

グラフとネットワーク 第6回
最大流：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017年5月15日

最終更新：2017年5月12日 08:54

スケジュール 後半 (予定)

- 10 彩色：数理 (6/19)
- 11 彩色：モデル化 (6/26)
 - * 休講 (出張) (7/3)
- 12 平面グラフ：数理 (7/10)
 - * 休講 (海の日) (7/17)
- 13 平面グラフ：モデル化 (7/24)
- 14 予備日 (たぶんやらない) (7/31)
 - 期末試験 (8/7)

注意：予定の変更もありうる

概要

今日の目標

最大流問題に関して次ができるようになる

- ▶ 「流れ」が何であるのか記述でき、基本性質を証明できる
- ▶ **流れとカットの双対性**により流れの最大性を証明できる

重要な定理

- ▶ 最大流最小カット定理
- ▶ 整数流定理

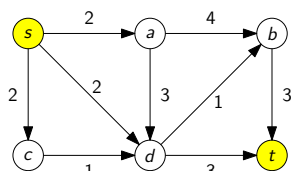
最大流問題とは？

最大流問題とは？

定義：最大流問題とは？

入力

- ▶ 有向グラフ $G = (V, A)$, 各弧 $a \in A$ の容量 $c(a)$, 2 頂点 $s, t \in V$ (弧の容量は非負実数)



スケジュール 前半 (予定)

- 1 グラフの定義と次数：数理 (4/10)
- 2 道と閉路：数理 (4/17)
- 3 木：数理 (4/24)
- 4 マッチング：数理 (5/1)
- 5 マッチング：モデル化 (5/8)
- 6 最大流：数理 (5/15)
- 7 最大流：モデル化 (1) (5/22)
- 8 最大流：モデル化 (2) (5/29)
- 9 連結性：数理とモデル化 (6/5)
 - 中間試験 (6/12)

注意：予定の変更もありうる

この講義の概要 (シラバス掲載内容)

主題

離散最適化の入門として、次を概説する

- ▶ グラフとネットワークを用いた**数理モデル化**
- ▶ **アルゴリズム**的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

達成目標

以下の4項目をすべて達成すること

- 1 グラフやネットワークに関する**用語**を正しく使うことができる
- 2 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し、**数理モデル**を構築できる
- 3 アルゴリズム的解法の背後にある数理、特に、**最小最大定理**の重要性を説明でき、それを用いて最適性の**証明**ができる
- 4 グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を**証明**できる

最大流問題とは？

目次

- 1 最大流問題とは？
- 2 流れとカットの弱双対性
- 3 流れとカットの強双対性：最大流最小カット定理
- 4 今日のまとめ

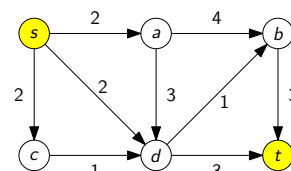
最大流問題とは？

最大流問題とは？

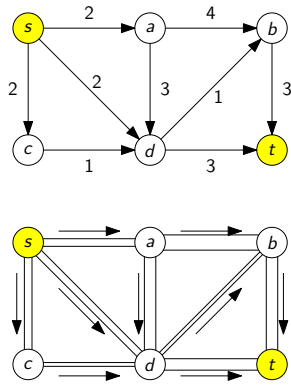
定義：最大流問題とは？

出力

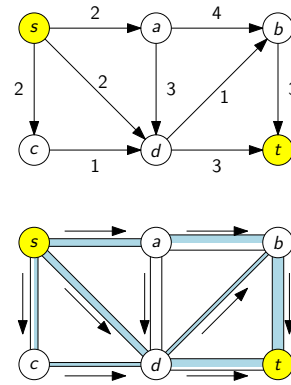
- ▶ s から t へ至る流れで、その値が最大のもの (s から t へ至る最大流)



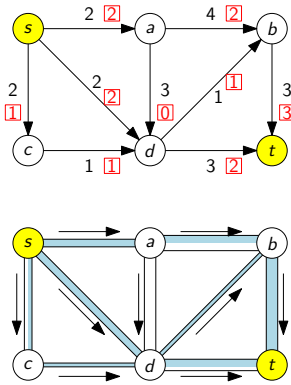
流れとは?: 直感 (1)



流れとは?: 直感 (2)



流れとは?: 直感 (3)



流れとは? (1)

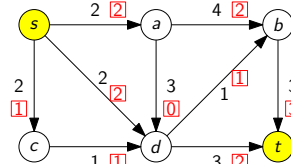
定義: s から t へ至る流れとは?

各弧 $a \in A$ に対する実数 $f(a)$ の割り当て (関数 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$) で次の 2 つを満たすもの

- 1 s, t 以外の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して, (流量保存制約)

$$\sum_{u:(u,v) \in A} f((u,v)) = \sum_{u:(v,u) \in A} f((v,u))$$

(v へ流入する総量) (v から流出する総量)



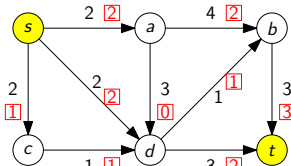
流れとは? (2)

定義: s から t へ至る流れとは?

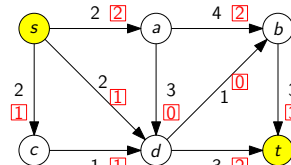
各弧 $a \in A$ に対する実数 $f(a)$ の割り当て (関数 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$) で次の 2 つを満たすもの

- 2 各弧 $a \in A$ において, (容量制約)

$$0 \leq f(a) \leq c(a)$$

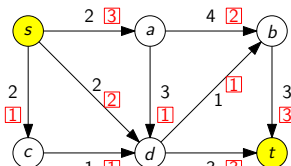


これは流れか? (1)



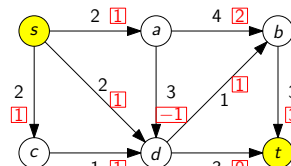
流れではない

これは流れか? (2)

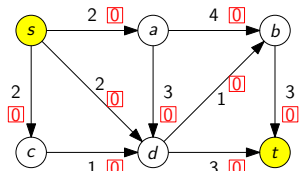


流れではない

これは流れか? (3)



流れではない

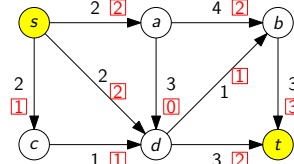


流れである

定義：流れ f の値とは？

s から t へ至る流れ f の値を次の量で定義し, $val(f)$ と表記する

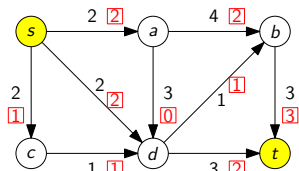
$$val(f) = \sum_{u:(s,u) \in A} f((s,u)) - \sum_{u:(u,s) \in A} f((u,s))$$



この流れの値は 5

定義：最大流とは？

s から t へ至る流れ f が最大流であるとは, s から t へ至る任意の流れ f' に対して $val(f') \leq val(f)$ が成り立つこと



注：最大流が存在する, という事は当たり前ではない

記法の簡略化：流入, 流出, 純流入, 純流出

s から t へ至る流れ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

記法と用語

各頂点 $v \in V$ に対して, 次のように記号を定義

▶ $f^+(v) = \sum_{u:(v,u) \in A} f((v,u))$ (v からの流出)

▶ $f^-(v) = \sum_{u:(u,v) \in A} f((u,v))$ (v への流入)

このとき,

▶ $f^+(v) - f^-(v)$ は v における純流出

▶ $f^-(v) - f^+(v)$ は v における純流入

$f^+(v) - f^-(v)$ を $\partial f(v)$ と書いて, f の v における境界と呼ぶことがある

記法の簡略化：流れの定義と流れの値の定義の書き換え

s から t へ至る流れ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

つまり, 次のように書き換えられる

流量保存制約

▶ 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して, $f^+(v) = f^-(v)$

流れ f の値

▶ $val(f) = f^+(s) - f^-(s)$

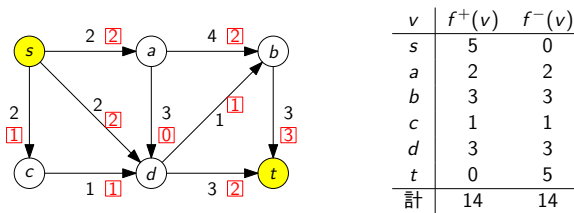
流れの総和 = 流出量の総和 = 流入量の総和

s から t へ至る流れ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

次が成り立つ

$$\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{v \in V} f^+(v) = \sum_{v \in V} f^-(v)$$

証明：演習問題 (ヒント：握手補題の証明を思い出す)



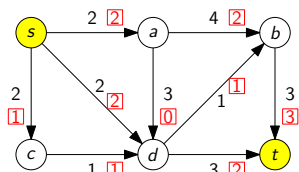
s における純流出 = t における純流入

次が成り立つ

s から t へ至る任意の流れ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$$

(s における純流出) (t における純流入)



左辺 = 5 = 右辺

s における純流出 = t における純流入：証明

流量保存制約

▶ 任意の頂点 $v \in V - \{s, t\}$ に対して, $f^+(v) = f^-(v)$

から,

$$\sum_{v \in V - \{s, t\}} f^+(v) = \sum_{v \in V - \{s, t\}} f^-(v) \dots \dots \dots (1)$$

が得られる。また,

$$\sum_{v \in V} f^+(v) = \sum_{v \in V} f^-(v) \dots \dots \dots (2)$$

となるので, 式 (2) - 式 (1) より,

▶ $f^+(s) + f^+(t) = f^-(s) + f^-(t)$

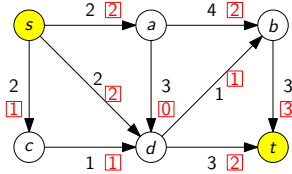
が得られる。整理すると

▶ $f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$

が得られる。 □

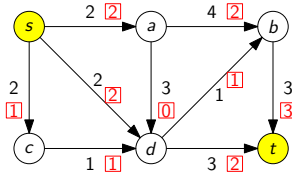
- ▶ 有向グラフは 道路ネットワーク をモデル化
- ▶ s は 部品工場 をモデル化
- ▶ t は 組立工場 をモデル化
- ▶ 弧の容量は 道幅 をモデル化

最大流問題 = できるだけ多くの部品を組み立て工場に運ぶには？



他の応用は後の講義で

疑問：流れと「対」になるものは何か？



この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

- ▶ \rightsquigarrow 流れと「対」になるものが何なのか考えたい

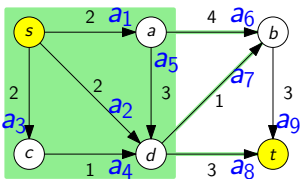
最大化	最小化
マッチング	頂点被覆
流れ	???

カットの容量

定義： s, t カットの容量とは？

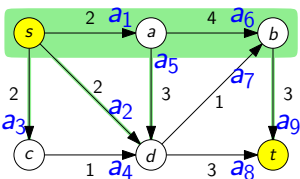
s, t カット S の容量とは、次の式で定義され、 $\text{cap}(S)$ と表記する

$$\text{cap}(S) = \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v))$$



S に始点を持ち、 $V - S$ に終点を持つ弧の容量の合計

カット容量の例 (2)



$\{s, a, b\}$ は s, t カットで、その容量は 10

注意： a_7 の容量はカットの容量に含めない

① 最大流問題とは？

② 流れとカットの弱双対性

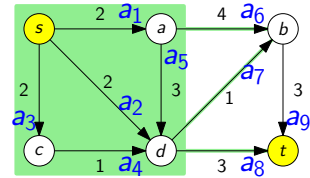
③ 流れとカットの強双対性：最大流最小カット定理

④ 今日のまとめ

カット

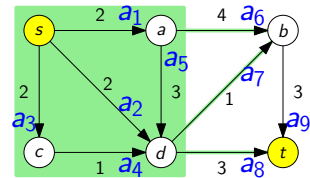
定義： s, t カットとは？

s, t カットとは、頂点部分集合 S で、 $s \in S$ と $t \notin S$ を満たすものこと



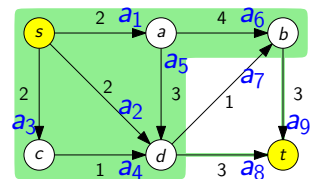
イメージ： s から t へ至る流れは S の側から $V - S$ の側に向かっていく

カット容量の例 (1)



$\{s, a, c, d\}$ は s, t カットで、その容量は 8

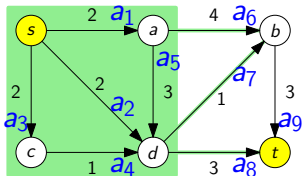
カット容量の例 (3)



$\{s, a, b, c, d\}$ は s, t カットで、その容量は 6

注意： a_7 の容量はカットの容量に含めない

カットの容量と流れ



直感

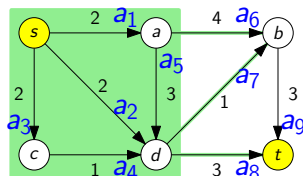
- ▶ s から t へ至る流れ f は S から $V - S$ へ向かっていく
- ▶ $\therefore \text{cap}(S)$ よりもたくさん s から t へ流れない
- ▶ $\therefore \text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$

カットの容量と流れ：より厳密に

流れとカットの関係

s から t へ至る任意の流れ f と任意の s, t カット S に対して

$$\text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$$



カットの容量と流れ：補題

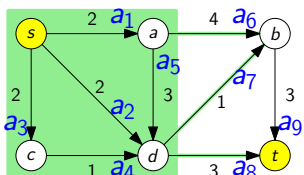
補題 A

s から t へ至る任意の流れ f と任意の s, t カット S に対して

$$\text{val}(f) = \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u,v))$$

(S から出る総流量) (S に入る総流量)

証明：演習問題



カットの容量と流れ：証明

証明したいこと：流れとカットの関係

s から t へ至る任意の流れ f と任意の s, t カット S に対して

$$\text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$$

証明：

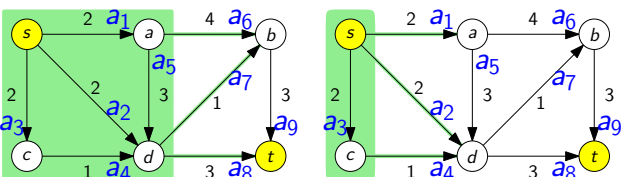
$$\begin{aligned} \text{val}(f) &\stackrel{\text{補題 A}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u,v)) \\ &\leq \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u,v)) \quad \because f((u,v)) \geq 0 \\ &\leq \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u,v)) \quad \because f((u,v)) \leq c((u,v)) \\ &= \text{cap}(S) \end{aligned}$$

□

最小カット

定義：最小 s, t カットとは？

最小 s, t カットとは、 s, t カット S で、任意の s, t カット S' に対して、 $\text{cap}(S) \leq \text{cap}(S')$ を満たすもの



最小 s, t カットではない

最小 s, t カットである

流れとカットの関係：帰結

有向グラフ $G = (V, A)$, 容量 $c: A \rightarrow \mathbb{R}$, 2 頂点 $s, t \in V$

流れとカットの関係 (重要)

f が流れ
 S が s, t カット $\Rightarrow \text{val}(f) \leq \text{cap}(S)$

最大流とカットの関係

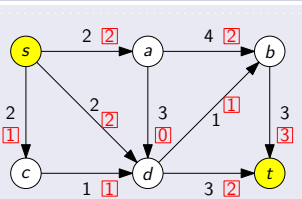
f が最大流
 S が s, t カット $\Rightarrow \text{val}(f) = \text{cap}(S)$

最大流と最小カットの関係 (弱双対性)

f が最大流
 S が最小 s, t カット $\Rightarrow \text{val}(f) = \text{cap}(S)$

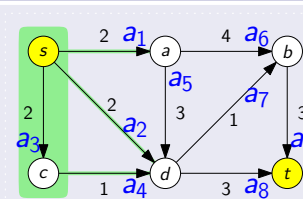
弱双対性の使い方

下界



最大流の値 ≥ 5

上界

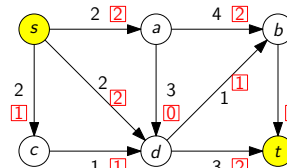


最大流の値 ≤ 5

したがって

- ▶ 左の図にある流れは最大流であり、その値は 5
- ▶ 右の図にある s, t カットは最小 s, t カットであり、その容量は 5

疑問：流れと「対」になるものは何か？ — 解答編



この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

- ▶ \rightsquigarrow 流れと「対」になるものが何なのか考えたい
- ▶ \rightsquigarrow それは s, t カット !!!

最大化	最小化
マッチング	頂点被覆
流れ	s, t カット

- ① 最大流問題とは？
- ② 流れとカットの弱双対性
- ③ 流れとカットの強双対性：最大流最小カット定理
- ④ 今日のまとめ

最大流最小カット定理

最大流最小カット定理 (強双対性) (Ford, Fulkerson '56)

f が最大流
 S が最小 s, t カット $\Rightarrow \text{val}(f) = \text{cap}(S)$

注意

弱双対性

$\text{val}(f) = \text{cap}(S)$ ならば f は最大流

強双対性

$\text{val}(f) = \text{cap}(S)$ となる f, S が必ず存在

最大流最小カット定理 — 証明に向けて

最大流最小カット定理 (強双対性) (Ford, Fulkerson '56)

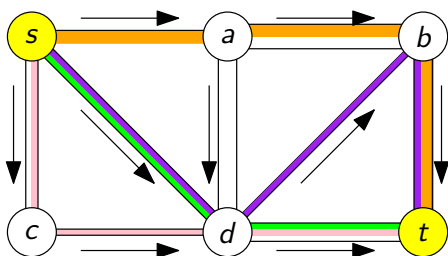
f が最大流
 S が最小 s, t カット $\Rightarrow \text{val}(f) = \text{cap}(S)$

この講義では容量が整数の場合のみ証明する

▶ 容量が無理数の場合の証明は、この講義の範囲を超える (最後に補足)

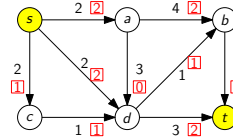
証明法：アルゴリズムによる証明

増加道法：基本アイデア



- ▶ 事実：「流れ」は「道に沿った流れ」に分解できる
- ▶ 方針：「道に沿った流れ」を次々と見つけていく

疑問：流れと「対」になるものは何か？ — 解答編 (再)



この流れが最大流であることを証明するにはどうすればよいか？

- ▶ \rightsquigarrow 流れと「対」になるものが何なのか考えたい
- ▶ \rightsquigarrow それは s, t カット !!!

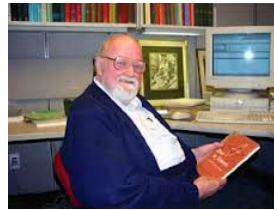
問題点？

$\text{val}(f) = \text{cap}(S)$ となる f と S が存在しないかもしれない？

解決 \rightsquigarrow (最大流最小カット定理)

$\text{val}(f) = \text{cap}(S)$ となる f と S が必ず存在する !!

Lester R. Ford, Jr. と Delbert R. Fulkerson



L. R. Ford, Jr.
 フォード
 (1927-)

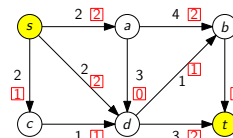


D. R. Fulkerson
 ファルカーソン
 (1924-1976)

https://arodrigu.webs.upv.es/grafos/doku.php?id=algoritmo_ford_fulkerson

最大流問題の解き方

- 1 線形計画問題として定式化し、線形計画法のアルゴリズムを使う (『数値計画法』で学ぶ)
- 2 最大流問題独自のアルゴリズムを利用する (特に、増加道法を紹介する)



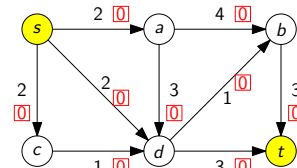
今からやること

増加道法を説明する

- ▶ 重要概念：補助ネットワーク, 増加道

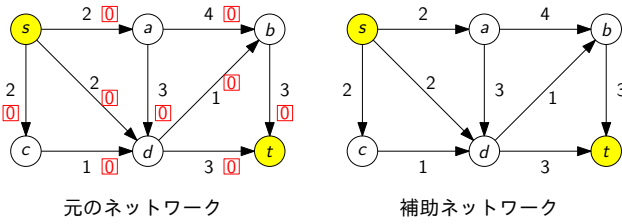
増加道法の動き (1)

任意の流れから始める (例えば、どの弧の上にも 0 だけ流れるもの)



増加道法の動き (1)：補助ネットワークの作成

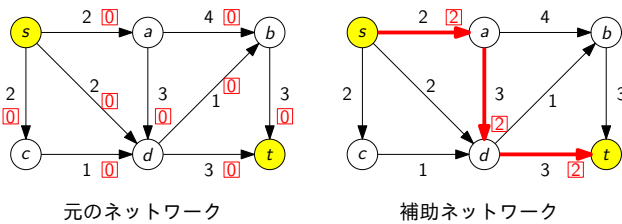
補助ネットワークを作る (残余ネットワークとも呼ばれる)



この場合は、始めのグラフと同じ
(次から変わるので、定義はそこで説明)

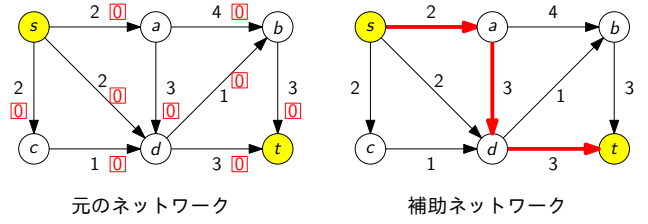
増加道法の動き (1)：流れの増加

道に沿って、できる限り流れを増加させる



増加道法の動き (1)：増加道の発見

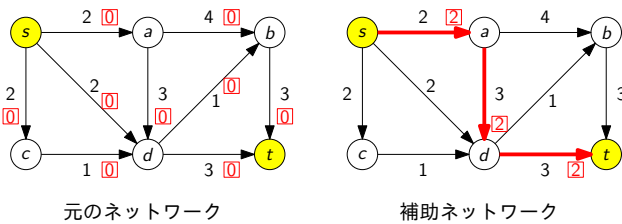
補助ネットワークにおいて、s を始点、t を終点とする道を見つける



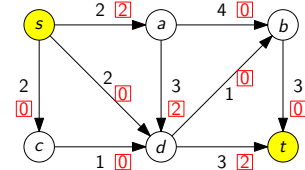
このような道を**増加道** (ぞうかどう) と呼ぶ

増加道法の動き (2)：補助ネットワークの作成

道に沿って、できる限り流れを増加させる



現在得られている流れ

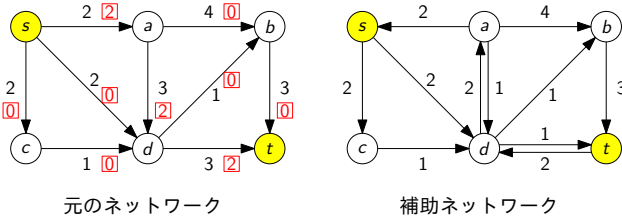


先ほどの手順を繰り返す

- ▶ 補助ネットワークの作成
- ▶ 増加道の発見
- ▶ 流れの増加

増加道法の動き (2)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る



補助ネットワークとは？

- ▶ 頂点集合はもとの有向グラフと同じ
- ▶ 2 頂点間に弧がある ⇔ その弧を通してまだ流せる (逆向き弧に注意)
- ▶ 弧の容量 = 流せる最大量

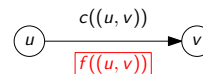
補助ネットワーク：定義

有向グラフ $G = (V, A)$, 容量 $c: A \rightarrow \mathbb{R}$, 2 頂点 s, t

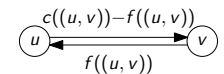
定義：流れ f に対する補助ネットワークとは？

流れ f に対する**補助ネットワーク**は次で定義される

- ▶ 有向グラフ $G_f = (V, A_f)$, $A_f = A_f^F \cup A_f^B$
 - ▶ $A_f^F = \{(u, v) \mid (u, v) \in A, f((u, v)) < c((u, v))\}$ (順向きの弧集合)
 - ▶ $A_f^B = \{(v, u) \mid (u, v) \in A, f((u, v)) > 0\}$ (逆向きの弧集合)
- ▶ 容量 $c_f: A_f \rightarrow \mathbb{R}$
 - ▶ $(u, v) \in A_f^F$ のとき, $c_f((u, v)) = c((u, v)) - f((u, v))$
 - ▶ $(v, u) \in A_f^B$ のとき, $c_f((v, u)) = f((u, v))$



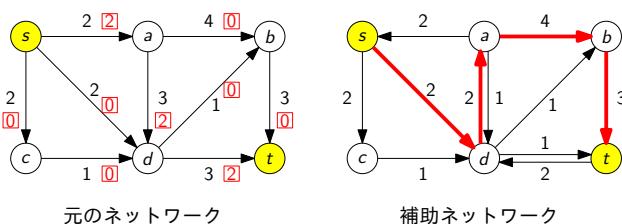
元のネットワーク



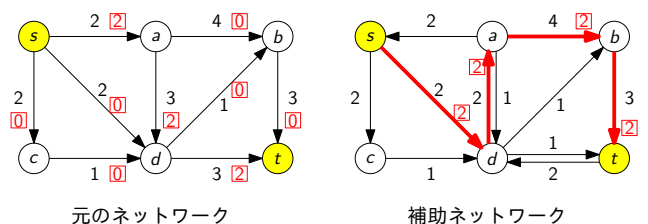
補助ネットワーク

増加道法の動き (2)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて、s を始点、t を終点とする道を見つける

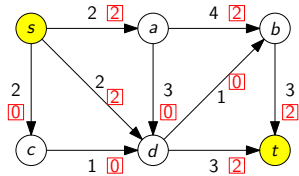


道に沿って、できる限り流れを増加させる



増加道法の動き (3)

現在得られている流れ

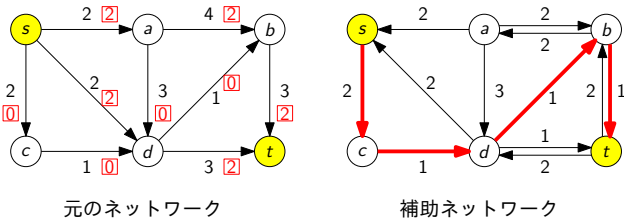


先ほどの手順を繰り返す

- ▶ 補助ネットワークの作成
- ▶ 増加道の発見
- ▶ 流れの増加

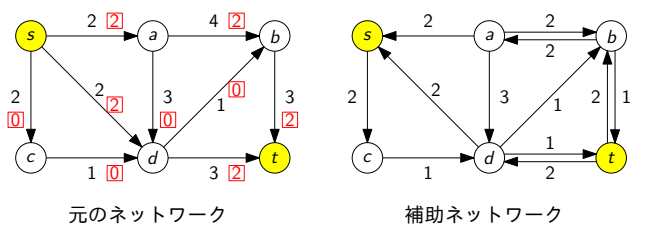
増加道法の動き (3)：増加道の発見

補助ネットワークにおいて、s を始点、t を終点とする道を見つける



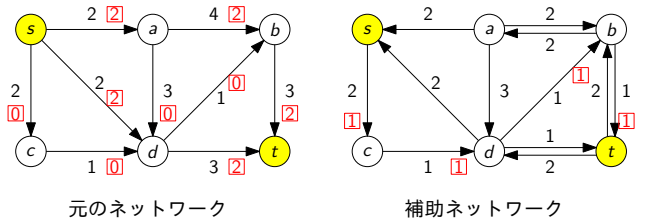
増加道法の動き (3)：補助ネットワークの作成

補助ネットワークを作る



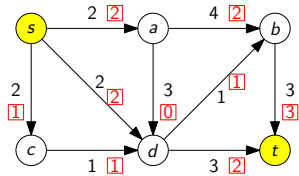
増加道法の動き (3)：流れの増加

道に沿って、できる限り流れを増加させる



増加道法の動き (4)

現在得られている流れ

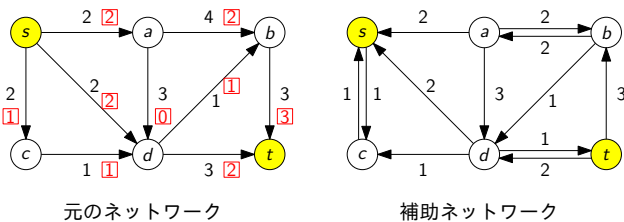


先ほどの手順を繰り返す

- ▶ 補助ネットワークの作成
- ▶ 増加道の発見
- ▶ 流れの増加

増加道法の動き (4)：増加道の発見

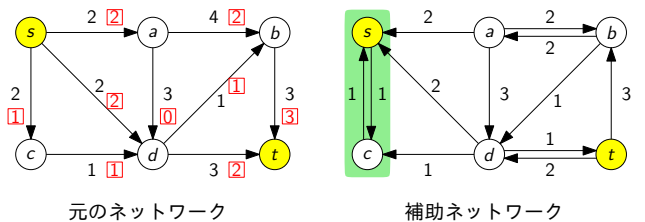
補助ネットワークにおいて、s を始点、t を終点とする道を見つける



しかし、見つからない! (存在しない) ⇨ アルゴリズムは次の段階へ

増加道法の動き (4)：到達可能頂点の探索

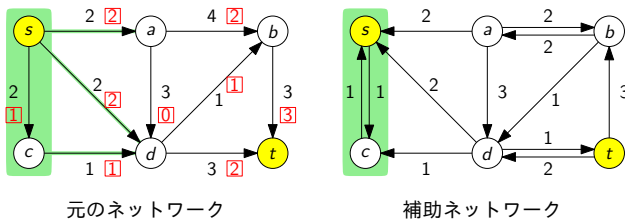
補助ネットワークにおいて、s から到達可能な頂点をすべて見つける



$$S = \left\{ v \in V \mid \begin{array}{l} \text{補助ネットワークにおいて、} s \text{ を始点として、} \\ v \text{ を終点とする道が存在する} \end{array} \right\}$$

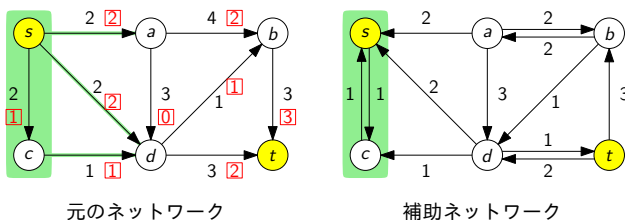
⇨ この S は s, t カットである (なぜか?)

元の有向グラフにおいて、この s, t カット S の容量 $\text{cap}(S)$ を見る



→ この容量 $\text{cap}(S)$ は得られた流れの値に等しい
 ▶ つまり、最大流と最小 s, t カットが得られた！ (アルゴリズム停止)

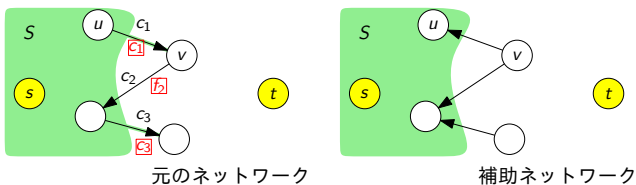
なぜ、これが最大流なのか？



- ▶ 補助ネットワークにおいて、 S から出ていく弧は存在しない
- ▶ S から出る総流量 = 5 なので、 $\text{val}(f) \geq 5$
- ▶ 一方で、 $\text{cap}(S) = 5$ 。つまり、 $\text{val}(f) \leq 5$
- ▶ ∴ $\text{val}(f) = 5$ であり、 $\text{cap}(S) = 5$

元のネットワークの弧 $(u, v) \in A$ で $u \in S, v \notin S$ であるものを考える

- ▶ $(u, v) \notin A_f$ であるので、特に $(u, v) \notin A_f^E$
- ▶ $(u, v) \notin A_f^E$ より、 $f((u, v)) = c((u, v))$



以上をまとめると

$$\begin{aligned} \text{val}(f) &\stackrel{\text{(補題 A)}}{=} \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} f((u, v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} f((u, v)) \\ &= \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u, v)) - \sum_{(u,v) \in A: u \notin S, v \in S} 0 \\ &= \sum_{(u,v) \in A: u \in S, v \notin S} c((u, v)) \\ &= \text{cap}(S) \end{aligned}$$

つまり、 $\text{val}(f) = \text{cap}(S)$ となり、弱双対性より、 f は最大流である □

補足

この S は最小 s, t カットである

有向グラフ $G = (V, A)$ ，容量 $c: A \rightarrow \mathbb{R}$ ，2 頂点 s, t

アルゴリズム：増加道法

初期化：流れ $f := 0$

- 1 f に対する補助ネットワーク (G_f と c_f) を作る
- 2 G_f において s を始点、 t を終点とする道を見つける
- 3 存在するとき、その道に沿って流れを増加。1 に戻る
- 4 存在しないとき、 f を出力

今から証明すること

- ▶ 増加道法が停止したとき、最大流を出力すること (正当性)
- ▶ 増加道法が必ず停止すること (停止性)

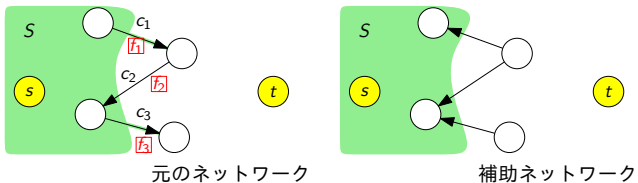
注：とりあえず、アルゴリズムの「効率性」は無視

増加道法の正当性

増加道法が停止したとき、その出力 f は最大流である

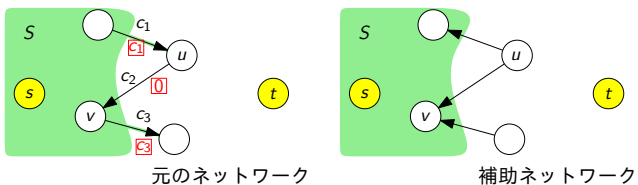
証明：増加道法が停止したときの状況を考える

- ▶ 出力 f に対する補助ネットワークにおいて、 s から到達可能な頂点全体の集合を S とする
- ▶ S は s, t カットである (なぜか?)
- ▶ つまり、補助ネットワークの弧 $(u, v) \in A_f$ で $u \in S$ かつ $v \notin S$ となるものは存在しない

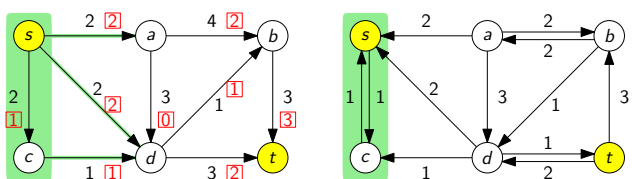


元のネットワークの弧 $(u, v) \in A$ で $u \notin S, v \in S$ であるものを考える

- ▶ $(v, u) \notin A_f$ であるので、特に $(v, u) \notin A_f^E$
- ▶ $(v, u) \notin A_f^E$ より、 $f((v, u)) = 0$

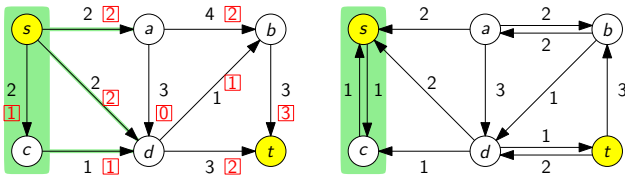


なぜ増加道法は停止するのか？



- ▶ 容量は整数なので、最小 s, t カットの容量も整数
- ▶ 容量は整数なので、補助ネットワークの容量も 1 以上の整数
- ▶ ∴ 反復が行われる度に、流れの値は 1 以上増える
- ▶ ∴ 反復回数は高々最小 s, t カットの容量で、これは有限 □

つまり、容量が整数であるならば、出力される最大流も整数



整数流定理 (重要)

容量が整数 \Rightarrow どの弧に流れる量も整数である最大流が存在

最大流の値が整数であり、なおかつ、どの弧に流れる量も整数

目次

- ① 最大流問題とは？
- ② 流れとカットの弱双対性
- ③ 流れとカットの強双対性：最大流最小カット定理
- ④ 今日のまとめ

注意 1

弧の容量に無理数が出てくるとき、

- ▶ 増加道法が有限ステップで終了しないこともある
- ▶ 増加道法の収束先が最大流ではないこともある
- ▶ その 2 つが同時に起こることもある

注意 2

増加道法における、増加道の選び方は工夫できる

- ▶ 工夫しない (Ford-Fulkerson のアルゴリズム)
- ▶ 幅優先探索を用いる (Edmonds-Karp のアルゴリズム)

Edmonds-Karp のアルゴリズムは多項式時間アルゴリズムである (Ford-Fulkerson のアルゴリズムはそうではない)

今日のまとめ

今日の目標

最大流問題に関して次ができるようになる

- ▶ 「流れ」が何であるのか記述でき、基本性質を証明できる
- ▶ 流れとカットの双対性により流れの最大性を証明できる

重要な定理

- ▶ 最大流最小カット定理
- ▶ 整数流定理

次回予告

最大流を用いた数理モデル化