐性を表す

大域辺連結度: 無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

大域辺連結度とは？

G の大域辺連結度とは、 $\lambda(G) = \min\{\lambda_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t\}$ つまり、 s, t 辺連結度の (s, t の選び方に関する) 最小値



$$\lambda(G) = \lambda_{a,f}(G) = 1$$

これは大域的、全体的なリンク故障耐性を表す

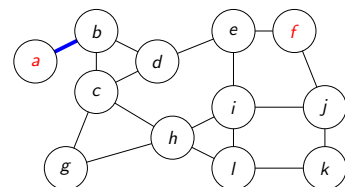
辺連結性: 無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 自然数 $k \geq 0$

辺連結性とは？

G が k 辺連結であるとは、 $\lambda(G) \geq k$ であること
つまり、要素数 $k-1$ 以下の辺部分集合を除去して G を非連結にできない

このグラフは1辺連結であるが、2辺連結ではない



注: G が連結 $\Leftrightarrow G$ が1辺連結

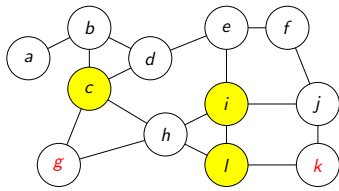
分離集合：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$ (ただし, $\{s, t\} \notin E$)

分離集合とは？

頂点集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の s, t 分離集合であるとは, $G - S$ において, s から t への道が存在しないこと

黄色の頂点から成る集合は g, k 分離集合



点連結度：無向グラフ

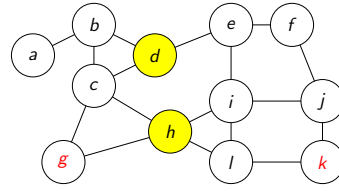
無向グラフ $G = (V, E)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$ (ただし, $\{s, t\} \notin E$)

点連結度とは？

G の s, t 点連結度とは, G の s, t 分離集合の要素数の最小値

$\kappa_{s,t}(G)$ で表す

($\kappa_G(s, t), \kappa(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\kappa_{g,k}(G) = 2$$

これは局所的, 部分的なノード故障耐性を表す

大域点連結度：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

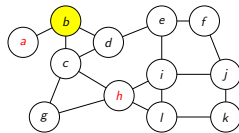
大域点連結度とは？

G の大域点連結度とは, G が完全グラフではない場合

$$\kappa(G) = \min\{\kappa_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t, \{s, t\} \notin E\}$$

つまり, s, t 点連結度の (s, t の選び方に関する) 最小値

頂点数 n の完全グラフ K_n に対して, $\kappa(K_n) = n - 1$ と定義する



これは大域的, 全体的なノード故障耐性を表す

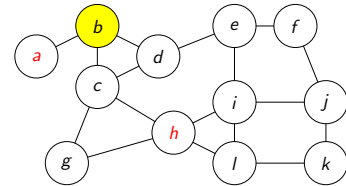
点連結性：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 自然数 $k \geq 0$

点連結性とは？

G が k 点連結であるとは, $\kappa(G) \geq k$ であること
つまり, 要素数 $k-1$ 以下の頂点部分集合を除去しても G は連結

このグラフは1点連結であるが, 2点連結ではない



注: G が連結 $\Leftrightarrow G$ が1点連結

用語の対応：無向グラフ

辺	頂点
s, t 非連結化集合	s, t 分離集合
s, t 辺連結度	s, t 点連結度
$\lambda_{s,t}(G)$	$\kappa_{s,t}(G)$
大域辺連結度	大域点連結度
$\lambda(G)$	$\kappa(G)$
k 辺連結	k 点連結

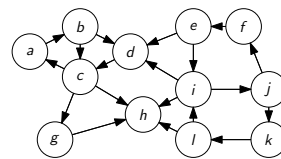
- ▶ s, t 非連結化集合を, s, t 辺カットと呼ぶことがある
- ▶ s, t 分離集合を, s, t 点カットと呼ぶことがある

有向グラフの強連結性

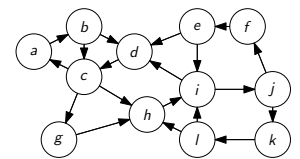
有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフが強連結であるとは？

G が強連結であるとは, 任意の2頂点 $u, v \in V$ に対して, u から v へ至る有向道が存在すること



強連結でない



強連結である

注: 「グラフが強連結している」とは言わない

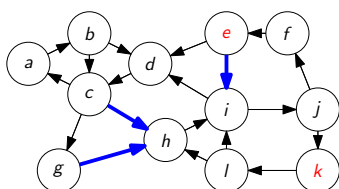
非連結化集合：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$

非連結化集合とは？

弧部分集合 $F \subseteq A$ が G の s, t 非連結化集合であるとは, $G - F$ において, s から t への有向道が存在しないこと

青い弧から成る集合は e, k 非連結化集合



弧連結度：有向グラフ

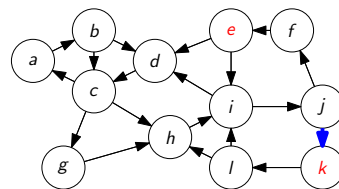
有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$

弧連結度とは？

G の s, t 弧連結度とは, G の s, t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda_{s,t}(G)$ で表す

($\lambda_G(s, t), \lambda(G; s, t)$ と表すこともある)



$$\lambda_{e,k}(G) \leq 2 = 1$$

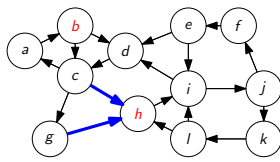
これは局所的, 部分的なリンク故障耐性を表す

弧連結度：有向グラフ (注意)

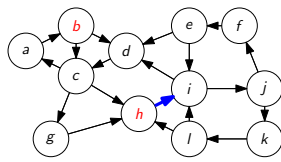
有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$

注意

$\lambda_{s,t}(G) \neq \lambda_{t,s}(G)$ かもしれない



$\lambda_{b,h}(G) = 2$



$\lambda_{h,b}(G) = 1$

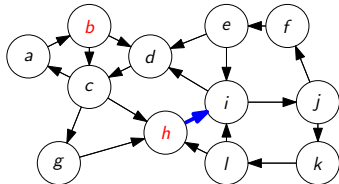
弧連結性：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$, 自然数 $k \geq 0$

弧連結性とは？

G が k 弧連結であるとは, $\lambda(G) \geq k$ であること
つまり, 要素数 $k-1$ 以下の弧部分集合をどう除去しても G は強連結

このグラフは1弧連結であるが, 2弧連結ではない



注: G が強連結 $\Leftrightarrow G$ が1弧連結

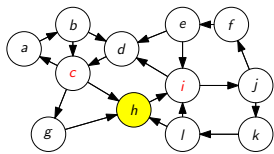
点連結度：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$ (ただし, $(s, t) \notin A$)

点連結度とは？

G の s, t 点連結度とは,
 G の s, t 分離集合の要素数の最小値

$\kappa_{s,t}(G)$ で表す ($\kappa_G(s, t), \kappa(G; s, t)$ と表すこともある)



$\kappa_{c,i}(G) = 1$

これは局所的, 部分的なノード故障耐性を表す

注: $\kappa_{s,t}(G) \neq \kappa_{t,s}(G)$ かもしれない

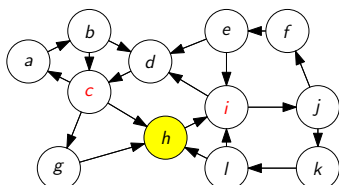
点連結性：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$, 自然数 $k \geq 0$

点連結性とは？

G が k 点連結であるとは, $\kappa(G) \geq k$ であること
つまり, 要素数 $k-1$ 以下の頂点部分集合をどう除去しても G は強連結

このグラフは1点連結であるが, 2点連結ではない



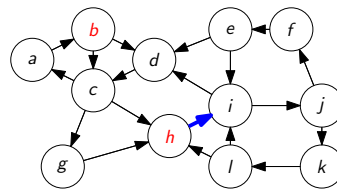
注: G が強連結 $\Leftrightarrow G$ が1点連結

大域弧連結度：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$

大域弧連結度とは？

G の大域弧連結度とは, $\lambda(G) = \min\{\lambda_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t\}$
つまり, s, t 弧連結度の (s, t) の選び方に関する) 最小値



$\lambda(G) = 1$

これは大域的, 全体的なリンク故障耐性を表す

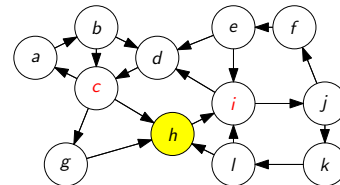
分離集合：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$, 異なる2頂点 $s, t \in V$ (ただし, $(s, t) \notin A$)

分離集合とは？

頂点集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の s, t 分離集合であるとは,
 $G - S$ において, s から t への有向道が存在しないこと

黄色の頂点から成る集合は c, i 分離集合



大域点連結度：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$

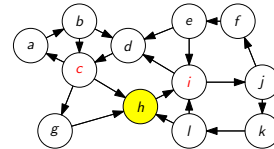
大域点連結度とは？

G の大域点連結度とは, ある $u, v \in V$ に対して $(u, v) \notin A$ であるとき,

$$\kappa(G) = \min\{\kappa_{s,t}(G) \mid s, t \in V, s \neq t, (s, t) \notin A\}$$

つまり, s, t 点連結度の (s, t) の選び方に関する) 最小値

任意の $u, v \in V (u \neq v)$ に対して $(u, v) \in A$ であるとき, $\kappa(G) = |V| - 1$ と定義



$\kappa(G) = 1$

これは大域的, 全体的なノード故障耐性を表す

用語の対応：有向グラフ

弧	頂点
s, t 非連結化集合	s, t 分離集合
s, t 弧連結度	s, t 点連結度
$\lambda_{s,t}(G)$	$\kappa_{s,t}(G)$
大域弧連結度	大域点連結度
$\lambda(G)$	$\kappa(G)$
k 弧連結	k 点連結

- ▶ s, t 非連結化集合を, s, t 弧カットと呼ぶことがある
- ▶ s, t 分離集合を, s, t 点カットと呼ぶことがある

- 1 グラフの連結性と連結度
 - 無向グラフの辺連結度
 - 無向グラフの点連結度
 - 有向グラフの弧連結度・点連結度

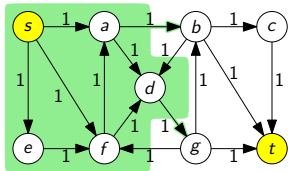
- 2 連結度と互いに素な道の双対性：Menger の定理
 - 弧連結度
 - 点連結度

- 3 今日のまとめ

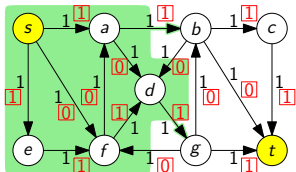
最大流問題としてのモデル化：着眼点

観察

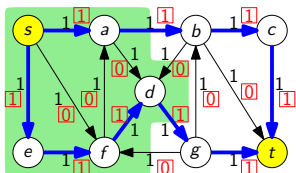
- 弧を除去すると s から t へ行けなくなる
- ⇒ 弧を除去した後に、 s からたどり着ける部分は G の s, t カット
- ⇒ 除去した弧の数 = その s, t カットから出る弧の数
- ⇒ 全ての弧容量 = 1 ならば、
 s, t カットから出る弧の数 = s, t カットの容量
- ∴ 最小 s, t カットの容量から弧連結度が分かる



最大流問題：最大流と最小 s, t カット



解いた結果を再解釈 (2)



- ▶ 1 だけ流れている弧だけ見てみると、道が構成できる
- ▶ 道の数 = 最大流の値 = 弧連結度
- ▶ ∴ 流れが道に対応している
- ▶ 注：これらの道は同じ弧を共有しない

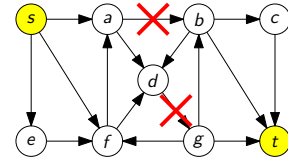
「流れ」という比喻

流れ ———— 道
たくさん流す ———— 道を多く選ぶ

s, t 弧連結度をどのように計算するか？

目標

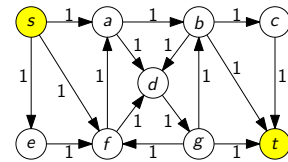
s, t 弧連結度の計算を最大流問題としてモデル化する



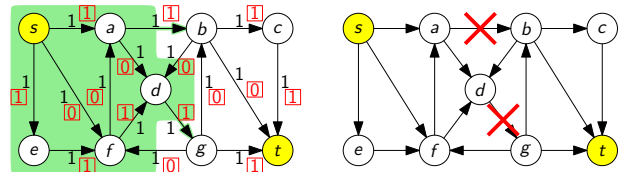
最大流問題としてのモデル化

モデル化

- ▶ グラフ：そのまま
- ▶ 容量：すべての弧の容量 = 1



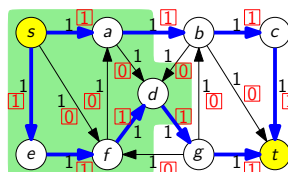
解いた結果を再解釈 (1)



- ▶ s, t カットから出る弧が弧連結度を与える
- ▶ 流れは何に対応するか？

整数流定理と容量の決め方から、各弧上を流れている量は 0 か 1

Menger の定理



最大流最小カット定理より、
任意の有向グラフ $G = (V, A)$ 、任意の $s, t \in V$ に対して

Menger の定理

$$s \text{ から } t \text{ へ至る道で弧を共有しないものの最大数} = s, t \text{ 弧連結度}$$



Karl Menger
カール・メンガー
(1902-1985)

http://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Menger

目次

- ① グラフの連結性と連結度
 - 無向グラフの辺連結度
 - 無向グラフの点連結度
 - 有向グラフの弧連結度・点連結度

- ② 連結度と互いに素な道の双対性: Menger の定理
 - 弧連結度
 - 点連結度

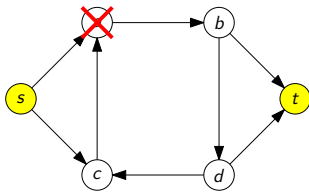
- ③ 今日のまとめ

最大流問題としてのモデル化: 着眼点

観察

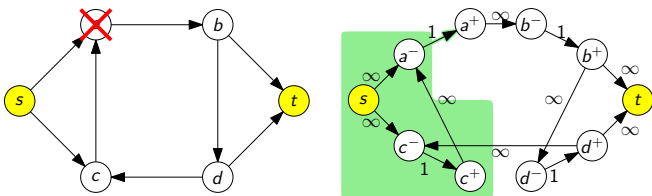
弧連結度のときと同様に, s, t カットを見たい

- ▶ しかし, カットを見るときに壊すのは弧
- ∴ 頂点の問題を弧の問題に変換するため, グラフに操作を施す



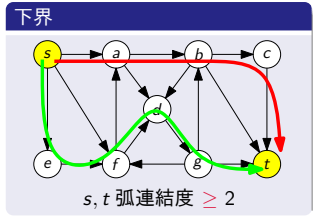
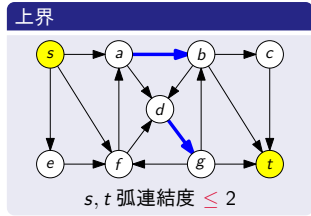
最大流問題としてのモデル化: 操作に対する直感

- ▶ 最小 s, t カットから容量 ∞ の弧が出ていけない
- ∴ 最小 s, t カットから出る弧の容量はすべて 1
- ▶ そのような弧はもとのグラフにおける頂点に対応
- ▶ 対応する頂点を取り除けば, s から t に行けなくなる



双対性の利用法

次のグラフの s, t 弧連結度は何か?

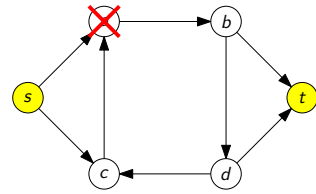


したがって, s, t 弧連結度 = 2

s, t 点連結度をどのように計算するか?

目標

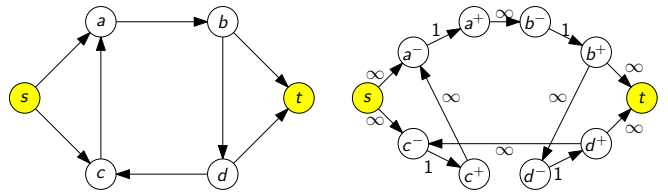
s, t 点連結度の計算を最大流問題としてモデル化する



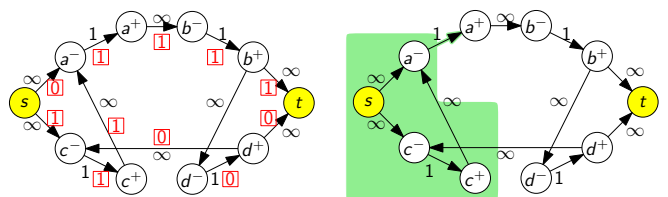
最大流問題としてのモデル化: 操作

行う操作

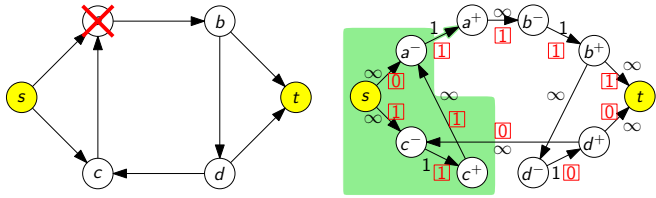
各頂点に対して次の操作を行い, 弧の容量も次のように定める



最大流と最小 s, t カット

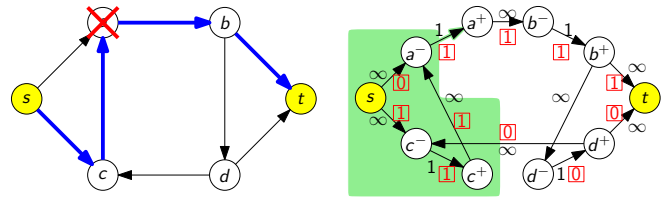


最大流の値 = 1 = 最小 s, t カットの容量



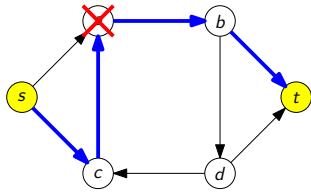
- ▶ カットから出る弧に対応する頂点が点連結度を与える
- ▶ 流れは何に対応するか?

整数流定理と容量の決め方から、各弧上を流れている量は 0 か 1



- ▶ 1 だけ流れている弧に対応する部分は道になる
- ▶ 道の数 = 最大流の値 = 点連結度
- ▶ ∴ 流れが道に対応している
- ▶ 注: これらの道は s, t 以外の頂点を共有しない

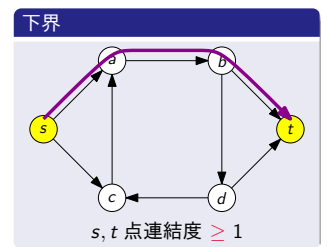
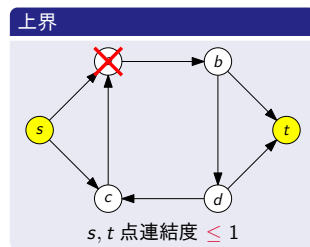
「流れ」という比喻
 流れ ———— 道
 たくさん流す ———— 道を多く選ぶ



最大流最小カット定理より、
 任意の有向グラフ $G = (V, A)$ 、任意の $s, t \in V$ (ただし、 $(s, t) \notin A$) に対して

Menger の定理
 s から t へ至る道で
 頂点を s, t 以外共有しないものの最大数 = s, t 点連結度

次のグラフの s, t 点連結度は何か?

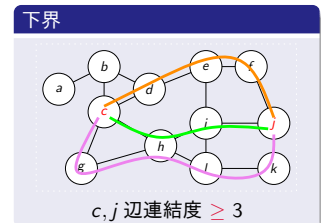
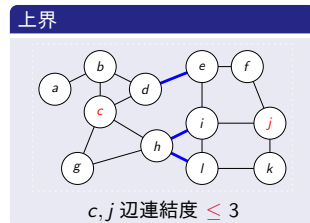


したがって、 s, t 点連結度 = 1

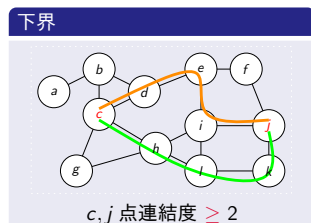
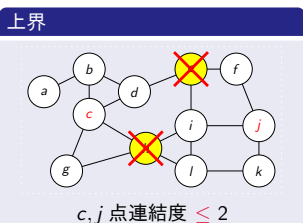
Menger の定理は無向グラフでも成立する

Menger の定理 (無向グラフ版)
 ▶ 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と任意の $s, t \in V$ に対して
 s から t へ至る道で
 辺を共有しないものの最大数 = s, t 辺連結度
 ▶ 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と
 任意の $s, t \in V$ (ただし、 $\{s, t\} \notin E$) に対して
 s から t へ至る道で
 s, t 以外に頂点を共有しないものの最大数 = s, t 点連結度

証明は省略 (弱双対性は演習問題 (数え上げによる証明))



したがって、 c, j 辺連結度 = 3



したがって、 c, j 点連結度 = 2

- 1 グラフの連結性と連結度
 無向グラフの辺連結度
 無向グラフの点連結度
 有向グラフの弧連結度・点連結度
- 2 連結度と互いに素な道の双対性: Menger の定理
 弧連結度
 点連結度
- 3 今日のまとめ

今日の目標

- ▶ グラフの連結性に関する概念を理解し、正しく使えるようになる
- ▶ 連結度に関する Menger の定理を最大流と関係づけられるようになる