離散最適化基礎論　第 13 回
幾何アレンジメント (2)：浅胞複雑性と ε ネット

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2018 年 2 月 2 日

最終更新：2018 年 2 月 2 日　01:31

概要

主題

離散最適化のトピックの１つとして幾何的被覆問題を取り上げ，
その数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

- 「離散最適化」と「計算幾何学」の接点として重要な役割を果たしているから
- 様々なアルゴリズム設計技法・解析技法を紹介できるから
- 応用が多いから

スケジュール 前半

1. 幾何的被覆問題とは？ (10/6)

★ 国内出張のため休み (10/13)

2. 最小包囲円問題 (1)：基本的な性質 (10/20)
3. 最小包囲円問題 (2)：乱択アルゴリズム (10/27)

★ 文化の日のため休み (11/3)

4. クラスタリング (1)：k-センター (11/10)
5. 幾何ハイパーグラフ (1)：VC 次元 (11/17)

★ 調布祭 のため 休み (11/24)

6. 幾何ハイパーグラフ (2)：ε ネット (12/1)

7. 幾何的被覆問題 (1)：線形計画法の利用 (12/8)
8. 幾何的被覆問題 (2)：シフト法 (12/15)
9. 幾何的被覆問題 (3)：局所探索法 (準備) (12/22)
10. 幾何的被覆問題 (4)：局所探索法 (1/5)

★ センター試験準備 のため 休み (1/12)

11. 幾何ハイパーグラフ (3)：ε ネット定理の証明 (1/19)
12. 幾何アレンジメント (1)：浅胞複雑度 (1/26)
13. 幾何アレンジメント (2)：浅胞複雑度と ε ネット (2/2)
14. 休み (2/9)
15. 期末試験 (2/16)

注意：予定の変更もありうる

目次

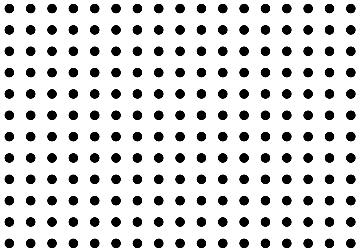
ハイパーグラフ $H = (V, E)$，実数 $\varepsilon \in [0, 1]$

定義：ハイパーグラフに対する ε ネット (ε-net)

H に対する ε ネットとは，次を満たす集合 $N \subseteq V$ のこと

$|e| \geq \varepsilon \cdot |V|$ を満たす任意の $e \in E$ に対して，$N \cap e \neq \emptyset$

$|V| = 204$, $\varepsilon = 1/8$ とすると, $\varepsilon \cdot |V| = 25.5$ $\rightsquigarrow$ 1/8 ネット



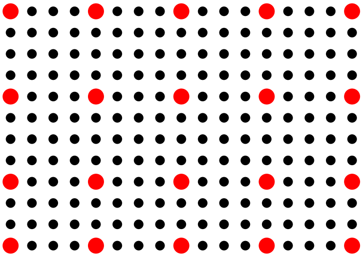
ハイパーグラフ $H = (V, E)$，実数 $\varepsilon \in [0, 1]$

定義：ハイパーグラフに対する ε ネット (ε-net)

H に対する ε ネットとは，次を満たす集合 $N \subseteq V$ のこと

$$|e| \geq \varepsilon \cdot |V| \text{ を満たす任意の } e \in E \text{ に対して，} N \cap e \neq \emptyset$$

$|V| = 204$, $\varepsilon = 1/8$ とすると, $\varepsilon \cdot |V| = 25.5$ $\rightsquigarrow$ 1/8 ネット



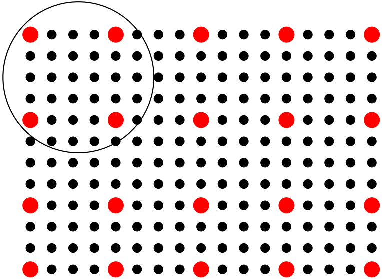
ハイパーグラフ $H = (V, E)$，実数 $\varepsilon \in [0, 1]$

定義：ハイパーグラフに対する ε ネット (ε-net)

H に対する ε ネットとは，次を満たす集合 $N \subseteq V$ のこと

$$|e| \geq \varepsilon \cdot |V| \text{ を満たす任意の } e \in E \text{ に対して，} N \cap e \neq \emptyset$$

$|V| = 204$, $\varepsilon = 1/8$ とすると, $\varepsilon \cdot |V| = 25.5$ $\rightsquigarrow$ 1/8 ネット



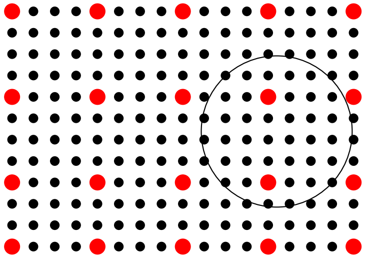
ハイパーグラフ $H=(V,E)$，実数 $\varepsilon \in [0,1]$

定義：ハイパーグラフに対する ε ネット (ε-net)

H に対する ε ネットとは，次を満たす集合 $N \subseteq V$ のこと

$|e| \geq \varepsilon \cdot |V|$ を満たす任意の $e \in E$ に対して，$N \cap e \neq \emptyset$

$|V| = 204$, $\varepsilon = 1/8$ とすると, $\varepsilon \cdot |V| = 25.5$ $\rightsquigarrow$ 1/8 ネット



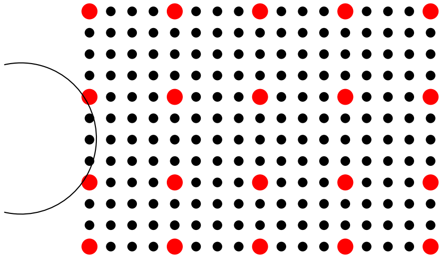
ハイパーグラフ $H = (V, E)$，実数 $\varepsilon \in [0, 1]$

定義：ハイパーグラフに対する ε ネット (ε-net)

H に対する ε ネットとは，次を満たす集合 $N \subseteq V$ のこと

$$|e| \geq \varepsilon \cdot |V| \text{ を満たす任意の } e \in E \text{ に対して，} N \cap e \neq \emptyset$$

$|V| = 204$, $\varepsilon = 1/8$ とすると, $\varepsilon \cdot |V| = 25.5$ $\rightsquigarrow$ 1/8 ネット



ハイパーグラフ $H = (V, E)$, 実数 $\varepsilon \in [0, 1]$

問題

H の ε ネットとして，どれくらい小さいものが作れるか？

- 小さければ小さいほどよい
- 小ささは ε に依存する？

ハイパーグラフ $H = (V, E)$, 実数 $\varepsilon \in (0, 1]$

定理：小さな ε ネットの存在性 — 第 6 回講義で証明済

要素数 $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\log|E|\right)$ の ε ネットが存在する

定理：ε ネット定理 — 第 11 回講義で証明済

要素数 $O\left(\frac{d}{\varepsilon}\log\frac{d}{\varepsilon}\right)$ の ε ネットが存在する　　ただし，$d = \mathrm{vc\text{-}dim}(H)$

$\therefore$ VC 次元が定数 $\Rightarrow$ ε ネットの最小要素数は $|V|$ や $|E|$ に依存しない！

ハイパーグラフ $H=(V,E)$, 実数 $\varepsilon \in (0,1]$

定理：ε ネット定理 (Haussler, Welzl '87)

要素数 $O\left(\frac{d}{\varepsilon}\log\frac{d}{\varepsilon}\right)$ の ε ネットが存在する　　ただし，$d = \mathrm{vc\text{-}dim}(H)$

H が幾何的に得られる場合，要素数を更に小さくできることもある

- 半平面から得られる場合：要素数 $= O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ (Komlós, Pach, Woeginger '92)
- 円から得られる場合：要素数 $= O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ (Matoušek, Seidel, Welzl '90)
- 軸平行長方形から得られる場合：要素数 $= O\left(\frac{1}{\varepsilon}\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ (Aronov, Ezra, Sharir '10)

疑問

要素数が $O\left(\frac{d}{\varepsilon}\log\frac{d}{\varepsilon}\right)$ よりも小さい ε ネットは
どのような場合に存在するのか？

この問題に対して，近年，大きな進展があった

回答の１つ

ハイパーグラフの浅胞複雑性 (shallow-cell complexity) が関係している

ハイパーグラフ $H = (V, E)$，$\text{vc-dim}(H) = d$ は定数

最適 ε ネット定理

要素数 $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\log\varphi_H\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$ の ε ネットが存在する

ただし，$\varphi_H(n)$ は H の浅胞複雑性

最適 ε ネット定理を誰が証明したのか，単一の論文を挙げるのは難しいが，
基本的な考え方は次の論文に基づく

- B. Aronov, E. Ezra, and M. Sharir: Small-size ϵ-nets for axis-parallel rectangles and boxes. SIAM Journal on Computing 39 (2010) 3248–3282.
- K. Varadarajan: Weighted geometric set cover via quasi uniform sampling. In Proc. STOC 2010, pp. 641–648.
- T.M. Chan, E. Grant, J. Könemann, and M. Sharpe: Weighted capacitated, priority, and geometric set cover via improved quasi-uniform sampling. In Proc. SODA 2012, pp. 1576–1585.

「最適 ε ネット定理」としては，次の論文に証明がある

- N.H. Mustafa, K. Dutta, and A. Ghosh: A simple proof of optimal epsilon-nets. Combinatorica, to appear.

ハイパーグラフ $H = (V, E)$

記法

任意の $X \subseteq V$ と任意の正整数 k に対して

$$\begin{aligned} E|_X^{\leq k} &= \{e' \mid e' \in E|_X, |e'| \leq k\} \\ &= \{e \cap X \mid e \in E, |e \cap X| \leq k\} \end{aligned}$$

浅胞複雑性 (shallow-cell complexity) とは？

H の浅胞複雑性とは，関数 $\varphi_H \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ で，次を満たすもの

ある定数 ℓ が存在して，
任意の $X \subseteq V$ と任意の正整数 k に対して

$$\left| E|_X^{\leq k} \right| \leq |X| \cdot \varphi_H(|X|) \cdot k^\ell$$

目標

次のハイパーグラフ $H = (V, E)$ の浅胞複雑性が定数であることの証明

- $V \subseteq \mathbb{R}^2$
- $E = \{V \cap d \mid d \in \mathcal{D}\}$ ただし，$\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$ は閉円板の集合

より具体的な目標

任意の $X \subseteq V$ と任意の正整数 k に対して，次を証明

$$\left| E|_X^{\leq k} \right| = O(k^2|X|)$$

X は固定して，
$k = 1$ の場合，$k = 2$ の場合，$k = 3$ の場合，$k \geq 4$ の場合を分けて考える

目標

次のハイパーグラフ $H = (V, E)$ の浅胞複雑性が定数であることの証明

- $V \subseteq \mathbb{R}^2$
- $E = \{V \cap d \mid d \in \mathcal{D}\}$ ただし，$\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$ は閉円板の集合

より具体的な目標

任意の $X \subseteq V$ と任意の正整数 k に対して，次を証明

$$\left| E|_X^{\leq k} \right| = O(k^2|X|)$$

X は固定して，

$k = 1$ の場合，$k = 2$ の場合，$k = 3$ の場合，$\left| E|_X^{\leq k} \right| = O(|X|)$

設定

ハイパーグラフ $H = (V, E)$, $\mathrm{vc\text{-}dim}(H) = d \geq 2$ は定数

- 任意の $X \subseteq V$ と任意の $k \in \{1, 2, \ldots, d\}$ に対して，$\left| E|_X^{\leq k} \right| = O(|X|)$

H が円板から得られるとき，$d = 3$ (演習問題 5.10.1)

目標

任意の $X \subseteq V$ と任意の正整数 $k \geq d$ に対して，次を証明

$$\left| E|_X^{\leq k} \right| = O(k^{d-1}|X|)$$

以下，X は固定する

目次

有限集合 A，自然数 k

記法：要素数 k の部分集合全体から成る集合族

$$\binom{A}{k} = \{B \mid B \subseteq A, |B| \leq k\}$$

例：$A = \{a, b, c, d\}$ のとき，

$$\begin{aligned}
\binom{A}{1} &= \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\} \\
\binom{A}{2} &= \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\} \\
\binom{A}{3} &= \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}
\end{aligned}$$

ハイパーグラフ $H = (V, E)$, $\text{vc-dim}(H) \leq d$

補題 (Sauer の補題の強化)

$$|E| \leq \left| \bigcup_{e \in E} \left(\binom{e}{0} \cup \binom{e}{1} \cup \binom{e}{2} \cup \cdots \cup \binom{e}{d} \right) \right|$$

実際，次のように，この補題から Sauer の補題が得られる

$$\begin{aligned}
|E| &\leq \left| \bigcup_{e \in E} \left(\binom{e}{0} \cup \binom{e}{1} \cup \binom{e}{2} \cup \cdots \cup \binom{e}{d} \right) \right| \\
&= \left| \bigcup_{e \in E} \bigcup_{j=0}^{d} \binom{e}{j} \right| = \left| \bigcup_{j=0}^{d} \bigcup_{e \in E} \binom{e}{j} \right| \leq \left| \bigcup_{j=0}^{d} \binom{V}{j} \right| = \sum_{j=0}^{d} \binom{|V|}{j}
\end{aligned}$$

補題の証明は Sauer の補題と同じように行なえる (演習問題)

補題

ハイパーグラフ $H = (V, E)$, $\text{vc-dim}(H) \leq d$

補題 (Sauer の補題の強化)

$$|E| \leq \left| \bigcup_{e \in E} \left(\binom{e}{0} \cup \binom{e}{1} \cup \binom{e}{2} \cup \cdots \cup \binom{e}{d} \right) \right|$$

任意の $E' \subseteq E$ に対して，$H' = (V, E')$ とすると，

$$\text{vc-dim}(H') \leq \text{vc-dim}(H) = d$$

補題の系

任意の $E' \subseteq E$ に対して，

$$|E'| \leq \left| \bigcup_{e \in E'} \left(\binom{e}{0} \cup \binom{e}{1} \cup \binom{e}{2} \cup \cdots \cup \binom{e}{d} \right) \right|$$

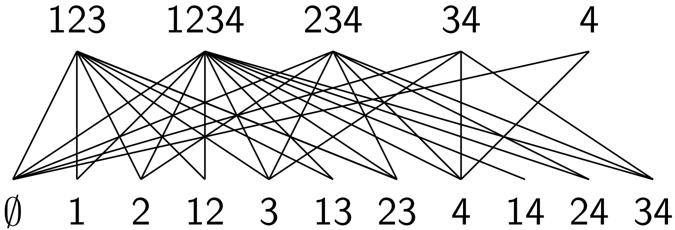
二部グラフを考える

補題の系

任意の $E' \subseteq E$ に対して，

$$|E'| \leq \left| \bigcup_{e \in E'} \left(\binom{e}{0} \cup \binom{e}{1} \cup \binom{e}{2} \cup \cdots \cup \binom{e}{d} \right) \right|$$

$E = \{\{1,2,3\},\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{3,4\},\{4\}\}$, VC 次元 $= 2$

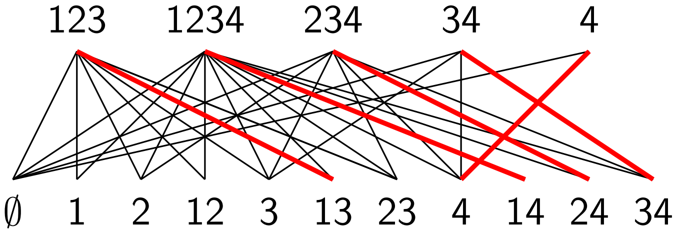


補題の系

任意の $E' \subseteq E$ に対して，

$$|E'| \leq \left| \bigcup_{e \in E'} \left(\binom{e}{0} \cup \binom{e}{1} \cup \binom{e}{2} \cup \cdots \cup \binom{e}{d} \right) \right|$$

$E = \{\{1,2,3\},\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{3,4\},\{4\}\}$, VC 次元 $= 2$

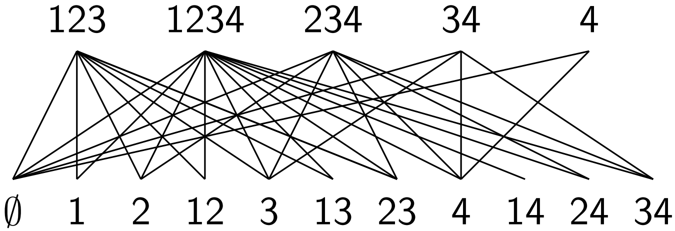


個別代表系

ハイパーグラフ $H = (V, E)$, $\text{vc-dim}(H) \le d$

補題の系の系 (個別代表系)

各 $e \in E$ に対して,
要素数 d 以下の異なる集合 $B(e) \subseteq V$ を割り当てられる

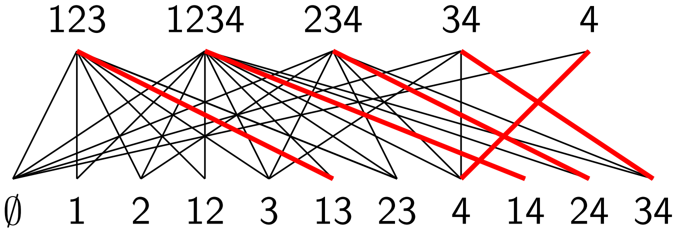


「補題の系」と「二部グラフに対する Hall の結婚定理」を組み合わせると証明できる

ハイパーグラフ $H = (V, E)$, $\text{vc-dim}(H) \leq d$

補題の系の系 (個別代表系)

各 $e \in E$ に対して,
要素数 d 以下の異なる集合 $B(e) \subseteq V$ を割り当てられる



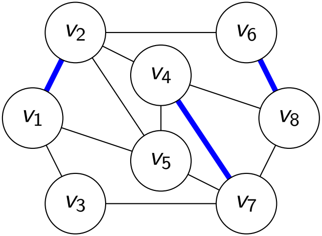
「補題の系」と「二部グラフに対する Hall の結婚定理」を組み合わせると証明できる

グラフにおけるマッチング

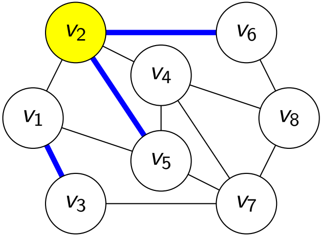
無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングとは？

G の**マッチング**とは辺部分集合 $M \subseteq E$ で，
M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの



$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は
マッチングである



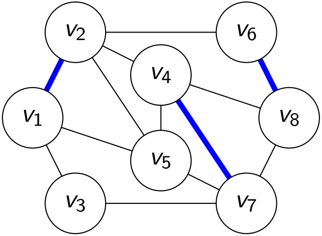
$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は
マッチングではない

マッチングの辺 $e \in M$ は e の端点を**飽和**する

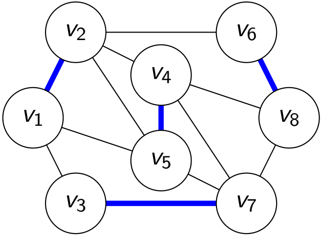
無向グラフ $G = (V, E)$

最大マッチングとは？

G の最大マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意のマッチング M' に対して $|M| \geq |M'|$ を満たすもの



最大マッチングではない



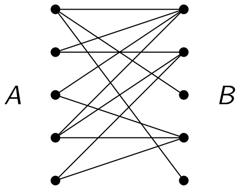
最大マッチングである

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)| \Rightarrow$
A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ

例：

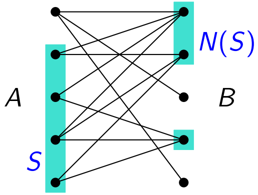


二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)| \Rightarrow$
A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ

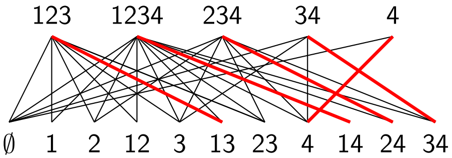
例：



ハイパーグラフ $H = (V, E)$, $\mathrm{vc\text{-}dim}(H) \leq d$

補題の系の系 (個別代表系)

各 $e \in E$ に対して，
要素数 d 以下の異なる集合 $B(e) \subseteq V$ を割り当てられる



補題の系

任意の $E' \subseteq E$ に対して，

$$|E'| \leq \left| \bigcup_{e \in E'} \left(\binom{e}{0} \cup \binom{e}{1} \cup \binom{e}{2} \cup \cdots \cup \binom{e}{d} \right) \right|$$

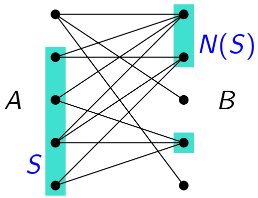
目次

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)| \Rightarrow$
A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ

例：



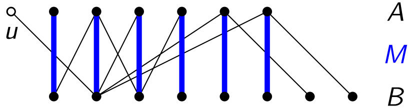
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

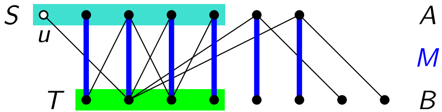
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)| \Rightarrow$
A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ

証明：そのようなマッチングを持たないとする

- M を G の最大マッチングとする
- 仮定より，M が飽和しない A の頂点が存在．それを $u \in A$ とする
- $\cdots$ ← 今からここを埋める
- したがって，そのような S に対して $|S| > |N(S)|$

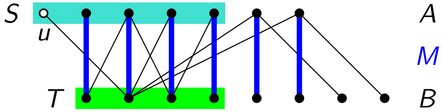


- $S = \{a \in A \mid u$ から始まるある交互道が a で終わる $\}$ とする
- $T = \{b \in B \mid u$ から始まるある交互道が b で終わる $\}$ とする



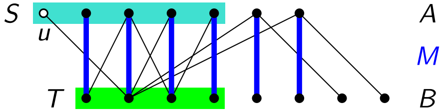
観察 1：$S - \{u\}$ の頂点には M の辺が接続

- S の構成法からすぐに分かる



観察 2：T の頂点には M の辺が接続

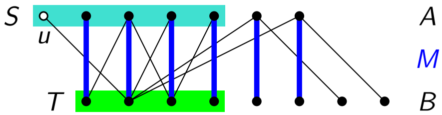
- そうでないとすると増加道が存在し，M の最大性に矛盾



ここまでの結論：$|T| = |S - \{u\}| = |S| - 1 < |S|$

観察 3：$N(S) \subseteq T$

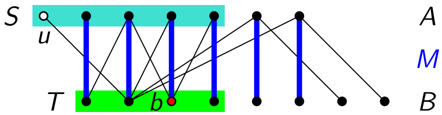
- $b \in N(S)$ とする
- つまり，ある $a \in S$ が存在して $\{a, b\} \in E$
- $\{a, b\} \in M$ ならば，u から b を経由して a に至る交互道が存在
- $\{a, b\} \in E - M$ ならば，u から a を経由して b に至る交互道が存在
- $\therefore$ いずれにしても u から b へ至る交互道が存在
- $\therefore b \in T$



ここまでの結論：$|N(S)| \leq |T| < |S|$

観察 3：$N(S) \subseteq T$

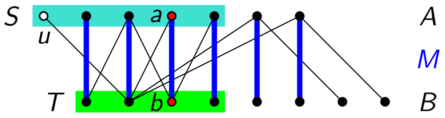
- $b \in N(S)$ とする
- つまり，ある $a \in S$ が存在して $\{a, b\} \in E$
- $\{a, b\} \in M$ ならば，u から b を経由して a に至る交互道が存在
- $\{a, b\} \in E - M$ ならば，u から a を経由して b に至る交互道が存在
- $\therefore$ いずれにしても u から b へ至る交互道が存在
- $\therefore$ $b \in T$



ここまでの結論：$|N(S)| \leq |T| < |S|$

観察 3：$N(S) \subseteq T$

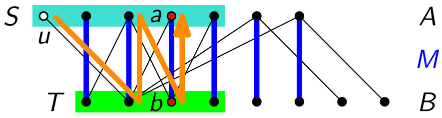
- $b \in N(S)$ とする
- つまり，ある $a \in S$ が存在して $\{a, b\} \in E$
- $\{a, b\} \in M$ ならば，u から b を経由して a に至る交互道が存在
- $\{a, b\} \in E - M$ ならば，u から a を経由して b に至る交互道が存在
- $\therefore$ いずれにしても u から b へ至る交互道が存在
- $\therefore b \in T$



ここまでの結論：$|N(S)| \leq |T| < |S|$

観察 3：$N(S) \subseteq T$

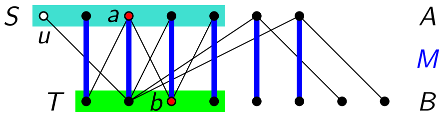
- $b \in N(S)$ とする
- つまり，ある $a \in S$ が存在して $\{a, b\} \in E$
- $\{a, b\} \in M$ ならば，u から b を経由して a に至る交互道が存在
- $\{a, b\} \in E - M$ ならば，u から a を経由して b に至る交互道が存在
- $\therefore$ いずれにしても u から b へ至る交互道が存在
- $\therefore b \in T$



ここまでの結論：$|N(S)| \leq |T| < |S|$

観察 3：$N(S) \subseteq T$

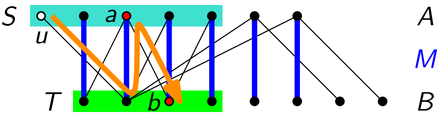
- $b \in N(S)$ とする
- つまり，ある $a \in S$ が存在して $\{a, b\} \in E$
- $\{a, b\} \in M$ ならば，u から b を経由して a に至る交互道が存在
- $\{a, b\} \in E - M$ ならば，u から a を経由して b に至る交互道が存在
- $\therefore$ いずれにしても u から b へ至る交互道が存在
- $\therefore b \in T$



ここまでの結論：$|N(S)| \leq |T| < |S|$

観察 3：$N(S) \subseteq T$

- $b \in N(S)$ とする
- つまり，ある $a \in S$ が存在して $\{a, b\} \in E$
- $\{a, b\} \in M$ ならば，u から b を経由して a に至る交互道が存在
- $\{a, b\} \in E - M$ ならば，u から a を経由して b に至る交互道が存在
- $\therefore$ いずれにしても u から b へ至る交互道が存在
- $\therefore b \in T$



ここまでの結論：$|N(S)| \leq |T| < |S|$

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)| \Rightarrow$
A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ

証明：そのようなマッチングを持たないとする

- M を G の最大マッチングとする
- 仮定より，M が飽和しない A の頂点が存在．それを $u \in A$ とする
- $S = \{a \in A \mid u$ から始まるある交互道が a で終わる $\}$ とする
- $T = \{b \in B \mid u$ から始まるある交互道が b で終わる $\}$ とする
- T の頂点と $S - \{u\}$ の頂点には M の辺が接続 (観察 1 と 2)
- また，$N(S) \subseteq T$ (観察 3)
- したがって，そのような S に対して $|S| > |S| - 1 = |T| \geq |N(S)|$ □

目次

設定

ハイパーグラフ $H = (V, E)$, $\mathrm{vc\text{-}dim}(H) = d \geq 2$ は定数

- 任意の $X \subseteq V$ と任意の $k \in \{1, 2, \ldots, d\}$ に対して，$\left| E|_X^{\leq k} \right| = O(|X|)$

H が円板から得られるとき，$d = 3$ (演習問題 5.10.1)

目標

任意の $X \subseteq V$ と任意の正整数 $k \geq d$ に対して，次を証明

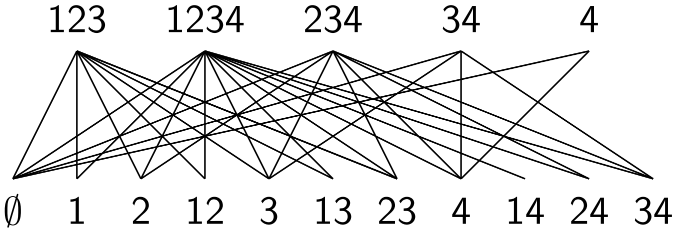
$$\left| E|_X^{\leq k} \right| = O(k^{d-1}|X|)$$

以下，X と $k \geq d$ は固定する

ハイパーグラフ $H = (V, E)$, $\text{vc-dim}(H) \leq d$

補題の系の系 (個別代表系)

各 $e \in E$ に対して，
要素数 d 以下の異なる集合 $B(e) \subseteq V$ を割り当てられる



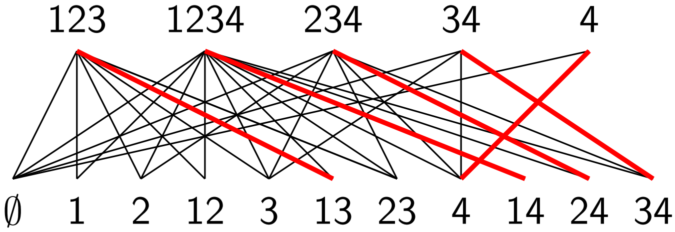
「補題の系」と「二部グラフに対する Hall の結婚定理」を組み合わせると証明できる

個別代表系 (再掲)

ハイパーグラフ $H = (V, E)$, $\text{vc-dim}(H) \leq d$

補題の系の系 (個別代表系)

各 $e \in E$ に対して，
要素数 d 以下の異なる集合 $B(e) \subseteq V$ を割り当てられる



「補題の系」と「二部グラフに対する Hall の結婚定理」を組み合わせると証明できる

核となるアイディア

X の各要素を確率 $1/k$ で独立に選ぶ

- 選ばれた要素の集合を $\tilde{X}$ とする
- 各 $e \in E|_X^{\leq k}$ に対して，次の条件を満たす e をよい辺と呼ぶ
  - $B(e)$ の要素がすべて選ばれる
  - それ以外の要素がどれも選ばれない

考えるもの

- E[よい辺の総数]

証明の完結 (2)

- 任意の辺 $e \in E|_X^{\leq k}$ に対して

$$\begin{aligned}\Pr(e \text{ がよい辺}) &= \left(\frac{1}{k}\right)^{|B(e)|}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{|e-B(e)|} \\ &\geq \left(\frac{1}{k}\right)^{|B(e)|}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-|B(e)|} \\ &\geq \left(\frac{1}{k}\right)^{d}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-d}\end{aligned}$$

- したがって，$B(e)$ は e によって異なるので，

$$\mathrm{E}[\text{よい辺の総数}] = \sum_{e \in E|_X^{\leq k}} \Pr(e \text{ がよい辺}) \geq \left|E_X^{\leq k}\right| \left(\frac{1}{k}\right)^{d}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-d}$$

選ばれた要素の集合 $\tilde{X} \subseteq X$ に対して

- e がよい辺 $\Leftrightarrow |e \cap \tilde{X}| = |B(e)| \leq d$
- $\therefore$ よい辺の総数 $\leq \left| E|_{\tilde{X}}^{\leq d} \right| = O(|\tilde{X}|)$

したがって

- $\mathrm{E}[$よい辺の総数$] = \mathrm{E}[O(|\tilde{X}|)] = \dfrac{1}{k} O(|X|)$

総合すると，

$$
\begin{aligned}
\left|E_X^{\le k}\right| \left(\frac{1}{k}\right)^d \left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-d} &\le \frac{1}{k} O(|X|) \\
\therefore \quad \left|E_X^{\le k}\right| &\le k^{d-1} \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-d} O(|X|) \\
&= k^{d-1} (1+\frac{1}{k-1})^{k-d} O(|X|) \\
&\le k^{d-1}\, \mathrm{e}^{(k-d)/(k-1)}\, O(|X|) \\
&= O(k^{d-1}|X|)
\end{aligned}
$$

これで証明終了

残った時間の使い方

- 授業評価アンケート
- 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次