離散最適化基礎論　第 12 回
幾何アレンジメント (1)：浅胞複雑性

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2018 年 1 月 26 日

最終更新：2018 年 2 月 2 日　08:05

概要

主題

離散最適化のトピックの１つとして幾何的被覆問題を取り上げ，その数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

- 「離散最適化」と「計算幾何学」の接点として重要な役割を果たしているから
- 様々なアルゴリズム設計技法・解析技法を紹介できるから
- 応用が多いから

1. 幾何的被覆問題とは？ (10/6)
- ⋆ 国内出張のため休み (10/13)
2. 最小包囲円問題 (1)：基本的な性質 (10/20)
3. 最小包囲円問題 (2)：乱択アルゴリズム (10/27)
- ⋆ 文化の日のため休み (11/3)
4. クラスタリング (1)：k-センター (11/10)
5. 幾何ハイパーグラフ (1)：VC 次元 (11/17)
- ⋆ 調布祭 のため 休み (11/24)
6. 幾何ハイパーグラフ (2)：ε ネット (12/1)

スケジュール 後半 (予定)

7 幾何的被覆問題 (1)：線形計画法の利用 (12/8)
8 幾何的被覆問題 (2)：シフト法 (12/15)
9 幾何的被覆問題 (3)：局所探索法 (準備) (12/22)
10 幾何的被覆問題 (4)：局所探索法 (1/5)
⋆ センター試験準備 のため 休み (1/12)
11 幾何ハイパーグラフ (3)：ε ネット定理の証明 (1/19)
12 幾何アレンジメント (1)：浅胞複雑度 (1/26)
13 幾何アレンジメント (2)：浅胞複雑度と ε ネット (2/2)
14 休み (2/9)
15 期末試験 (2/16)

注意：予定の変更もありうる

目次

ハイパーグラフに対する ε ネット

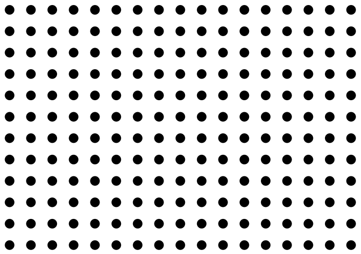
ハイパーグラフ $H = (V, E)$，実数 $\varepsilon \in [0, 1]$

定義：ハイパーグラフに対する ε ネット (ε-net)

H に対する ε ネットとは，次を満たす集合 $N \subseteq V$ のこと

$$|e| \geq \varepsilon \cdot |V| \text{ を満たす任意の } e \in E \text{ に対して，} N \cap e \neq \emptyset$$

$|V| = 204$, $\varepsilon = 1/8$ とすると, $\varepsilon \cdot |V| = 25.5$ $\rightsquigarrow$ 1/8 ネット



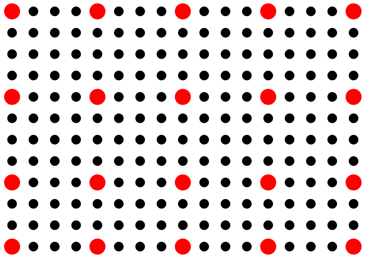
ハイパーグラフ $H = (V, E)$，実数 $\varepsilon \in [0, 1]$

定義：ハイパーグラフに対する ε ネット (ε-net)

H に対する ε ネットとは，次を満たす集合 $N \subseteq V$ のこと

$|e| \geq \varepsilon \cdot |V|$ を満たす任意の $e \in E$ に対して，$N \cap e \neq \emptyset$

$|V| = 204$, $\varepsilon = 1/8$ とすると, $\varepsilon \cdot |V| = 25.5$ $\rightsquigarrow$ 1/8 ネット



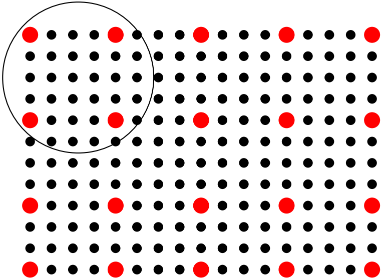
ハイパーグラフ $H = (V, E)$，実数 $\varepsilon \in [0, 1]$

定義：ハイパーグラフに対する ε ネット (ε-net)

H に対する ε ネットとは，次を満たす集合 $N \subseteq V$ のこと

$$|e| \geq \varepsilon \cdot |V| \text{ を満たす任意の } e \in E \text{ に対して，} N \cap e \neq \emptyset$$

$|V| = 204$, $\varepsilon = 1/8$ とすると, $\varepsilon \cdot |V| = 25.5$ $\rightsquigarrow$ 1/8 ネット



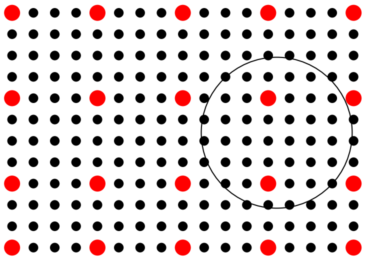
ハイパーグラフ $H = (V, E)$，実数 $\varepsilon \in [0, 1]$

定義：ハイパーグラフに対する ε ネット (ε-net)

H に対する ε ネットとは，次を満たす集合 $N \subseteq V$ のこと

$|e| \geq \varepsilon \cdot |V|$ を満たす任意の $e \in E$ に対して，$N \cap e \neq \emptyset$

$|V| = 204$, $\varepsilon = 1/8$ とすると, $\varepsilon \cdot |V| = 25.5$ $\rightsquigarrow$ 1/8 ネット



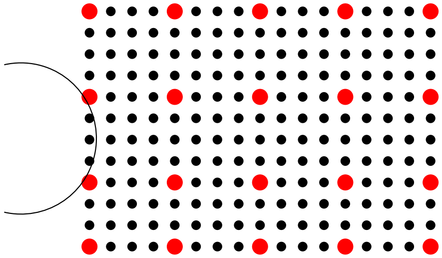
ハイパーグラフ $H = (V, E)$，実数 $\varepsilon \in [0, 1]$

定義：ハイパーグラフに対する ε ネット (ε-net)

H に対する ε ネットとは，次を満たす集合 $N \subseteq V$ のこと

$|e| \geq \varepsilon \cdot |V|$ を満たす任意の $e \in E$ に対して，$N \cap e \neq \emptyset$

$|V| = 204$, $\varepsilon = 1/8$ とすると, $\varepsilon \cdot |V| = 25.5$ $\rightsquigarrow$ 1/8 ネット



ハイパーグラフ $H = (V, E)$, 実数 $\varepsilon \in [0, 1]$

問題

H の ε ネットとして，どれくらい小さいものが作れるか？

- 小さければ小さいほどよい
- 小ささは ε に依存する？

ハイパーグラフ $H = (V, E)$, 実数 $\varepsilon \in (0, 1]$

定理：小さな ε ネットの存在性 — 第 6 回講義で証明済

要素数 $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\log|E|\right)$ の ε ネットが存在する

定理：ε ネット定理 — 第 11 回講義で証明済

要素数 $O\left(\frac{d}{\varepsilon}\log\frac{d}{\varepsilon}\right)$ の ε ネットが存在する　ただし，$d = \mathrm{vc\text{-}dim}(H)$

$\therefore$ VC 次元が定数 $\Rightarrow$ ε ネットの最小要素数は $|V|$ や $|E|$ に依存しない！

ハイパーグラフ $H = (V, E)$, 実数 $\varepsilon \in (0, 1]$

定理：ε ネット定理 (Haussler, Welzl '87)

要素数 $O\left(\frac{d}{\varepsilon} \log \frac{d}{\varepsilon}\right)$ の ε ネットが存在する　　ただし，$d = \mathrm{vc\text{-}dim}(H)$

H が幾何的に得られる場合，要素数を更に小さくできることもある

- 半平面から得られる場合：　要素数 $= O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ (Komlós, Pach, Woeginger '92)
- 円から得られる場合：　要素数 $= O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ (Matoušek, Seidel, Welzl '90)
- 軸平行長方形から得られる場合：要素数 $= O\left(\frac{1}{\varepsilon} \log\log \frac{1}{\varepsilon}\right)$ (Aronov, Ezra, Sharir '10)

疑問

要素数が $O\left(\frac{d}{\varepsilon}\log\frac{d}{\varepsilon}\right)$ よりも小さい ε ネットは
どのような場合に存在するのか？

この問題に対して，近年，大きな進展があった

回答の 1 つ

ハイパーグラフの**浅胞複雑性** (shallow-cell complexity) が関係している

ハイパーグラフ $H = (V, E)$，$\text{vc-dim}(H) = d$ は定数

最適 ε ネット定理

要素数 $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\log \varphi_H\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$ の ε ネットが存在する

ただし，$\varphi_H(n)$ は H の浅胞複雑性

最適 ε ネット定理を誰が証明したのか，単一の論文を挙げるのは難しいが，
基本的な考え方は次の論文に基づく

- B. Aronov, E. Ezra, and M. Sharir: Small-size ϵ-nets for axis-parallel rectangles and boxes. SIAM Journal on Computing 39 (2010) 3248–3282.
- K. Varadarajan: Weighted geometric set cover via quasi uniform sampling. In Proc. STOC 2010, pp. 641–648.
- T.M. Chan, E. Grant, J. Könemann, and M. Sharpe: Weighted capacitated, priority, and geometric set cover via improved quasi-uniform sampling. In Proc. SODA 2012, pp. 1576–1585.

「最適 ε ネット定理」としては，次の論文に証明がある

- N.H. Mustafa, K. Dutta, and A. Ghosh: A simple proof of optimal epsilon-nets. Combinatorica, to appear.

目次

ハイパーグラフ $H = (V, E)$

記法

任意の $X \subseteq V$ と任意の正整数 k に対して

$$\begin{aligned} E|_X^{\leq k} &= \{e' \mid e' \in E|_X, |e'| \leq k\} \\ &= \{e \cap X \mid e \in E, |e \cap X| \leq k\} \end{aligned}$$

浅胞複雑性 (shallow-cell complexity) とは？

H の浅胞複雑性とは，関数 $\varphi_H \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ で，次を満たすもの

ある定数 ℓ が存在して，
任意の $X \subseteq V$ と任意の正整数 k に対して

$$\left| E|_X^{\leq k} \right| \leq |X| \cdot \varphi_H(|X|) \cdot k^\ell$$

ハイパーグラフ $H = (V, E)$

命題：浅胞複雑性と VC 次元

浅胞複雑性 $\varphi_H(n)$ が n に関する多項式
$\Rightarrow \text{vc-dim}(H)$ は定数

証明：ある定数 c, t に対して $\varphi_H(n) \leq c \cdot n^t$ であると仮定

- $X \subseteq V$ が H によって粉砕される最大の部分集合であるとする
- このとき，$|X| = \text{vc-dim}(H)$ であり，$E|_X = 2^X$
- したがって，

$$2^{|X|} = \left|2^X\right| \leq |E|_X| \leq |X|\varphi(|X|)|X|^\ell = c \cdot |X|^{1+t+\ell}$$

- $\therefore |X| \leq (1 + t + \ell) \log_2 |X| + \log_2 c$
- $\therefore |X| = \text{vc-dim}(H)$ は定数 (t, ℓ, c のみにしか依存しない) □

1. 浅胞複雑性 $\varphi_H(n) = c \cdot n^t$ のとき，$\mathrm{vc\text{-}dim}(H) = d$ は定数であり，

$$\begin{aligned} \varepsilon \text{ ネット定理が与える } \varepsilon \text{ ネットの要素数} &= O\left(\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \\ \text{最適 } \varepsilon \text{ ネット定理が与える } \varepsilon \text{ ネットの要素数} &= O\left(\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

2. $\mathrm{vc\text{-}dim}(H)$ が定数であっても，浅胞複雑性が定数であるならば，

$$\begin{aligned} \varepsilon \text{ ネット定理が与える } \varepsilon \text{ ネットの要素数} &= O\left(\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \\ \text{最適 } \varepsilon \text{ ネット定理が与える } \varepsilon \text{ ネットの要素数} &= O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

$\therefore$ 浅胞複雑性を深く調べると，小さい ε ネットが得られるかもしれない

目次

目標

次のハイパーグラフ $H = (V, E)$ の浅胞複雑性が定数であることの証明

- $V \subseteq \mathbb{R}^2$
- $E = \{V \cap d \mid d \in \mathcal{D}\}$ ただし，$\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$ は閉円板の集合

より具体的な目標

任意の $X \subseteq V$ と任意の正整数 k に対して，次を証明

$$\left| E|_X^{\leq k} \right| = O(k^2|X|)$$

X は固定して，
$k = 1$ の場合，$k = 2$ の場合，$k = 3$ の場合，$k \geq 4$ の場合を分けて考える

$k = 1$ のとき，

$$E|_X^{\leq 1} = \{X \cap d \mid d \in \mathcal{D}, |X \cap d| \leq 1\} \subseteq \{\emptyset\} \cup \{\{x\} \mid x \in X\}$$

したがって，

$$\left| E|_X^{\leq 1} \right| \leq 1 + |X| = O(|X|)$$

$k = 2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
E|_X^{\le 2} &= \{X \cap d \mid d \in \mathcal{D}, |X \cap d| \le 2\} \\
&= \{X \cap d \mid d \in \mathcal{D}, |X \cap d| \le 1\} \cup \{X \cap d \mid d \in \mathcal{D}, |X \cap d| = 2\} \\
\left| E|_X^{\le 2} \right| &\le O(|X|) + \\
&\quad X \text{ を頂点集合とする Delaunay グラフの辺数} \quad \text{(第 10 回講義)} \\
&\le O(|X|) + 3|X| \qquad \text{(第 9 回，第 10 回講義)} \\
&= O(|X|)
\end{aligned}
$$

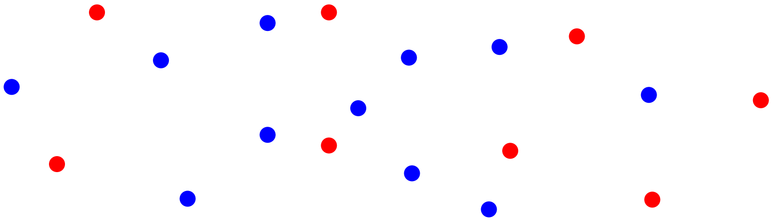
第 10 回講義からの復習：Delaunay グラフ

Delaunay グラフとは？

平面上の点集合 $R \cup B$ に対する Delaunay グラフとは，
$R \cup B$ を頂点集合として，

$$p, q \in R \cup B \text{ が辺で結ばれる} \Leftrightarrow p, q \text{ のみを含む円が存在する}$$

として作られるグラフのこと

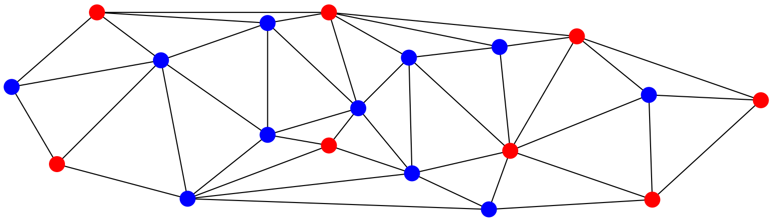


Delaunay グラフとは？

平面上の点集合 $R \cup B$ に対する Delaunay グラフとは，
$R \cup B$ を頂点集合として，

$$p, q \in R \cup B \text{ が辺で結ばれる} \Leftrightarrow p, q \text{ のみを含む円が存在する}$$

として作られるグラフのこと

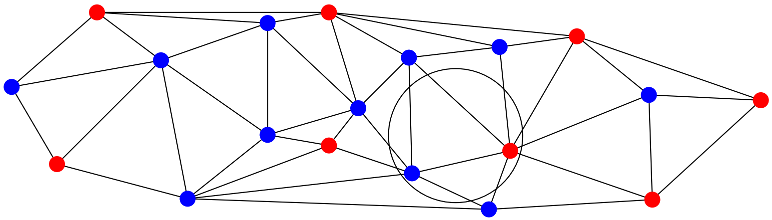


Delaunay グラフとは？

平面上の点集合 $R \cup B$ に対する Delaunay グラフとは，
$R \cup B$ を頂点集合として，

$$p, q \in R \cup B \text{ が辺で結ばれる} \Leftrightarrow p, q \text{ のみを含む円が存在する}$$

として作られるグラフのこと

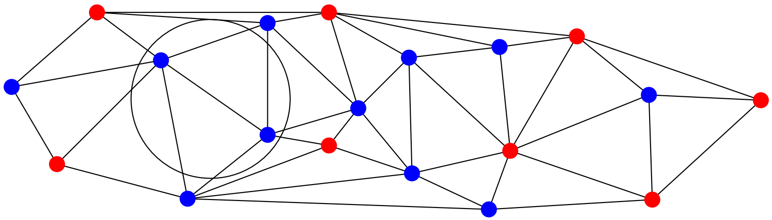


Delaunay グラフとは？

平面上の点集合 $R \cup B$ に対する Delaunay グラフとは，
$R \cup B$ を頂点集合として，

$$p, q \in R \cup B \text{ が辺で結ばれる} \Leftrightarrow p, q \text{ のみを含む円が存在する}$$

として作られるグラフのこと

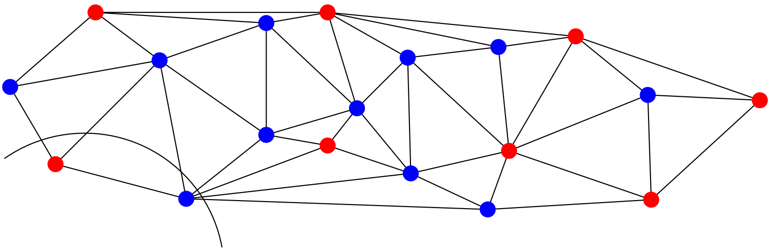


Delaunay グラフとは？

平面上の点集合 $R \cup B$ に対する Delaunay グラフとは，
$R \cup B$ を頂点集合として，

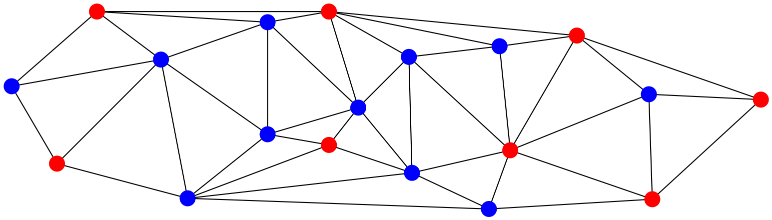
$$p, q \in R \cup B \text{ が辺で結ばれる} \Leftrightarrow p, q \text{ のみを含む円が存在する}$$

として作られるグラフのこと



Delaunay グラフの性質 (1)

Delaunay グラフは平面グラフ (辺の交差が存在しない)



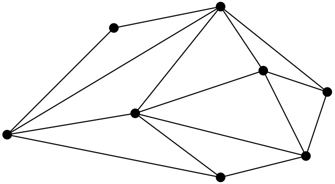
<u>証明</u>：辺の交差があるとして矛盾を導く (背理法)

平面的グラフ $G = (V, E)$

平面的グラフの性質 (1)

$|V| \geq 3$ のとき，

$$|E| \leq 3|V| - 6$$



- $|V| = 8$
- $|E| = 15$
- $3|V| - 6 = 3 \cdot 8 - 6 = 18$

$k = 3$ のとき，

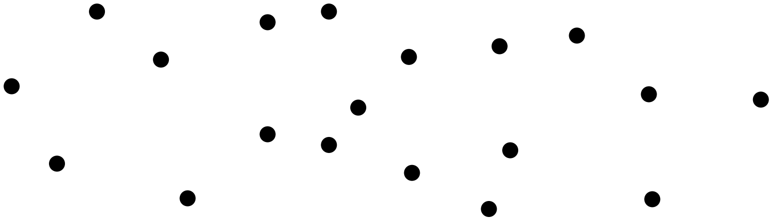
$$
\begin{aligned}
E|_X^{\leq 3} &= \{X \cap d \mid d \in \mathcal{D}, |X \cap d| \leq 3\} \\
&= \{X \cap d \mid d \in \mathcal{D}, |X \cap d| \leq 2\} \cup \{X \cap d \mid d \in \mathcal{D}, |X \cap d| = 3\} \\
\left| E|_X^{\leq 3} \right| &= O(|X|) + |\{X \cap d \mid d \in \mathcal{D}, |X \cap d| = 3\}|
\end{aligned}
$$

この最後の項が $O(|X|)$ であることを証明すればよい

$k = 3$ のとき (2)

$E|_X^{=3} = \{X \cap d \mid d \in \mathcal{D}, |X \cap d| = 3\}$ とする

- 各 $Y \in E|_X^{=3}$ に対して，$Y = X \cap d$ を満たす円板 d を 1 つ固定して，$d(Y)$ と書くことにする
- 各 $Y = \{a, b, c\} \in E|_X^{=3}$ に対して，ab, bc, ac を線分で結びグラフ G を作る (このとき，$d(Y)$ はこれらの辺を生む)

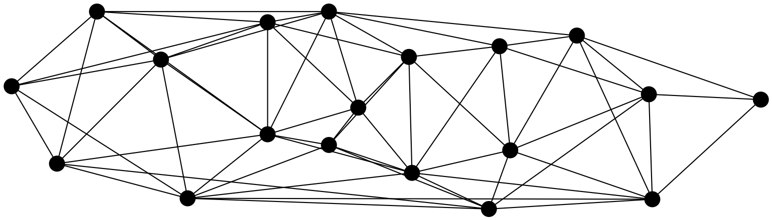


- このとき，$\left|E|_X^{=3}\right| \leq$ このグラフ G における三角形の総数

$k = 3$ のとき (2)

$E|_X^{=3} = \{X \cap d \mid d \in \mathcal{D}, |X \cap d| = 3\}$ とする

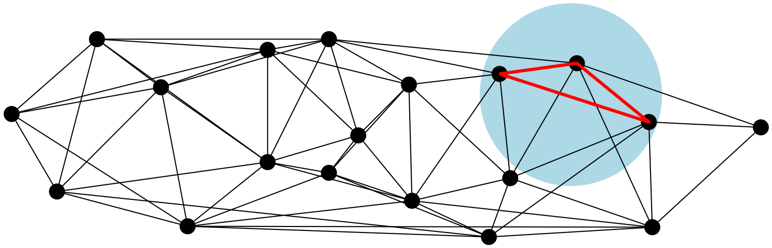
- 各 $Y \in E|_X^{=3}$ に対して，$Y = X \cap d$ を満たす円板 d を 1 つ固定して，$d(Y)$ と書くことにする
- 各 $Y = \{a, b, c\} \in E|_X^{=3}$ に対して，ab, bc, ac を線分で結びグラフ G を作る (このとき，$d(Y)$ はこれらの辺を<u>生む</u>)



- このとき，$\left|E|_X^{=3}\right| \leq$ このグラフ G における三角形の総数

$E|_X^{=3} = \{X \cap d \mid d \in \mathcal{D}, |X \cap d| = 3\}$ とする

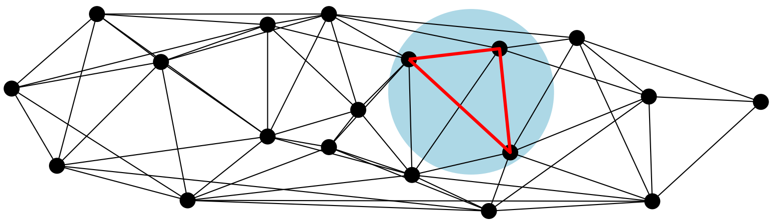
- 各 $Y \in E|_X^{=3}$ に対して，$Y = X \cap d$ を満たす円板 d を 1 つ固定して，$d(Y)$ と書くことにする
- 各 $Y = \{a, b, c\} \in E|_X^{=3}$ に対して，ab, bc, ac を線分で結びグラフ G を作る (このとき，$d(Y)$ はこれらの辺を<u>生む</u>)



- このとき，$\left|E|_X^{=3}\right| \leq$ このグラフ G における三角形の総数

$E|_X^{=3} = \{X \cap d \mid d \in \mathcal{D}, |X \cap d| = 3\}$ とする

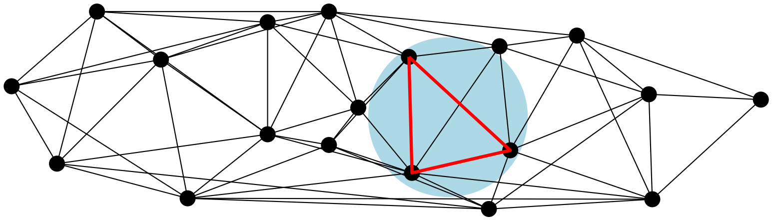
- 各 $Y \in E|_X^{=3}$ に対して，$Y = X \cap d$ を満たす円板 d を 1 つ固定して，$d(Y)$ と書くことにする
- 各 $Y = \{a, b, c\} \in E|_X^{=3}$ に対して，ab, bc, ac を線分で結びグラフ G を作る (このとき，$d(Y)$ はこれらの辺を生む)



- このとき，$\left|E|_X^{=3}\right| \leq$ このグラフ G における三角形の総数

$E|_X^{=3} = \{X \cap d \mid d \in \mathcal{D}, |X \cap d| = 3\}$ とする

- 各 $Y \in E|_X^{=3}$ に対して，$Y = X \cap d$ を満たす円板 d を 1 つ固定して，$d(Y)$ と書くことにする
- 各 $Y = \{a, b, c\} \in E|_X^{=3}$ に対して，ab, bc, ac を線分で結びグラフ G を作る (このとき，$d(Y)$ はこれらの辺を生む)



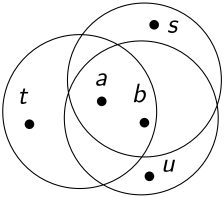
- このとき，$\left|E|_X^{=3}\right| \leq$ このグラフ G における三角形の総数

観察 1

G において辺 ab と cd が交差する $\Rightarrow$
ab を生む円板の数 ≤ 2 または cd を生む円板の数 ≤ 2

証明 (背理法)：ab を生む円板の数 ≥ 3 であると仮定

- つまり，異なる $s, t, u \in X$ が存在して，
  $a, b \in d(\{a, b, s\}), d(\{a, b, t\}), d(\{a, b, u\})$



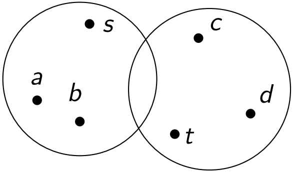
- s, t, u の中の 1 つは c, d と異なるので，それを s とすると，
  $a, b \in d(\{a, b, s\})$ かつ $c, d \notin d(\{a, b, s\})$

観察 1

G において辺 ab と cd が交差する $\Rightarrow$
ab を生む円板の数 ≤ 2 または cd を生む円板の数 ≤ 2

証明 (背理法)：同様に，cd を生む円板の数 ≥ 3 であると仮定すると

- ある $t \in X$ が存在して，
  $c, d \in d(\{c, d, t\})$ かつ $a, b \notin d(\{c, d, t\})$



- このとき，ab と cd は交差しない

□

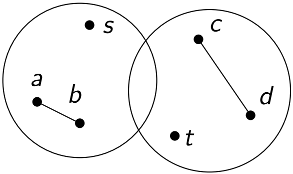
$k = 3$ のとき (4)

観察 1

G において辺 ab と cd が交差する $\Rightarrow$
ab を生む円板の数 ≤ 2 または cd を生む円板の数 ≤ 2

証明 (背理法)：同様に，cd を生む円板の数 ≥ 3 であると仮定すると

- ある $t \in X$ が存在して，
  $c, d \in d(\{c, d, t\})$ かつ $a, b \notin d(\{c, d, t\})$



- このとき，ab と cd は交差しない □

G の辺の中で，それを生む円板の数が 3 以上のもの全体を考える

- それらは交差しない　　($\because$ 観察 1)
- $\therefore$ そのような辺の総数 $\leq O(|X|)$

あとは，G の辺の中で，それを生む円板の数が 2 以下のもの全体を考える

- そのような辺全体の集合を E' とする

観察 2

任意の $Y \subseteq X$ を考え，
両端点が Y の要素である E' の辺全体を $E(Y)$ とすると

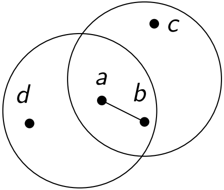
$$|E(Y)| = O(|Y|)$$

証明：任意の $Y \subseteq X$ を考える

- Y の各点を確率 q で独立に選ぶ　　$(0 < q < 1)$
- 選ばれた点の集合を $\tilde{Y}$ とする

証明 (続き)：$\tilde{Y}$ の点を結ぶ $E(Y)$ の辺 ab を考える

- 仮定から，ab を生む円板は 2 以下
- その 2 つを $d(\{a, b, c\})$ と $d(\{a, b, d\})$ とする
- c, d が $\tilde{Y}$ に選ばれないとき，ab をよい辺と呼ぶことにする



ここで，よい 2 つの辺は交差しない (なぜ？)

証明 (続き 2)：$\tilde{Y}$ の点を結ぶ $E(Y)$ の辺 ab を考える

- $\Pr(ab$ がよい辺$) \geq q^2(1-q)^2$
- $\therefore$ E[よい辺の総数] $\geq q^2(1-q)^2|E(Y)|$
- 一方で，よい辺同士は交差しないので，よい辺の総数 $\leq 3 \cdot |\tilde{Y}|$
- $\therefore$ E[よい辺の総数] $\leq 3\mathrm{E}[|\tilde{Y}|] = 3q|Y|$

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
q^2(1-q)^2|E(Y)| &\leq 3q|Y| \\
\therefore \quad |E(Y)| &\leq \frac{3q}{q^2(1-q)^2}|Y|
\end{aligned}
$$

例えば，$q = 1/3$ とすれば，$|E(Y)| = O(|Y|)$ となる $\square$

注

この証明は Clarkson–Shor の技法と呼ばれる証明法の典型例

ここまでのまとめ

ここまでで分かったこと

- 作ったグラフ G の辺の総数 $= O(|X|)$
- 両端点が Y の要素である E の辺の総数 $= O(|Y|)$

(平面性と観察 2)

今から示すべきこと

- 作ったグラフ G の三角形の総数 $= O(|X|)$
- 3 頂点が Y の要素である三角形の総数 $= O(|Y|)$

つまり，次を証明すれば，$k = 3$ の場合の証明が終了する

観察 3

任意の $Y \subseteq X$ を考え，
3 頂点が Y の要素である G の三角形の総数は $O(|Y|)$

観察 3

任意の $Y \subseteq X$ を考え，
3 頂点が Y の要素である G の三角形の総数は $O(|Y|)$

証明：Y の点 v を任意に考える

- Y における v の隣接頂点全体を $N(v)$ と書くと，$N(v)$ の頂点間にある辺の総数は $O(|N(v)|)$
- $\therefore$ v を含む Y 内の三角形の総数 $= O(|N(v)|)$
- $\therefore$ Y 内の三角形の総数 $= \sum_{v \in Y} O(|N(v)|) =$ Y 内の辺の総数 $\times 2$
  $= O(|Y|)$ □

これで，$\left| E|_X^{\leq 3} \right| = O(|X|)$ であることの証明が終わった

次回

- 方針 1：各円板から，その代表となる点集合を選ぶ
- 方針 2：Clarkson–Shor の手法を適用する

目次

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次