離散最適化基礎論　第 11 回
幾何ハイパーグラフ (3)：ε ネット定理の証明

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2018 年 1 月 19 日

最終更新：2018 年 1 月 20 日　14:57

主題

離散最適化のトピックの１つとして幾何的被覆問題を取り上げ，
その数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

- 「離散最適化」と「計算幾何学」の接点として重要な役割を果たしているから
- 様々なアルゴリズム設計技法・解析技法を紹介できるから
- 応用が多いから

1. 幾何的被覆問題とは？ (10/6)
- ⋆ 国内出張のため休み (10/13)
2. 最小包囲円問題 (1)：基本的な性質 (10/20)
3. 最小包囲円問題 (2)：乱択アルゴリズム (10/27)
- ⋆ 文化の日のため休み (11/3)
4. クラスタリング (1)：k-センター (11/10)
5. 幾何ハイパーグラフ (1)：VC 次元 (11/17)
- ⋆ 調布祭 のため 休み (11/24)
6. 幾何ハイパーグラフ (2)：ε ネット (12/1)

スケジュール 後半 (予定)

7 幾何的被覆問題 (1)：線形計画法の利用 (12/8)
8 幾何的被覆問題 (2)：シフト法 (12/15)
9 幾何的被覆問題 (3)：局所探索法 (準備) (12/22)
10 幾何的被覆問題 (4)：局所探索法 (1/5)
⋆ センター試験準備 のため 休み (1/12)
11 幾何ハイパーグラフ (3)：ε ネット定理の証明 (1/19)
12 幾何アレンジメント (1)：合併複雑度と ε ネット (1/26)
13 幾何アレンジメント (2)：合併複雑度の例 (2/2)
14 最近のトピック (2/9)
15 期末試験 (2/16？)

注意：予定の変更もありうる

目次

ハイパーグラフに対する ε ネット

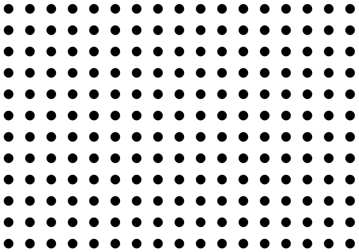
ハイパーグラフ $H = (V, E)$，実数 $\varepsilon \in [0, 1]$

定義：ハイパーグラフに対する ε ネット (ε-net)

H に対する ε ネットとは，次を満たす集合 $N \subseteq V$ のこと

$$|e| \geq \varepsilon \cdot |V| \text{ を満たす任意の } e \in E \text{ に対して，} N \cap e \neq \emptyset$$

$|V| = 204$, $\varepsilon = 1/8$ とすると, $\varepsilon \cdot |V| = 25.5$ $\rightsquigarrow$ 1/8 ネット



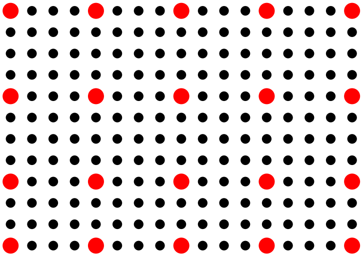
ハイパーグラフ $H = (V, E)$，実数 $\varepsilon \in [0, 1]$

定義：ハイパーグラフに対する ε ネット (ε-net)

H に対する ε ネットとは，次を満たす集合 $N \subseteq V$ のこと

$$|e| \geq \varepsilon \cdot |V| \text{ を満たす任意の } e \in E \text{ に対して，} N \cap e \neq \emptyset$$

$|V| = 204$, $\varepsilon = 1/8$ とすると, $\varepsilon \cdot |V| = 25.5$ $\rightsquigarrow$ 1/8 ネット



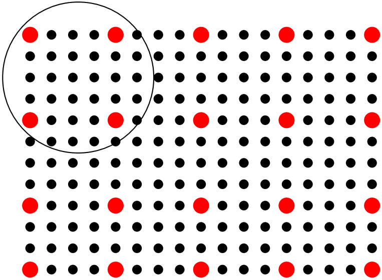
ハイパーグラフ $H = (V, E)$，実数 $\varepsilon \in [0, 1]$

定義：ハイパーグラフに対する ε ネット (ε-net)

H に対する ε ネットとは，次を満たす集合 $N \subseteq V$ のこと

$|e| \geq \varepsilon \cdot |V|$ を満たす任意の $e \in E$ に対して，$N \cap e \neq \emptyset$

$|V| = 204$, $\varepsilon = 1/8$ とすると, $\varepsilon \cdot |V| = 25.5$ $\rightsquigarrow$ 1/8 ネット



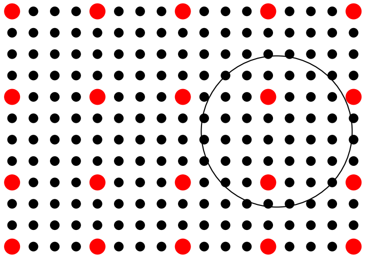
ハイパーグラフ $H = (V, E)$，実数 $\varepsilon \in [0, 1]$

定義：ハイパーグラフに対する ε ネット (ε-net)

H に対する ε ネットとは，次を満たす集合 $N \subseteq V$ のこと

$$|e| \geq \varepsilon \cdot |V| \text{ を満たす任意の } e \in E \text{ に対して，} N \cap e \neq \emptyset$$

$|V| = 204$, $\varepsilon = 1/8$ とすると, $\varepsilon \cdot |V| = 25.5$ $\rightsquigarrow$ 1/8 ネット



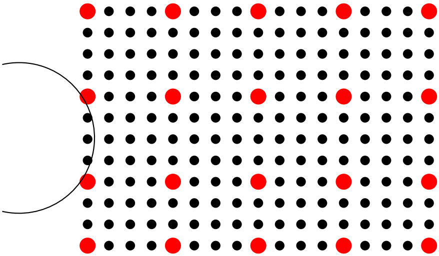
ハイパーグラフ $H = (V, E)$，実数 $\varepsilon \in [0, 1]$

定義：ハイパーグラフに対する ε ネット (ε-net)

H に対する ε ネットとは，次を満たす集合 $N \subseteq V$ のこと

$$|e| \geq \varepsilon \cdot |V| \text{ を満たす任意の } e \in E \text{ に対して，} N \cap e \neq \emptyset$$

$|V| = 204$, $\varepsilon = 1/8$ とすると, $\varepsilon \cdot |V| = 25.5$ $\rightsquigarrow$ 1/8 ネット



ハイパーグラフ $H = (V, E)$, 実数 $\varepsilon \in [0, 1]$

問題

H の ε ネットとして，どれくらい小さいものが作れるか？

- 小さければ小さいほどよい
- 小ささは ε に依存する？

ハイパーグラフ $H = (V, E)$, 実数 $\varepsilon \in (0, 1]$

定理：小さな ε ネットの存在性 — 第 6 回講義で証明済

要素数 $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\log|E|\right)$ の ε ネットが存在する

定理：ε ネット定理 (Haussler, Welzl '87)

要素数 $O\left(\frac{d}{\varepsilon}\log\frac{d}{\varepsilon}\right)$ の ε ネットが存在する　ただし，$d = \mathrm{vc\text{-}dim}(H)$

$\therefore$ VC 次元が定数 $\Rightarrow$ ε ネットの最小要素数は $|V|$ や $|E|$ に依存しない！

注意

これらは多項式時間で構成できる ($O(|V||E|)$ 時間)

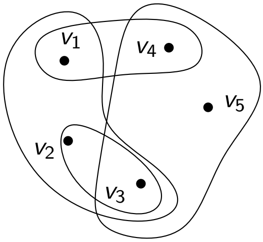
ハイパーグラフ $H = (V, E)$，部分集合 $X \subseteq V$

定義：ハイパーグラフの射影 (projection)

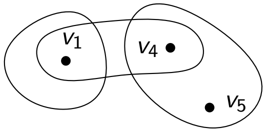
H の X の上への射影とは，ハイパーグラフ $H|_X = (X, E|_X)$ で，

$$E|_X = \{e \cap X \mid e \in E\}$$

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $X = \{v_1, v_4, v_5\}$,
$e_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $e_2 = \{v_1, v_4\}$, $e_3 = \{v_2, v_3\}$, $e_4 = \{v_3, v_4, v_5\}$ のとき



H



$H|_{\{v_1, v_4, v_5\}}$

ハイパーグラフ $H = (V, E)$

Sauer の補題

$n = |V|$, $d = \mathrm{vc\text{-}dim}(H)$ とするとき，

$$|E| \leq \sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i} \leq \left(\frac{\mathrm{e}\, n}{d}\right)^d$$

Sauer の補題：系

$X \subseteq V$ として，$m = |X|$ とすると，

$$|E|_X| \leq \sum_{i=0}^{d} \binom{m}{i} \leq \left(\frac{\mathrm{e}\, m}{d}\right)^d$$

目次

ハイパーグラフ $H = (V, E)$, 実数 $\varepsilon \in (0, 1]$

今から証明すること

要素数 $O\left(\frac{d}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$ の ε ネットが存在する　　ただし，$d = \mathrm{vc\text{-}dim}(H)$

これは次の論文に出ている

- Anselm Blumer, Andrzej Ehrenfeucht, David Haussler, Manfred K. Warmuth: Learnability and the Vapnik-Chervonenkis dimension. J. ACM 36(4): 929-965 (1989)

構成法

次の乱択アルゴリズムを考える

(1) $|e| < \varepsilon \cdot |V|$ を満たす辺 e を E から除去する
(残った辺の集合を E' とする)

(2) $s = \left\lceil \frac{Cd}{\varepsilon} \ln \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil$ とする (C は大きな定数)

(3) V の各要素を一様復元抽出により，s 個選び，多重集合 N を作る

(4) N を出力

目標

$\Pr(N$ が ε ネットである$) \geq \frac{1}{2}$

構成法

次の乱択アルゴリズムを考える

(1) $|e| < \varepsilon \cdot |V|$ を満たす辺 e を E から除去する
(残った辺の集合を E' とする)

(2) $s = \left\lceil \frac{Cd}{\varepsilon} \ln \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil$ とする (C は大きな定数)

(3) V の各要素を一様復元抽出により，s 個選び，多重集合 N を作る

(4) N を出力

ステップ (3) の詳細

- V の要素を一様分布に従って選んで x_i とする
- $N = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ とする　　(N は多重集合)

「N が ε ネットではない」という事象 $\mathcal{E}_0$ を考える

$$\mathcal{E}_0\text{: ある } e \in E' \text{ に対して，} N \cap e = \emptyset$$

目標 (改)

$$\Pr(\mathcal{E}_0) \leq \frac{1}{2}$$

この確率 $\Pr(\mathcal{E}_0)$ を次の思考実験を通して考える

- N と同じ方法で，要素数 s の多重集合 M を作成する
- 次の事象 $\mathcal{E}_1$ を考える

$$\mathcal{E}_1\text{: ある } e \in E' \text{ に対して，} N \cap e = \emptyset \text{ かつ } |M \cap e| \geq \frac{\varepsilon}{2} s$$

- このとき，$\Pr(\mathcal{E}_1) \leq \Pr(\mathcal{E}_0)$

  ($\because$ $\mathcal{E}_1$ が生起するとき，必ず $\mathcal{E}_0$ が生起する)

証明すること：第 1 段階

$\Pr(\mathcal{E}_0) \leq 2\Pr(\mathcal{E}_1)$

ちなみに，第 2 段階は $\Pr(\mathcal{E}_1) \leq \dfrac{1}{4}$

- まず，計算

$$\Pr(\mathcal{E}_1 \mid \mathcal{E}_0) = \frac{\Pr(\mathcal{E}_1 \text{ かつ } \mathcal{E}_0)}{\Pr(\mathcal{E}_0)} = \frac{\Pr(\mathcal{E}_1)}{\Pr(\mathcal{E}_0)}$$

- つまり，

証明すること：第 1 段階 (改)

$$\Pr(\mathcal{E}_1 \mid \mathcal{E}_0) \geq \frac{1}{2}$$

- $\mathcal{E}_0$ が生起すると仮定すると，ある $e \in E'$ が存在して $N \cap e = \emptyset$
- この e に対して，

$$\begin{aligned}\Pr(\mathcal{E}_1 \mid \mathcal{E}_0) &\geq \Pr\left(|M \cap e| \geq \frac{\varepsilon}{2}s\right)\\ &= 1 - \Pr\left(|M \cap e| < \frac{\varepsilon}{2}s\right)\end{aligned}$$

- ここで，$|M \cap e|$ は二項分布 $B(s, \frac{|e|}{|V|})$ に従うので，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[|M \cap e|] &= s\frac{|e|}{|V|} \\ \mathrm{V}[|M \cap e|] &= s\frac{|e|}{|V|}\left(1 - \frac{|e|}{|V|}\right) \leq s\frac{|e|}{|V|} = \mathrm{E}[|M \cap e|] \end{aligned}$$

二項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 X とは？

確率 p で表が出る硬貨を n 回独立に投げたとき，表が出る総数

- 性質：$\mathrm{E}[X] = pn$, $\mathrm{V}[X] = p(1-p)n$

- したがって，チェビシェフの不等式より

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(|M \cap e| < \frac{\varepsilon}{2}s\right) &\leq \Pr\left(|M \cap e| < \frac{s}{2}\frac{|e|}{|V|}\right) \\
&\leq \Pr\left(\left||M \cap e| - s\frac{|e|}{|V|}\right| \geq \frac{s}{2}\frac{|e|}{|V|}\right) \\
&\leq \frac{\mathrm{V}[|M \cap e|]}{\left(\frac{s|e|}{2|V|}\right)^2} \qquad \text{(チェビシェフ)} \\
&\leq \frac{s\frac{|e|}{|V|}}{\left(\frac{s|e|}{2|V|}\right)^2} = \frac{4|V|}{s|e|} \leq \frac{4\varepsilon}{s}
\end{aligned}
$$

チェビシェフの不等式

確率変数 X，実数 $t > 0$ に対して $\Pr(|X - \mathrm{E}[X]| \geq t) \leq \dfrac{\mathrm{V}[X]}{t^2}$

- したがって，$C \geq 16$ とすると，

$$\begin{aligned}
\Pr(\mathcal{E}_1 \mid \mathcal{E}_0) &\geq 1 - \Pr\left(|M \cap e| < \frac{\varepsilon}{2}s\right) \\
&\geq 1 - \frac{4\varepsilon}{s} \\
&\geq 1 - \frac{4}{C}\frac{\varepsilon^2}{\ln\frac{2}{\varepsilon}}\frac{1}{d} \\
&\geq 1 - \frac{8}{C} \geq 1 - \frac{8}{16} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

注

- $d \geq 1$ なので，$\dfrac{1}{d} \leq 1$
- $\varepsilon \in (0, 1]$ なので，$0 < \dfrac{\varepsilon^2}{\ln\frac{2}{\varepsilon}} < 2$

目次

- N と同じ方法で，要素数 s の多重集合 M を作成する
- 次の事象 $\mathcal{E}_1$ を考える

$$\mathcal{E}_1\text{: ある } e \in E' \text{ に対して，} N \cap e = \emptyset \text{ かつ } |M \cap e| \geq \frac{\varepsilon}{2} s$$

- このとき，$\Pr(\mathcal{E}_1) \leq \Pr(\mathcal{E}_0)$

($\because$ $\mathcal{E}_1$ が生起するとき，必ず $\mathcal{E}_0$ が生起する)

証明すること：第 2 段階

$$\Pr(\mathcal{E}_1) \leq \frac{1}{4}$$

第 1 段階 $\Pr(\mathcal{E}_0) \leq 2\Pr(\mathcal{E}_1)$ と合わせて，次が得られる

$$\Pr(\mathcal{E}_0) \leq 2\Pr(\mathcal{E}_1) \leq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

これで証明が終わる

N と M を次の方法で作ったと見なす

- V の要素を一様分布に従って選んで x_i とする
- $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2s}\}$ とする　　(A は多重集合)
- A から非復元抽出により，一様に s 個の要素を選び，N とする
- A の要素の中で N に選ばれなかったもの全体を，M とする

- A の作り方は $|V|^{2s}$ 通り
- A から N を作る方法は，$\binom{2s}{s}$ 通り

A が作られたときに，$\mathcal{E}_1$ が生起する確率 $\Pr(\mathcal{E}_1 \mid A)$ を考える

A が作られたときに，$\mathcal{E}_1$ が生起する確率 $\Pr(\mathcal{E}_1 \mid A)$ を考える

- 任意の $e \in E'$ を考える
- $|A \cap e| < \frac{\varepsilon}{2}s$ であるならば，

$$\Pr\left(N \cap e = \emptyset, |M \cap e| \geq \frac{\varepsilon}{2}s \mid A\right) = 0$$

- 一方，$|A \cap e| \geq \frac{\varepsilon}{2}s$ であるならば，

$$\Pr\left(N \cap e = \emptyset, |M \cap e| \geq \frac{\varepsilon}{2}s \mid A\right) \leq \Pr(N \cap e = \emptyset \mid A)$$

  - このとき，$\Pr(N \cap e = \emptyset \mid A)$ は $2s$ 個の要素を持つ A から s 個選んで N を作るとき，$A \cap e$ の要素をどれも選ばない確率

- つまり，$|A \cap e| \geq \frac{\varepsilon}{2}s$ であるならば，

$$
\begin{aligned}
\Pr(N \cap e = \emptyset \mid A) &= \frac{\binom{2s - |A \cap e|}{s}}{\binom{2s}{s}} \\
&= \frac{(2s - |A \cap e|)(2s - |A \cap e| - 1) \cdot \cdots \cdot (s - |A \cap e| + 1)}{2s(2s-1) \cdot \cdots \cdot (s+1)} \\
&= \frac{s(s-1) \cdot \cdots \cdot (s - |A \cap e| + 1)}{2s(2s-1) \cdot \cdots \cdot (2s - |A \cap e| + 1)} \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{|A \cap e|} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\varepsilon s/2}
\end{aligned}
$$

- 特に，$\Pr(N \cap e = \emptyset \mid A)$ は A ではなく，$A \cap e$ のみに依存
- 取り得る $A \cap e$ の種類はいくつか？ $\rightsquigarrow$ VC 次元が関係する

- 与えられるハイパーグラフは $H = (V, E)$
- 考えているハイパーグラフは $H' = (V, E')$

$$E' = \{e \in E \mid |e| \geq \varepsilon \cdot |V|\}$$

- それの射影 $H'|_A$ を考える ($|A| = 2s$)

$$H'|_A \text{ の辺集合} = \{A \cap e \mid e \in E'\}$$

- 部分ハイパーグラフを作ることと，射影により，
VC 次元は増えないので (第 5 回の演習問題)，Sauer の補題より，

$$H'|_A \text{ の辺の総数 } \leq \sum_{i=0}^{d} \binom{2s}{i} \leq \left(\frac{e \cdot 2s}{d}\right)^d$$

- したがって，合併上界を使うと，次が得られる

$$\begin{aligned}\Pr(\mathcal{E}_1 \mid A) &\leq \left(\frac{\mathrm{e} \cdot 2s}{d}\right)^d \Pr(N \cap e = \emptyset \mid A) \\ &\leq \left(\frac{\mathrm{e} \cdot 2s}{d}\right)^d \left(\frac{1}{2}\right)^{\varepsilon s/2}\end{aligned}$$

- したがって，

$$\begin{aligned}\Pr(\mathcal{E}_1) &= \sum_A \Pr(\mathcal{E}_1 \mid A) \Pr(A) \\ &= \Pr(\mathcal{E}_1 \mid A) \qquad (A \text{ は任意に固定}) \\ &\leq \left(\frac{\mathrm{e} \cdot 2s}{d}\right)^d \left(\frac{1}{2}\right)^{\varepsilon s/2}\end{aligned}$$

- 続き

$$
\begin{aligned}
\Pr(\mathcal{E}_1) &\leq \left(\frac{\mathrm{e}\cdot 2}{d}\cdot\frac{2Cd}{\varepsilon}\ln\frac{2}{\varepsilon}\right)^d\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}\frac{Cd}{\varepsilon}\ln\frac{2}{\varepsilon}} \\
&= \left(4\,\mathrm{e}\,C\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{C}{2}\ln\frac{2}{\varepsilon}}\right)^d \\
&\leq \left(\frac{1}{4}\right)^d \qquad (C \geq 30 \text{ とする}) \\
&\leq \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

これで証明が終わった □

目次

今日のまとめ

今日の内容

ε ネット定理の証明

- 乱択アルゴリズムによる

より詳細な議論を行うと以下の定理が証明できる

ε ネット定理 (詳細版)

講義で紹介した乱択アルゴリズムにおいて,

$$s \geq \max\left\{\frac{4}{\varepsilon}\log_2\frac{4}{p}, \frac{8d}{\varepsilon}\log_2\frac{16}{\varepsilon}\right\}$$

とすると，確率 $1-p$ 以上で N は ε ネットになる $(0 < p < 1)$

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次