

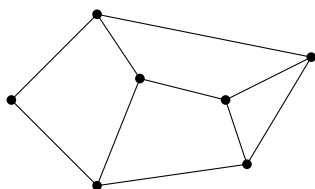
提出締切：2017年6月26日 講義終了時

復習問題 10.1 無向グラフ G が2彩色可能であるための必要十分条件は、 G が二部グラフであることである。これを証明せよ。

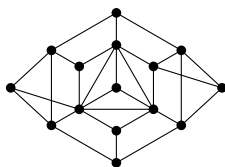
復習問題 10.2 任意の無向グラフ G に対して、その染色数 $\chi(G)$ と最大次数 $\Delta(G)$ が $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ という関係を満たすことを証明せよ。

復習問題 10.3 任意の無向グラフ G に対して、その染色数 $\chi(G)$ と任意のクリーク $C \subseteq V$ が $\chi(G) \geq |C|$ という関係を満たすことを証明せよ。

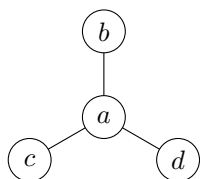
復習問題 10.4 次の無向グラフにおける色数最小の彩色を与えよ。その彩色の色数が最小であることも証明せよ。



復習問題 10.5 次の無向グラフにおける色数最小の彩色を与えよ。その彩色の色数が最小であることも証明せよ。



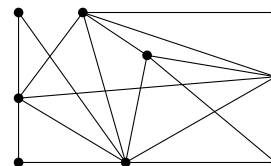
補足問題 10.6 次の図にある無向グラフ G がどの無向グラフの線グラフではない(つまり、 $G = L(H)$ となる無向グラフ H が存在しない) ということを証明せよ。



補足問題 10.7 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して、頂点集合 V 上のある全順序が存在して、その全順序に従って貪欲彩色を行うと、色数最小の彩色が得られることを証明せよ。(ヒント：直感を得るために、まず G が二部グラフの場合を考えるとよいかもしれない。)

追加問題 10.8 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と G の任意の独立集合 $I \subseteq V$ を考える。このとき、 I の補集合 $V - I$ は G の頂点被覆であることを証明せよ。

追加問題 10.9 次の無向グラフにおいて、色数最小の彩色を与えよ。その彩色の色数が最小であることも証明せよ。



追加問題 10.10 無向グラフ $G = (V, E)$ に対して、その独立集合の頂点数の最大値を $\alpha(G)$ で表す。このとき、 $\alpha(G)\chi(G) \geq |V|$ が成り立つことを証明せよ。

追加問題 10.11 任意の自然数 $k \geq 2$ に対して、次の性質を持つ二部グラフ $G = (V, E)$ を構成せよ。性質： G の最大次数は k であり、 V 上のある全順序 σ が存在して、それに従う貪欲彩色によって G の彩色として色数 $k + 1$ のものが得られる。(注意： k は2以上の任意の自然数であることに注意する。すなわち、 k によって G は変わる。)