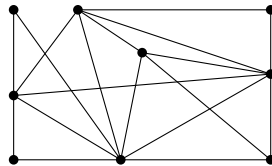
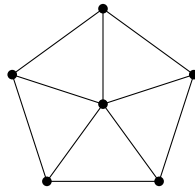


10:40-12:10. 携帯電話, タブレット等は電源を切ってカバンの中にしまうこと. 使用可能な解答用紙は1枚のみ.
採点終了次第, 講義 web ページにて, 得点分布, 講評などを掲載する.
採点結果を知りたい場合は, 解答用紙右上「評点」欄の中に5文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと(その文字列は控えておくように).
採点終了後, そのランダム文字列と得点の対応表を公開する.

問題 1 次の無向グラフにおいて, 色数最小の彩色を与えよ. その彩色の色数が最小であることも証明せよ.



問題 2 次の図にある無向グラフ G がどの無向グラフの線グラフでもない(つまり, $G = L(H)$ となる無向グラフ H が存在しない) ということを証明せよ.



(補足: 無向グラフ $H = (V, E)$ の線グラフとは, 頂点集合が E であり, 辺集合が

$$\{\{e_1, e_2\} \mid e_1 \text{ と } e_2 \text{ が } H \text{ において共通端点を持つ}\}$$

であるような無向グラフのことであり, $L(H)$ と表記する.)

問題 3 各面が正五角形か正六角形であるような3次元凸多面体において, 正五角形である面の数が必ず12になることを証明せよ. (ヒント: 3次元凸多面体のグラフが平面的であるという事実を用いてもよい. まず, 各頂点の次数が3であることを証明せよ.)

問題 4 次の (A), (B) のいずれか一方を選択して解答せよ.
(どちらを選んだか明記すること. (A) と (B) の双方を解答している場合は, どちらも採点されない.)

(A) 無向グラフ $G = (V, E)$ の異なる2頂点 s, t は辺で結ばれていないとする. このとき,

$$|V| + \kappa_{s,t}(G) \geq \deg_G(s) + \deg_G(t) + 2$$

が成り立つことを証明せよ. ただし, $\kappa_{s,t}(G)$ は G の s, t 点連結度を表す.

(B) 正整数 k, ℓ に対して, 二部グラフ $G = (V, E)$ は辺数 k のマッチングを持たず, かつ, G は部分グラフとして $K_{1,\ell}$ を含まないとする. このとき, $|E| \leq (k-1)(\ell-1)$ が成り立つことを証明せよ.

以上