

提出締切：2017年4月17日

復習問題 1.1 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$

が成り立つことを証明せよ。

復習問題 1.2 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して,

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

が成り立つことを証明せよ。(ヒント：問題 1.1 の結果を用いてもよい。)

補足問題 1.3 任意の有向グラフ $G = (V, A)$ に対して, 以下の2つが成り立つことを証明せよ。

1. $\sum_{v \in V} \deg_G^-(v) = |A|$.
2. $\sum_{v \in V} \deg_G^+(v) = |A|$.

追加問題 1.4 任意の有向グラフ $G = (V, A)$ に対して, 以下の2つが成り立つことを証明せよ。(ヒント：問題 1.3 の結果を用いてもよい。)

1. $\delta^-(G) \leq \frac{|A|}{|V|} \leq \Delta^-(G)$.
2. $\delta^+(G) \leq \frac{|A|}{|V|} \leq \Delta^+(G)$.

追加問題 1.5

1. 頂点数5の無向グラフで, どの頂点の次数も3であるものは存在するか? (理由も述べよ。)
2. 頂点数6の無向グラフで, どの頂点の次数も3であるものは存在するか? (理由も述べよ。)

追加問題 1.6

1. 頂点数5の有向グラフで, どの頂点の入次数も異なり, かつ, どの頂点の出次数も異なるようなものを1つ見つけよ。
2. 頂点数が任意の自然数 $n \geq 2$ の場合はどうか?

追加問題 1.7 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して

$$\sum_{\{u,v\} \in E} (\deg_G(u) + \deg_G(v)) = \sum_{v \in V} \deg_G(v)^2$$

という等式が成り立つことを証明せよ。(ヒント：数え上げによる証明を行ってみよ。)

追加問題 1.8 頂点数が2以上である任意の無向グラフ $G = (V, E)$ を考える。

1. G において, 次数0の頂点と次数 $|V| - 1$ の頂点が同時に存在することはないことを証明せよ。
2. G において, ある2つの頂点の次数が同じであることを証明せよ。