グラフとネットワーク 第 1 回
グラフの定義と次数：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 4 月 10 日

最終更新：2017 年 4 月 10 日　09:41

概要

主題

離散最適化の入門として，次を概説する
- グラフとネットワークを用いた数理モデル化
- アルゴリズム的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

達成目標

以下の 4 項目をすべて達成すること
1. グラフやネットワークに関する用語を正しく使うことができる
2. 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し，数理モデルを構築できる
3. アルゴリズム的解法の背後にある数理，特に，最小最大定理の重要性を説明でき，それを用いて最適性の証明ができる
4. グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を証明できる

どんな問題を扱うのか：例 1 — 優勝可能性の判定

MLB アメリカンリーグ 東地区 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

NYY = ニューヨーク・ヤンキース，BAL = ボルティモア・オリオールズ，
BOS = ボストン・レッドソックス，TOR = トロント・ブルージェイズ，
DET = デトロイト・タイガース

優勝可能性判定問題

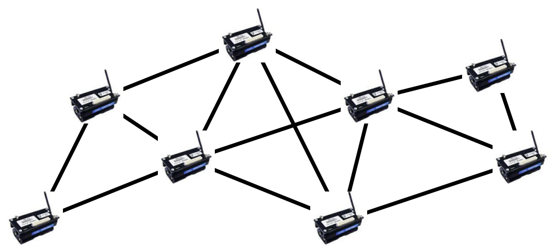
DET はまだ地区優勝が可能か？　(注：引き分けはない)

⇝ 最大流　http://lyle.smu.edu/~olinick/riot/detroit.html

どんな問題を扱うのか：例 2 — センサネットワークにおける通信

センサネットワークにおける通信

どのようにルーティング経路を設定すれば十分か？

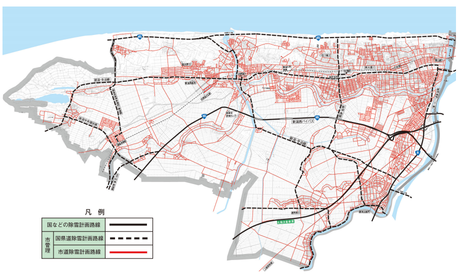


⇝ 全域木，連結性　http://www.ipros.jp/product/detail/153568008/

どんな問題を扱うのか：例 3 — 除雪計画

除雪計画

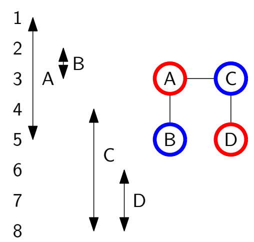
除雪車を効率よく運行するルートを決定したい



⇝ オイラー回路，マッチング
https://www.city.niigata.lg.jp/nishi/kohoshi/pr/h24/nishi_1202/nishi_136_2.html

どんな問題を扱うのか：例 4 — コンパイラにおけるレジスタ割当

```
1: A = 2
2: B = 3
3: B = B + 2
4: C = A + 1
5: A = C + 3
6: D = 4
7: D = C + 2
8: C = 3
```

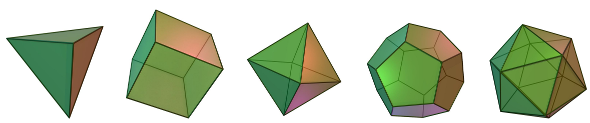



```
1: R1 = 2
2: R2 = 3
3: R2 = R2 + 2
4: R2 = R1 + 1
5: R1 = R2 + 3
6: R1 = 4
7: R1 = R2 + 2
8: R2 = 3
```

⇝ 彩色

どんな問題を扱うのか：例 5 — 正多面体 (3 次元)

正多面体とは，各面が合同な正多角形であり，
各頂点に集まる面の数が同じであるような多面体のこと



正四面体　正六面体　正八面体　正十二面体　正二十面体

http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

疑問

この 5 つの他に，正多面体はあるのか？

解答

この 5 つの他に，正多面体は存在しない

⇝ 平面グラフ

スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの定義と次数：数理　(4/10)
2. 道と閉路：数理　(4/17)
3. 木：数理　(4/24)
4. マッチング：数理　(5/1)
5. マッチング：モデル化　(5/8)
6. 最大流：数理　(5/15)
7. 最大流：モデル化 (1)　(5/22)
8. 最大流：モデル化 (2)　(5/29)
9. 連結性：数理とモデル化　(6/5)
- 中間試験　(6/12)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8 彩色：数理 (6/19)
9 彩色：モデル化 (6/26)
∗ 休講 (出張) (7/3)
10 平面グラフ：数理 (7/10)
∗ 休講 (海の日) (7/17)
11 平面グラフ：モデル化 (7/24)
12 予備日 (たぶんやらない) (7/31)
• 期末試験 (8/7)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員
- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

ティーチング・アシスタント
- 蛭田 海斗 (ひるた かいと)
- 居室：西 4 号館 2 階 202 号室 (岡本研究室)

講義資料
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2017/gn/
- 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- 講義の前の週の金曜の 18:00 までに，ここに置かれる

講義資料

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2017/gn/
- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題
- 用語一覧
- Jupyter Notebook (Python 3)

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

Twitter: @okamoto7yoshio

講義資料が掲載されたら一言発せられる (手動更新)

授業の進め方

講義 (75 分)
- スライドと板書で進める
- スライドのコピーに重要事項のメモを取る

演習 (15 分)
- 演習問題に取り組む
- 不明な点は教員に質問する

退室 (0 分) ←重要
- コメント (授業の感想，質問など) を紙に書いて提出する (匿名可)
- コメントとそれに対する回答は (匿名で) 講義ページに掲載される

オフィスアワー：金曜 5 限
- 質問など
- ただし，いないときもあるので注意

演習問題

演習問題の進め方
- 授業のおわり 15 分は演習問題を解く時間
- 残った演習問題は自習用 (復習・試験対策用)
- 注意：「模範解答」のようなものは存在しない

演習問題の種類
- 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- 補足問題：講義で省略した内容を補足
- 追加問題：講義の内容に追加
- 発展問題：少し難しい (かもしれない)

演習問題 (続)

答案の提出
- 演習問題の答案をレポートとして提出してもよい
- レポートには提出締切がある (各回にて指定)
- レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- レポートにはコメントがつけられて，返却される
  - 返却された内容については，再提出ができる (再提出締切は原則なし)
  - 再提出の際，返却された答案も添付しなくてはならない

評価

中間試験と期末試験のみによる
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
  - その中の 2 題以上は演習問題として提示されたものと同一である (ただし,「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 15 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分 (おそらく)
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

成績評価
- $\min\{100, \text{中間試験の素点} + \text{期末試験の素点}\}$ による

格言

格言 (三省堂 大辞林)

短い言葉で、人生の真理や処世術などを述べ、教えや戒めとした言葉。「石の上にも三年」「沈黙は金」など。金言。

格言 (この講義における)

講義内容とは直接関係ないかもしれないが，
私 (岡本) が重要だと思うこと

格言 (の例)

単位取得への最短の道のりは，授業に出て，演習問題を解くこと

教科書・参考書

教科書

- 指定しない

参考書

- 藤重悟,「グラフ・ネットワーク・組合せ論」，共立出版，2002.
- 繁野麻衣子,「ネットワーク最適化とアルゴリズム」，朝倉書店，2010.
- R.J. ウィルソン (著)，西関隆夫，西関裕子 (訳),「グラフ理論入門 原書第 4 版」，近代科学社，2001.
- 茨木俊秀，永持仁，石井利昌,「グラフ理論」，朝倉書店，2010.
- など

この講義の約束

- 私語はしない (ただし，演習時間の相談は積極的に OK)
- 携帯電話等はマナーモードにする
- この講義と関係のないことを (主に電子機器で) しない
- 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

目次

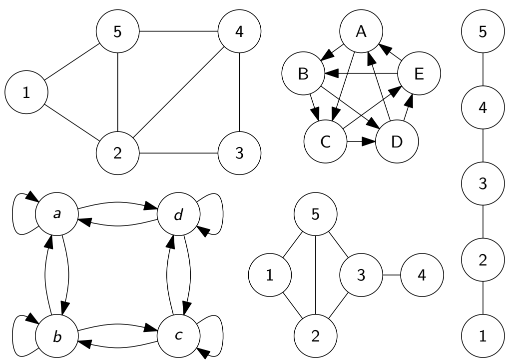
1. グラフとは？
2. グラフの次数
3. 今日のまとめ

概要

今日の目標

- グラフの定義を理解する
- 数え上げによる証明の手法を理解し，使えるようになる

グラフの例



有向グラフ

有向グラフとは？

有向グラフとは，順序対 (V, A) で，

- V は集合
- $A \subseteq V \times V$ は V の順序対の集合

であるもののこと

例：

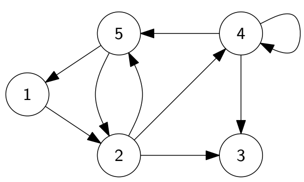
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$

注意

$(2, 5) \neq (5, 2)$ (順序対では順序が大事)

有向グラフの図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$



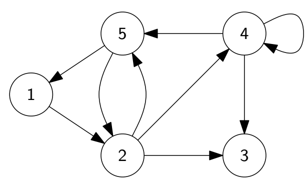
有向グラフの用語

有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフの用語

- V の要素を G の頂点と呼ぶ
- A の要素を G の弧と呼ぶ
- V を G の頂点集合と呼ぶ
- A を G の弧集合と呼ぶ
- 弧 $(u, v) \in A$ に対して，u はその始点であり，v はその終点である

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$
- 頂点 2 は弧 $(2, 3)$ の始点，頂点 3 は弧 $(2, 3)$ の終点



無向グラフ

無向グラフとは？

無向グラフとは，順序対 (V, E) で，
- V は集合
- $E \subseteq 2^V$ は V の 要素数 2 の部分集合の集合

であるもののこと

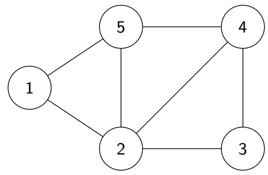
例：
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

注意

$\{2, 5\} = \{5, 2\}$ (集合では順序を不問)

無向グラフの図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

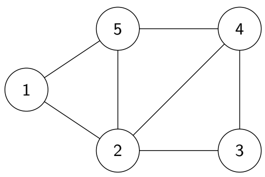


無向グラフの用語

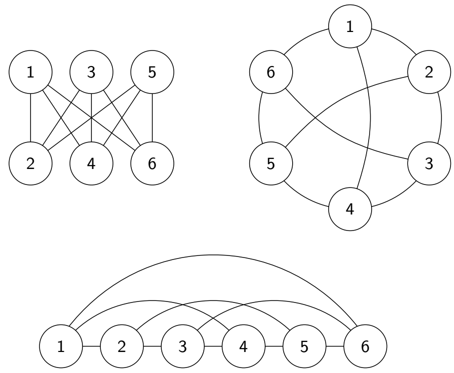
無向グラフ $G = (V, E)$

無向グラフの用語
- V の要素を G の頂点と呼ぶ
- E の要素を G の辺と呼ぶ
- V を G の頂点集合と呼ぶ
- E を G の辺集合と呼ぶ
- 辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，u, v をその端点と呼ぶ
- 頂点 v が辺 e の端点であるとき，v は e に接続するという
- 頂点 u と v が辺を成すとき，u と v は隣接するという

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$ $\{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$
- 頂点 2, 3 は辺 $\{2, 3\}$ の端点
- 頂点 2 は辺 $\{2, 3\}$ に接続する
- 頂点 2 と頂点 3 は隣接する



1 つのグラフに対するいろいろな図示



用語に関する注意

有向グラフ
- 「頂点」の別名：「節点」,「ノード」,「点」
- 「弧」の別名：「辺」,「有向辺」,「枝」,「アーク」,「エッジ」

無向グラフ
- 「頂点」の別名：「節点」,「ノード」,「点」
- 「辺」の別名：「無向辺」,「枝」,「エッジ」

目次

1 グラフとは？
2 グラフの次数
3 今日のまとめ

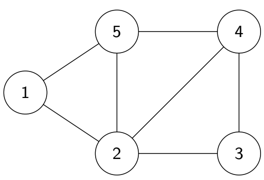
無向グラフにおける頂点の次数

無向グラフ $G = (V, E)$，頂点 $v \in V$

頂点 v の次数とは？

頂点 $v \in V$ の次数とは，v に接続する辺の数のこと

$$\deg_G(v) = |\{e \in E \mid \exists\, u \in V\ (e = \{u, v\})\}|$$



- $\deg_G(1) = 2$
- $\deg_G(2) = 4$
- $\deg_G(3) = 2$
- $\deg_G(4) = 3$
- $\deg_G(5) = 3$

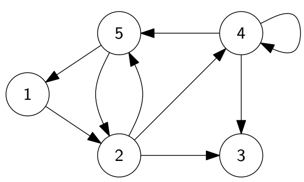
有向グラフにおける頂点の入次数

有向グラフ $G = (V, A)$，頂点 $v \in V$

頂点 v の入次数とは？

頂点 $v \in V$ の入次数とは，v を終点とする弧の数のこと

$$\deg^-_G(v) = |\{a \in A \mid \exists\, u \in V\ (a = (u, v))\}|$$



- $\deg^-_G(1) = 1$
- $\deg^-_G(2) = 2$
- $\deg^-_G(3) = 2$
- $\deg^-_G(4) = 2$
- $\deg^-_G(5) = 2$

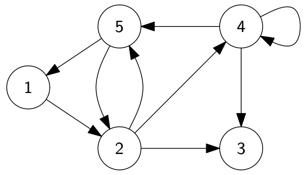
有向グラフにおける頂点の出次数

有向グラフ $G = (V, A)$，頂点 $v \in V$

頂点 v の出次数とは？

頂点 $v \in V$ の**出次数**とは，v を始点とする弧の数のこと

$$\deg^+_G(v) = |\{a \in A \mid \exists\, u \in V\ (a = (v, u))\}|$$



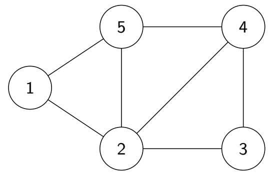
- $\deg^+_G(1) = 1$
- $\deg^+_G(2) = 3$
- $\deg^+_G(3) = 0$
- $\deg^+_G(4) = 3$
- $\deg^+_G(5) = 2$

握手補題

無向グラフ $G = (V, E)$

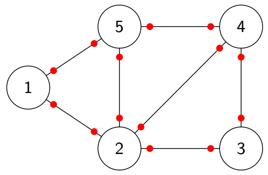
握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$



- $\deg_G(1) = 2$
- $\deg_G(2) = 4$
- $\deg_G(3) = 2$
- $\deg_G(4) = 3$
- $\deg_G(5) = 3$
- $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2 + 4 + 2 + 3 + 3 = 14$
- $|E| = 7$

握手補題の証明：準備 (直感)



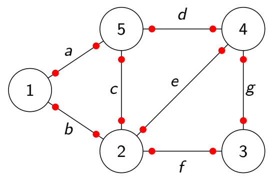
- G の各頂点の周りを見て，接続する辺の上に石を置く
- **石の総数を計算する**

数え方 1
- 頂点 v の周りの石の数 $= \deg_G(v)$
- $\therefore$ 石の総数 $= \sum_{v \in V} \deg_G(v)$

数え方 2
- 各辺 e の上の石の数 $= 2$
- $\therefore$ 石の総数 $= \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$

したがって
- $\sum_{v \in V} \deg_G(v) =$ 石の総数 $= 2|E|$

握手補題の証明：準備 (行列)



$V \backslash E$	a	b	c	d	e	f	g	
1	1	1						$= \deg_G(1)$
2		1	1		1	1		$= \deg_G(2)$
3						1	1	$= \deg_G(3)$
4				1	1		1	$= \deg_G(4)$
5	1		1	1				$= \deg_G(5)$
	$= 2$	$= 2$	$= 2$	$= 2$	$= 2$	$= 2$	$= 2$	

握手補題の証明

$G = (V, E)$ は無向グラフであるとする．
- 次のように行列 $M \in \mathbb{R}^{V \times E}$ と定義する

$$\text{各 } v \in V, e \in E \text{ に対して，} \quad M_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ は } e \text{ の端点である}) \\ 0 & (v \text{ は } e \text{ の端点ではない}) \end{cases}$$

- 任意の頂点 $v \in V$ に対して，v を端点とする辺の数は $\deg_G(v)$ なので，

$$\sum_{v \in V} \sum_{e \in E} M_{v,e} = \sum_{v \in V} \left(\sum_{e \in E} M_{v,e} \right) = \sum_{v \in V} \deg_G(v)$$

- 任意の辺 $e \in E$ に対して，e の端点の数は 2 なので，

$$\sum_{v \in V} \sum_{e \in E} M_{v,e} = \sum_{e \in E} \left(\sum_{v \in V} M_{v,e} \right) = \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$$

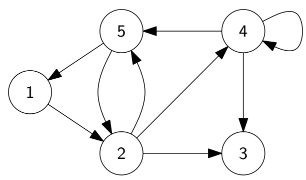
- したがって，$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$ □

有向グラフに対する握手補題

有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフに対する握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg^-_G(v) = |A|, \qquad \sum_{v \in V} \deg^+_G(v) = |A|$$



- $\deg^-_G(1) = 1$
- $\deg^-_G(2) = 2$
- $\deg^-_G(3) = 2$
- $\deg^-_G(4) = 2$
- $\deg^-_G(5) = 2$
- $\sum_{v \in V} \deg^-_G(v) = 1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 9$
- $|A| = 9$

証明：演習問題

無向グラフの最大次数と最小次数

無向グラフ $G = (V, E)$

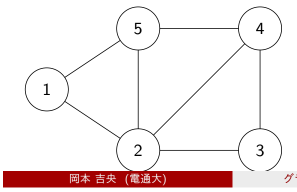
最大次数，最小次数とは？

G の**最大次数**とは，G の頂点の次数の最大値

$$\Delta(G) = \max\{\deg_G(v) \mid v \in V\}$$

G の**最小次数**とは，G の頂点の次数の最小値

$$\delta(G) = \min\{\deg_G(v) \mid v \in V\}$$



- $\deg_G(1) = 2$
- $\deg_G(2) = 4$
- $\deg_G(3) = 2$
- $\deg_G(4) = 3$
- $\deg_G(5) = 3$

- $\Delta(G) = 4$
- $\delta(G) = 2$

有向グラフの最大入次数と最小入次数

有向グラフ $G = (V, E)$

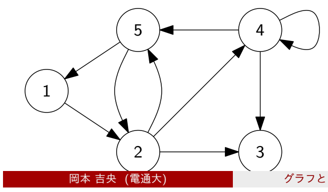
最大入次数，最小入次数とは？

G の**最大入次数**とは，G の頂点の入次数の最大値

$$\Delta^-(G) = \max\{\deg^-_G(v) \mid v \in V\}$$

G の**最小入次数**とは，G の頂点の入次数の最小値

$$\delta^-(G) = \min\{\deg^-_G(v) \mid v \in V\}$$



- $\deg^-_G(1) = 1$
- $\deg^-_G(2) = 2$
- $\deg^-_G(3) = 2$
- $\deg^-_G(4) = 2$
- $\deg^-_G(5) = 2$

- $\Delta^-(G) = 2$
- $\delta^-(G) = 1$

有向グラフの最大出次数と最小出次数

有向グラフ $G = (V, E)$

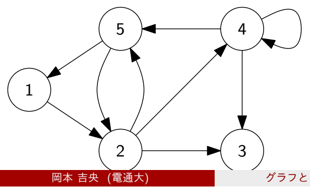
最大出次数，最小出次数とは？

G の最大出次数とは，G の頂点の出次数の最大値

$$\Delta^+(G) = \max\{\deg^+_G(v) \mid v \in V\}$$

G の最小出次数とは，G の頂点の出次数の最小値

$$\delta^+(G) = \min\{\deg^+_G(v) \mid v \in V\}$$



- $\deg^+_G(1) = 1$
- $\deg^+_G(2) = 3$
- $\deg^+_G(3) = 0$
- $\deg^+_G(4) = 3$
- $\deg^+_G(5) = 2$

- $\Delta^+(G) = 3$
- $\delta^+(G) = 0$

最小次数，平均次数，最大次数の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

最小次数，平均次数，最大次数の関係

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明：

- 握手補題より，G の平均次数は $\frac{1}{|V|}\sum_{v\in V} \deg_G(v) = \frac{2|E|}{|V|}$.
- 最小次数は平均次数以下なので，$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|}$.
- 最大次数は平均次数以上なので，$\Delta(G) \geq \frac{2|E|}{|V|}$. □

格言

最小値 $\leq$ 平均値 $\leq$ 最大値

最大次数の下界と最小次数の上界

無向グラフ $G = (V, E)$

帰結

1. ある頂点 $v \in V$ が存在して，$\deg_G(v) \geq \frac{2|E|}{|V|}$
2. ある頂点 $v \in V$ が存在して，$\deg_G(v) \leq \frac{2|E|}{|V|}$

証明：

1. v として最大次数を持つ頂点を考えればよい. □
2. v として最小次数を持つ頂点を考えればよい. □

目次

1. グラフとは？
2. グラフの次数
3. 今日のまとめ

今日のまとめ

今日の目標

- グラフの定義を理解する
- 数え上げによる証明の手法を理解し，使えるようになる