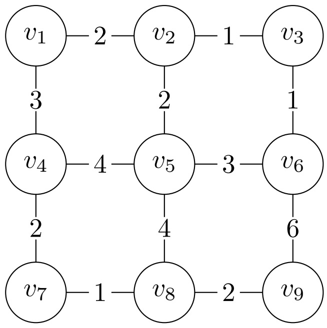
グラフとネットワーク (5) 演習問題

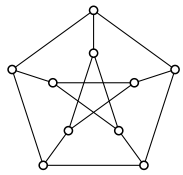
2017 年 5 月 8 日
岡本 吉央

提出締切： 2017 年 5 月 15 日 講義終了時

復習問題 5.1 次の辺重み付き無向グラフで表現された道路網を持つ都市における除雪車計画問題を完全グラフにおける最小重み完全マッチング問題としてモデル化せよ．



復習問題 5.2 次のグラフ上のスリザーが先手必勝であることを証明せよ．



注意：このグラフに対して先手必勝であることのみを証明すればよい．

補足問題 5.3 完全グラフ $G = (V, E)$ と非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$ を考える．このとき，G のある最大マッチングは w に関する G の最大重みマッチングであることを証明せよ．

補足問題 5.4 次の言明は正しくない．反例を示せ．

> 完全グラフ $G = (V, E)$ と非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$ に対して，G の任意の最大マッチングは w に関する G の最大重みマッチングである．

補足問題 5.5 次の言明は正しくない．反例を示せ．

> 無向グラフ $G = (V, E)$ と非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$ に対して，w に関する G の任意の最大重みマッチングは G の最大マッチングである．

補足問題 5.6 完全グラフ $G = (V, E)$ と非負辺重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}$ を考える．ただし，$|V|$ は偶数であるとする．このとき，任意の $e \in E$ に対して

$$w'(e) = \max\{w(f) \mid f \in E\} - w(e) + 1$$

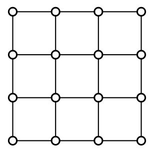
とすることで非負辺重み関数 $w' \colon E \to \mathbb{R}$ を定義すると，次の 2 つが同値であることを示せ．

1. M は w に関する G の最小重み完全マッチングである．
2. M は w' に関する G の最大重みマッチングである．

補足問題 (発展) 5.7 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ を考える．連結無向グラフ G がオイラー回路を持つための必要十分条件は，G の任意の頂点の次数が偶数であることである．これを証明せよ．

補足問題 5.8 任意の無向グラフにおいて，次数が奇数である頂点の数は偶数であることを証明せよ．(ヒント：握手補題を用いる．)

追加問題 5.9 $m \times n$ の整数格子，つまり，$\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ という 2 次元整数点集合を頂点集合とし，第 1 座標か第 2 座標の一方のみがちょうど 1 だけ異なり，もう一方は同じである 2 頂点を辺で結ぶことによって得られる無向グラフを考え，それを $P_m \times P_n$ と表記することにする．次の図は，$P_4 \times P_4$ を表している．



m と n のいずれかが偶数であるとき (両方が偶数であってもよい)，$P_m \times P_n$ 上のスリザーが先手必勝であることを証明せよ．

追加問題 (発展) 5.10 上の問題と同じ $P_m \times P_n$ を考える．m と n が両方とも奇数であるとき，$P_m \times P_n$ 上のスリザーが後手必勝であることを証明せよ．