グラフとネットワーク (2) **2017 年 4 月 17 日**

演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2017 年 4 月 24 日

復習問題 2.1 無向グラフ G と自然数 $k \in \mathbb{N}$ を考える (ただし，$k \geq 2$)．このとき，$\delta(G) \geq k-1$ ならば，G が頂点数 k の道を含むことを証明せよ．

補足問題 2.2 頂点数 n の道が持つ辺の数が $n-1$ であることを証明せよ．(ヒント：$n \geq 2$ のとき，そのような道には次数 1 の頂点が 2 つあり，それ以外の頂点の次数は 2 である．)

補足問題 2.3 頂点数 n の閉路が持つ辺の数が n であることを証明せよ．

追加問題 2.4 頂点数 n の完全グラフ K_n が持つ辺の数はいくつか？ ただし，n は自然数であるとする．そうなる理由も答えよ．

追加問題 2.5 頂点数 $m+n$ の完全二部グラフ $K_{m,n}$ が持つ辺の数はいくつか？ ただし，m, n は自然数であるとする．そうなる理由も答えよ．

追加問題 2.6 無向グラフ G と自然数 $k \in \mathbb{N}$ を考える (ただし，$k \geq 3$)．このとき，$\delta(G) \geq k-1$ ならば，G が頂点数 k 以上の閉路を含むことを証明せよ．(ヒント：G における長さ最大の <u>道</u> を考えよ．) (注意：「G が頂点数 k の閉路を含むこと」を証明することは要求していない．)

追加問題 2.7 有向グラフ G を考える．このとき，$\delta^+(G) \geq 1$ ならば，G が有向閉路を含むことを証明せよ．(注：この性質は,「有向グラフのトポロジカル・ソート」と呼ばれる構造が有向閉路を含まない有向グラフに必ず存在することを証明する際に用いられる．)

追加問題 2.8 頂点数 n の無向グラフ G の連結成分の数が k であるとする．このとき，G のある連結成分の頂点数が n/k 以下となることを証明せよ．

追加問題 (発展) 2.9 頂点数が $n \geq 3$ である無向グラフ G を考える．このとき，$\delta(G) \geq n/2$ ならば，G が頂点数 n の閉路を持つことを証明せよ．(注：頂点数 n の閉路のことをハミルトン閉路と呼ぶことが多い．) (ヒント：問題 2.8 を使ってもよい．)