提出締切： 2017 年 6 月 5 日 講義終了時

復習問題 8.1 Kőnig–Egerváry の定理は「任意の二部グラフ $G = (V, E)$ において，G の最大マッチング M と G の最小頂点被覆 $C \subseteq V$ に対して，$|M| = |C|$ となる」ことを主張している．以下の手順にしたがって，Kőnig–Egerváry の定理を証明せよ．

1. 二部グラフ G の部集合を A, B とする．このとき，G から次の有向グラフ $G' = (V', A')$ を構成する．すなわち，$V' = V \cup \{s, t\}$ であり，
$$A' = \{(u, v) \mid \{u, v\} \in E, u \in A, v \in B\} \cup \{(s, u) \mid u \in A\} \cup \{(v, t) \mid v \in B\}$$
とするのである．また，G' の各弧 $(x, y) \in A'$ に対して容量を
$$c((x, y)) = \begin{cases} 1 & (x = s \text{ または } y = t \text{ のとき}), \\ \infty & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$
と定める．(ただし，∞ は十分大きな整数を表す記号であると見なす．) G' において s から t へ至る最大流の値が G の最大マッチングの辺数以下であることを証明せよ．(ヒント：整数流定理を用いよ．)
2. 上で構成した有向グラフと弧容量に対して，G' における最小 s, t カットの容量が G の最小頂点被覆の頂点数以上であることを証明せよ．
3. 最大マッチングと最小頂点被覆に対する弱双対性と最大流と最小 s, t カットに対する強双対性を用いて，Kőnig–Egerváry の定理の証明を完結させよ．

復習問題 8.2 二部グラフ $G = (V, E)$ を考える．ただし，V は部集合 A, B へ分割されるものとする．このとき，Hall の結婚定理は「G が A の頂点をすべて飽和するマッチングを持つための必要十分条件は，任意の $S \subseteq A$ に対して $|S| \leq |N(S)|$ が成り立つことである」と主張している．以下の手順に従って，Hall の結婚定理を証明せよ．

1. まず，条件の必要性を証明せよ．
2. 条件の十分性を示すために，対偶，すなわち，「G が A の頂点をすべて飽和するマッチングを持たないならば，ある $S \subseteq A$ に対して $|S| > |N(S)|$ が成り立つ」ことを示せ．

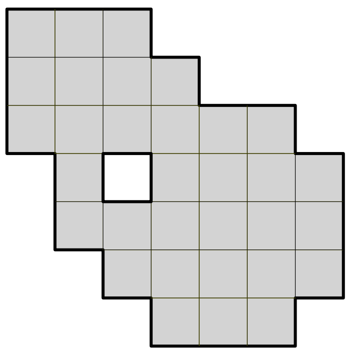
復習問題 8.3 トランプ・カードの 1 デッキには，各ランク (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K) のカードが 4 枚ずつ存在する．つまり，カードの総枚数は 52 である．この 52 枚のカードを 4 枚ずつ 13 個の組へ任意に分けたとき，各組から 1 枚ずつカードをうまく選ぶと，すべてのランクのカードを取り出せることを証明せよ．

追加問題 8.4 二部グラフ $G = (V, E)$ のすべての頂点の次数が同じであるとする．そして，この次数が 1 以上であると仮定する．

1. G の 2 つの部集合を A と B とするとき，$|A| = |B|$ が成り立つことを証明せよ．
2. G が A の頂点をすべて飽和するマッチングを持つことを証明せよ．
3. 以上より，G が完全マッチングを持つことを証明せよ．

追加問題 8.5 二部グラフ $G = (V, E)$ の辺数を m とし，最大次数を $\Delta \geq 1$ とする．Kőnig–Egerváry の定理を用いて，G が辺数 m/Δ 以上のマッチングを持つことを証明せよ．

追加問題 8.6 次の灰色の部分で表された図形に 1×2 の長方形をいくつか重なりあうことなく置くことで，この図形全体を覆うことができるだろうか？ 理由も付けて答えよ．



(ヒント：二部グラフのマッチングに関する問題としてモデル化せよ．)

次のページへ続く

追加問題 (発展) 8.7 実正方行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が**二重確率行列**であるとは，A の任意の成分が非負であり，P のどの行の成分和，どの列の成分和も 1 であることである．二重確率行列が**置換行列**であるとは，その成分がどれも 0 か 1 であることである．

任意の二重確率行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して，ある自然数 m と非負実数 $c_1, \ldots, c_m$，置換行列 $P_1, \ldots, P_m$ が存在して，

$$A = c_1 P_1 + \cdots + c_m P_m \quad \text{かつ} \quad c_1 + \cdots + c_m = 1$$

が成り立つことを証明せよ．例えば，

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 5/6 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

という等式が成立する．(ヒント：A における非零成分の数に関する数学的帰納法を用いてもよい．そのとき，Hall の結婚定理が使えるか考えてみよ．) (補足：これは，バーコフ・フォンノイマンの定理と呼ばれ，最適化理論において重要な役割を果たしている．)