離散最適化基礎論　第 10 回
幾何的被覆問題 (4)：局所探索法

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2018 年 1 月 5 日

最終更新：2018 年 1 月 8 日　11:42

概要

主題

離散最適化のトピックの１つとして幾何的被覆問題を取り上げ，
その数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

- 「離散最適化」と「計算幾何学」の接点として重要な役割を果たしているから
- 様々なアルゴリズム設計技法・解析技法を紹介できるから
- 応用が多いから

1. 幾何的被覆問題とは？ (10/6)

★ 国内出張のため休み (10/13)

2. 最小包囲円問題 (1)：基本的な性質 (10/20)
3. 最小包囲円問題 (2)：乱択アルゴリズム (10/27)

★ 文化の日のため休み (11/3)

4. クラスタリング (1)：k-センター (11/10)
5. 幾何ハイパーグラフ (1)：VC 次元 (11/17)

★ 調布祭 のため 休み (11/24)

6. 幾何ハイパーグラフ (2)：ε ネット (12/1)

スケジュール 後半 (予定)

7. 幾何的被覆問題 (1)：線形計画法の利用 (12/8)
8. 幾何的被覆問題 (2)：シフト法 (12/15)
9. 幾何的被覆問題 (3)：局所探索法 (準備) (12/22)
10. 幾何的被覆問題 (4)：局所探索法 (1/5)
- ⋆ センター試験準備 のため 休み (1/12)
11. 幾何ハイパーグラフ (3)：ε ネット定理の証明 (1/19)
12. 幾何アレンジメント (1)：合併複雑度と ε ネット (1/26)
13. 幾何アレンジメント (2)：合併複雑度の例 (2/2)
14. 最近のトピック (2/9)
15. 期末試験 (2/16？)

注意：予定の変更もありうる

幾何的被覆問題に対する近似アルゴリズム

局所探索法 (local search) を利用したもの

- 前回の「平面的分離集合定理」を解析に用いる

今回紹介する内容は主に次の論文に基づく

- N. H. Mustafa and S. Ray: Improved results on geometric hitting set problems. Discrete & Computational Geometry **44** (2010) 883–895.

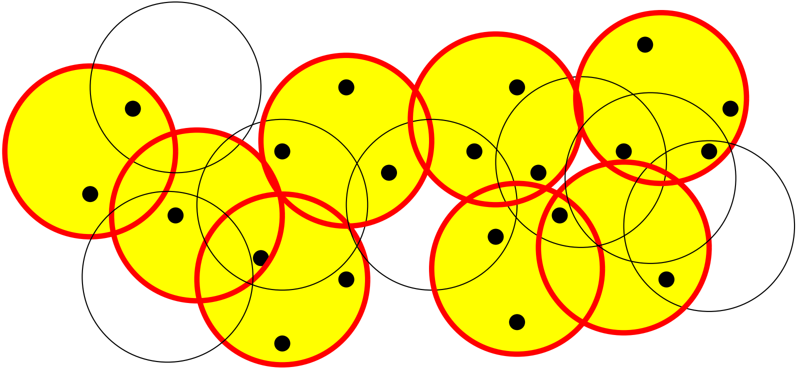
この講義では，いくつかの技法を見る (予定である)

- $\boxed{\text{離散型単位円被覆問題：多項式時間 } O(1) \text{ 近似アルゴリズム}}$
  (Brönnimann, Goodrich '95)
  $\rightsquigarrow$ アルゴリズム：線形計画法の利用
  利点：他の図形にも広く応用可能
- $\boxed{\text{連続型単位円被覆問題：多項式時間 } 1+\varepsilon \text{ 近似アルゴリズム}}$
  (Hochbaum, Maass '85)
  $\rightsquigarrow$ アルゴリズム：シフト法
  利点：他の問題にも広く応用可能
- $\boxed{\text{離散型単位円被覆問題：多項式時間 } 1+\varepsilon \text{ 近似アルゴリズム}}$
  (Mustafa, Ray '10)
  $\rightsquigarrow$ アルゴリズム：局所探索法
  利点：単純

その他にも関連する話題に触れる

離散型単位円被覆問題 (discrete unit disk cover problem)

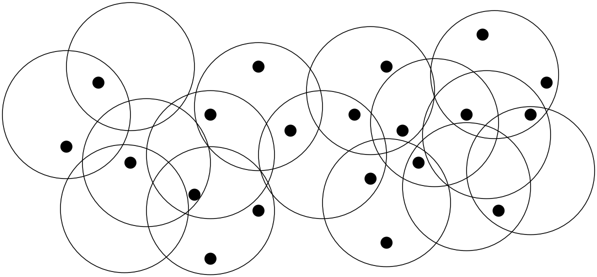
平面上にいくつかの点といくつかの単位円が与えられたとき
単位円を選んで，点をすべて覆いたい
選ばれる単位円の数を最も少なくするにはどうすればよいか？



復習：「横断問題」も「被覆問題」と見なすことができる

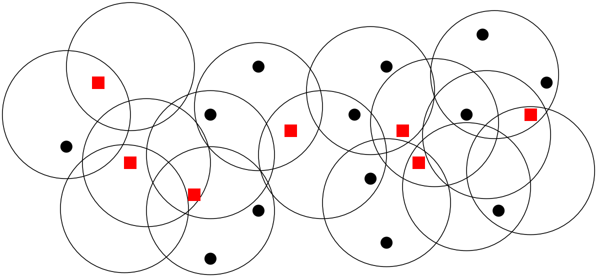
離散型単位円横断問題 (discrete unit disk transversal problem)

平面上にいくつかの点といくつかの単位円が与えられたとき
点を選んで，すべての単位円を横断したい
選ばれる点の数を最も少なくするにはどうすればよいか？



離散型単位円横断問題 (discrete unit disk transversal problem)

平面上にいくつかの点といくつかの単位円が与えられたとき
点を選んで，すべての単位円を横断したい
選ばれる点の数を最も少なくするにはどうすればよいか？



今日の目標

離散型円横断問題に対する近似アルゴリズム設計

- 局所探索法と平面的分離集合定理を用いる

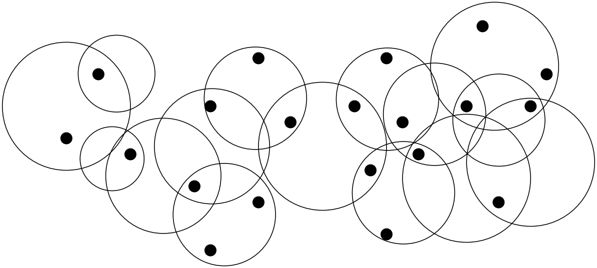
補足

- 離散型単位円被覆問題と離散型単位円横断問題は同値 (第 1 回演習問題)
- 単位円横断問題ではなく，円横断問題を扱う方が説明しやすい
- 離散型円横断問題が解ければ，離散型単位円横断問題も解ける

離散型円横断問題 (discrete disk transversal problem)

入力

- 平面上の点集合 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$
- 平面上の円の集合 $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$

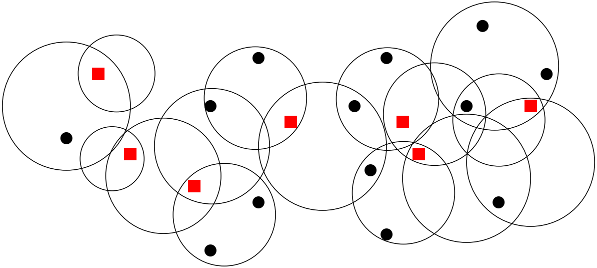


離散型円横断問題 (discrete disk transversal problem)

出力

- 点集合 $P' \subseteq P$ で次を満たすもの (P' が $\mathcal{D}$ を横断する)

  任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して，ある $p \in P'$ が存在して，$p \in D$

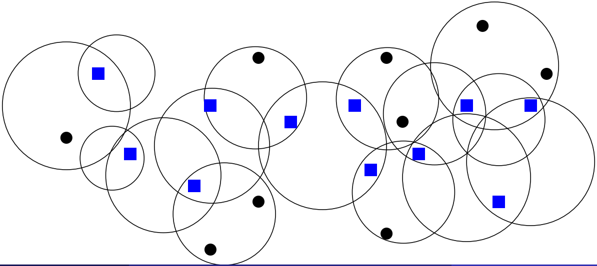


目次

局所探索法に基づく離散型円横断問題に対する近似アルゴリズム

自然数 k を予め定めておく

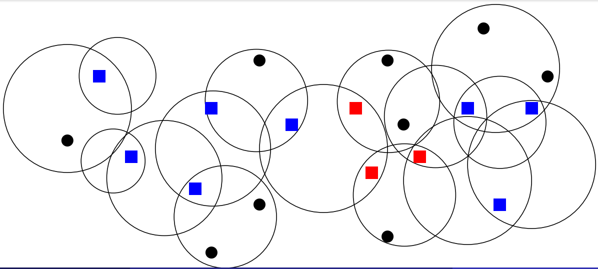
1. 横断 $S \subseteq P$ を 1 つ見つける (なければ終了)
2. 以下を繰り返し
    1. 要素数 k の集合 $S' \subseteq S$ と要素数 $k-1$ の集合 $S'' \subseteq P$ で, $(S - S') \cup S''$ が横断であるものを見つける
       なければ S を出力して終了
    2. S を $(S - S') \cup S''$ で置き換える



局所探索法に基づく離散型円横断問題に対する近似アルゴリズム

自然数 k を予め定めておく

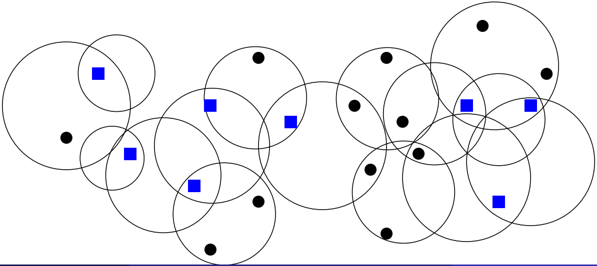
1. 横断 $S \subseteq P$ を 1 つ見つける (なければ終了)
2. 以下を繰り返し
   1. 要素数 k の集合 $S' \subseteq S$ と要素数 $k-1$ の集合 $S'' \subseteq P$ で, $(S - S') \cup S''$ が横断であるものを見つける
      なければ S を出力して終了
   2. S を $(S - S') \cup S''$ で置き換える



局所探索法に基づく離散型円横断問題に対する近似アルゴリズム

自然数 k を予め定めておく

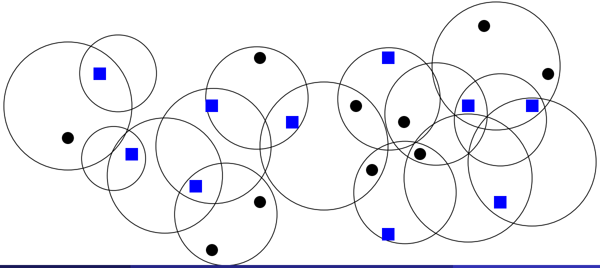
1. 横断 $S \subseteq P$ を 1 つ見つける (なければ終了)
2. 以下を繰り返し
   1. 要素数 k の集合 $S' \subseteq S$ と要素数 $k-1$ の集合 $S'' \subseteq P$ で, $(S - S') \cup S''$ が横断であるものを見つける
      なければ S を出力して終了
   2. S を $(S - S') \cup S''$ で置き換える



局所探索法に基づく離散型円横断問題に対する近似アルゴリズム

自然数 k を予め定めておく

1. 横断 $S \subseteq P$ を 1 つ見つける (なければ終了)
2. 以下を繰り返し
   1. 要素数 k の集合 $S' \subseteq S$ と要素数 $k-1$ の集合 $S'' \subseteq P$ で，$(S - S') \cup S''$ が横断であるものを見つける
      なければ S を出力して終了
   2. S を $(S - S') \cup S''$ で置き換える



局所探索法に基づく離散型円横断問題に対する近似アルゴリズム

自然数 k を予め定めておく　$n = |P|, m = |\mathcal{D}|$

1. 横断 $S \subseteq P$ を 1 つ見つける (なければ終了)　$O(mn)$ 時間
2. 以下を繰り返し　$O(n)$ 回
   1. 要素数 k の集合 $S' \subseteq S$ と要素数 $k-1$ の集合 $S'' \subseteq P$ で，$(S - S') \cup S''$ が横断であるものを見つける
      なければ S を出力して終了
   2. S を $(S - S') \cup S''$ で置き換える

- ステップ 2 の 1 反復にかかる時間：$O(\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}mn)$
- $\therefore$ 全体の計算量 $= O(\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}mn^2)$
  (これは k が定数ならば，n, m に関する多項式)

次の定理の証明

$k = \Theta(1/\varepsilon^2)$ とすると，局所探索法は多項式時間 $1+\varepsilon$ 近似アルゴリズムである (ただし，$\varepsilon > 0$ は定数である)

つまり，次を証明する

証明すること

ある定数 c が存在して，最適解の 1 つを R，局所探索法の出力を B とすると，

$$|B| \leq (1 + c/\sqrt{k})|R|$$

が成り立つ (ただし，k は十分大きい定数とする)

$k = (c/\varepsilon)^2$ とすると，$1 + c/\sqrt{k} = 1 + \varepsilon$ となる

目次

R は最適解，B は局所探索法の出力

仮定

$R \cap B = \emptyset$

$R = (R - B) \cup (R \cap B)$，$B = (B - R) \cup (R \cap B)$ と書ける

- ここで，$(R - B) \cap (B - R) = \emptyset$
- また，円の集合 $\tilde{\mathcal{D}}$ を次のように定義する

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{D \in \mathcal{D} \mid D \cap (R \cap B) = \emptyset\}$$

つまり，$\tilde{\mathcal{D}}$ は $R \cap B$ が横断しない円の集合

- このとき，$R - B, B - R$ は $\tilde{\mathcal{D}}$ の横断である　(演習問題)
- また，$R - B$ は $P - (R \cap B)$ を点集合，$\tilde{\mathcal{D}}$ を円集合としたときの離散型円横断問題に対する最適解である　(演習問題)

R は最適解，B は局所探索法の出力

仮定

$R \cap B = \emptyset$

$R = (R - B) \cup (R \cap B)$，$B = (B - R) \cup (R \cap B)$ と書ける

- $|B - R| \leq (1 + c/\sqrt{k})|R - B|$ が証明できたとすると，

$$
\begin{aligned}
|B| &= |B - R| + |R \cap B| \\
&\leq (1 + c/\sqrt{k})(|R - B| + |R \cap B|) \\
&= (1 + c/\sqrt{k})|R|
\end{aligned}
$$

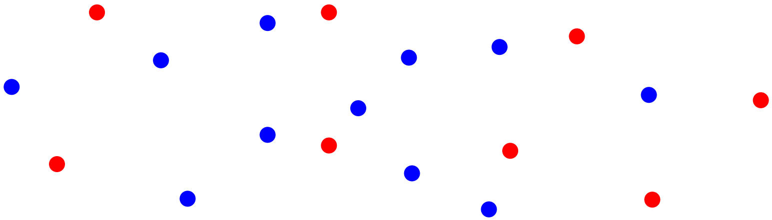
- つまり，$R - B, B - R$ を新たに R, B であると考えればよい

Delaunay グラフとは？

平面上の点集合 $R \cup B$ に対する Delaunay グラフとは，
$R \cup B$ を頂点集合として，

$$p, q \in R \cup B \text{ が辺で結ばれる} \Leftrightarrow p, q \text{ のみを含む円が存在する}$$

として作られるグラフのこと

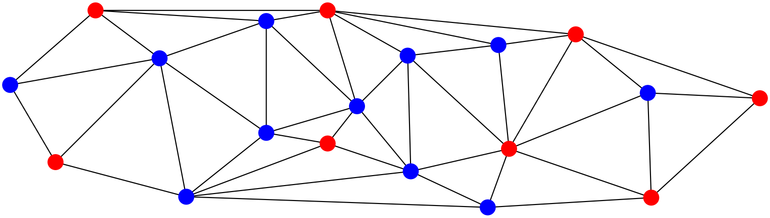


Delaunay グラフとは？

平面上の点集合 $R \cup B$ に対する Delaunay グラフとは，
$R \cup B$ を頂点集合として，

$$p, q \in R \cup B \text{ が辺で結ばれる} \Leftrightarrow p, q \text{ のみを含む円が存在する}$$

として作られるグラフのこと

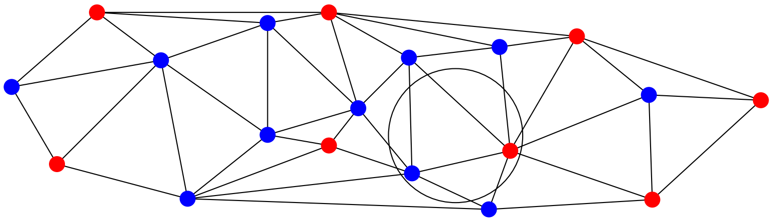


Delaunay グラフとは？

平面上の点集合 $R \cup B$ に対する Delaunay グラフとは，
$R \cup B$ を頂点集合として，

$$p, q \in R \cup B \text{ が辺で結ばれる} \Leftrightarrow p, q \text{ のみを含む円が存在する}$$

として作られるグラフのこと

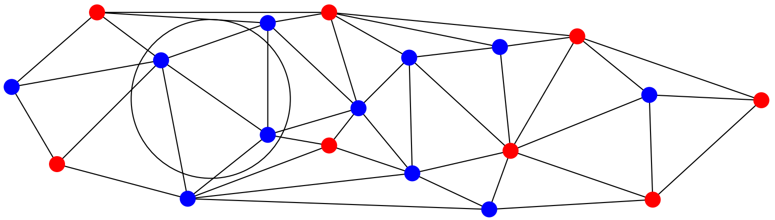


Delaunay グラフとは？

平面上の点集合 $R \cup B$ に対する Delaunay グラフとは，
$R \cup B$ を頂点集合として，

$$p, q \in R \cup B \text{ が辺で結ばれる} \Leftrightarrow p, q \text{ のみを含む円が存在する}$$

として作られるグラフのこと

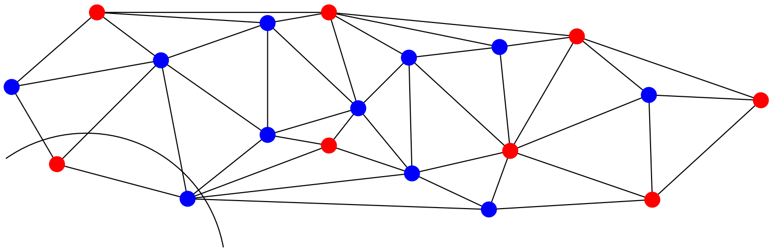


Delaunay グラフとは？

平面上の点集合 $R \cup B$ に対する Delaunay グラフとは，
$R \cup B$ を頂点集合として，

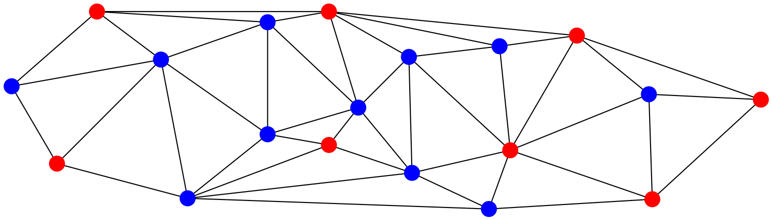
$$p, q \in R \cup B \text{ が辺で結ばれる} \Leftrightarrow p, q \text{ のみを含む円が存在する}$$

として作られるグラフのこと



Delaunay グラフの性質 (1)

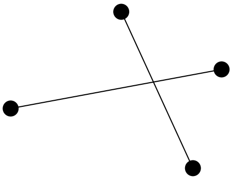
Delaunay グラフは平面グラフ (辺の交差が存在しない)



証明：辺の交差があるとして矛盾を導く (背理法)

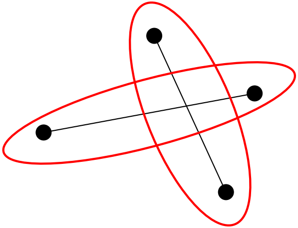
Delaunay グラフの性質 (1)

Delaunay グラフは平面グラフ (辺の交差が存在しない)



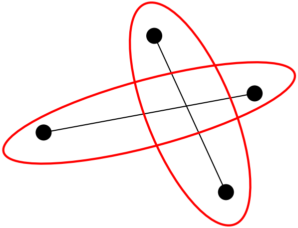
Delaunay グラフの性質 (1)

Delaunay グラフは平面グラフ (辺の交差が存在しない)



Delaunay グラフの性質 (1)

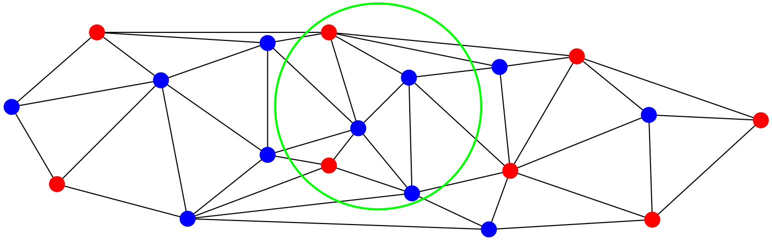
Delaunay グラフは平面グラフ (辺の交差が存在しない)



2 つの異なる円が 4 点以上で交わることはないので矛盾 □

Delaunay グラフの性質 (2)

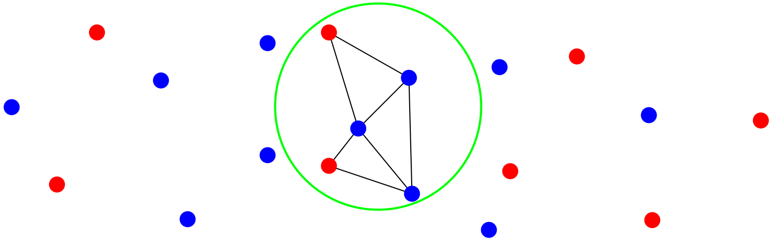
任意の円に含まれる Delaunay グラフの部分グラフは連結である



証明：その反例となるような最小半径の円を考える (背理法)

Delaunay グラフの性質 (2)

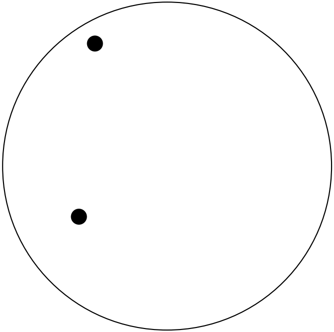
任意の円に含まれる Delaunay グラフの部分グラフは連結である



<u>証明</u>：その反例となるような最小半径の円を考える (背理法)

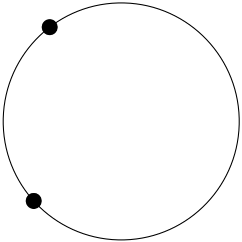
Delaunay グラフの性質 (2)

任意の円に含まれる Delaunay グラフの部分グラフは連結である



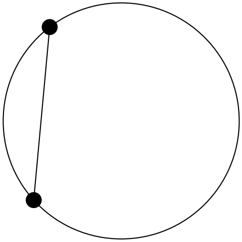
Delaunay グラフの性質 (2)

任意の円に含まれる Delaunay グラフの部分グラフは連結である



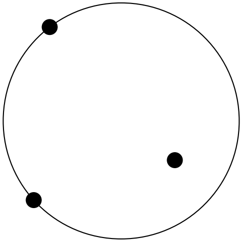
Delaunay グラフの性質 (2)

任意の円に含まれる Delaunay グラフの部分グラフは連結である



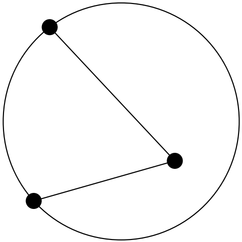
Delaunay グラフの性質 (2)

任意の円に含まれる Delaunay グラフの部分グラフは連結である



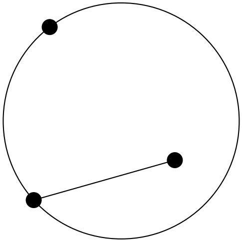
Delaunay グラフの性質 (2)

任意の円に含まれる Delaunay グラフの部分グラフは連結である



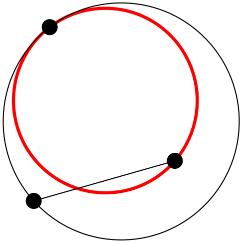
Delaunay グラフの性質 (2)

任意の円に含まれる Delaunay グラフの部分グラフは連結である



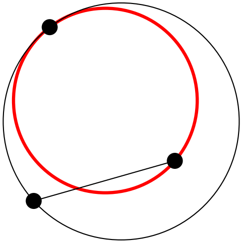
Delaunay グラフの性質 (2)

任意の円に含まれる Delaunay グラフの部分グラフは連結である



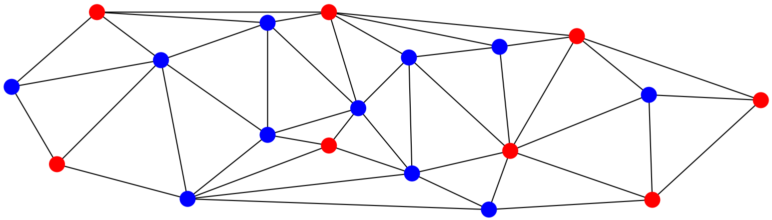
Delaunay グラフの性質 (2)

任意の円に含まれる Delaunay グラフの部分グラフは連結である



半径の最小性に矛盾 □

$R \cup B$ に対する Delaunay グラフから，
R の点と B の点を結ぶ辺だけを残してグラフを作り，それを G とする



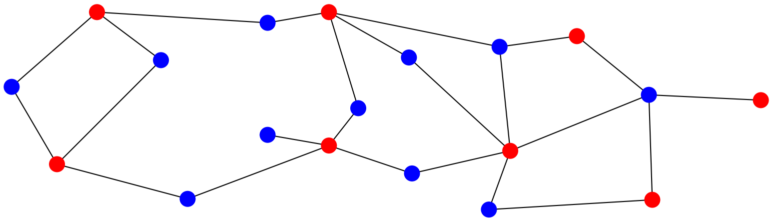
性質 (3)

任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して，ある $p \in R \cap D$ とある $q \in B \cap D$ が存在して，$\{p, q\}$ は G の辺

「Delaunay グラフの性質 (2)」から導ける (演習問題)

Delaunay グラフから二部グラフを作る

$R \cup B$ に対する Delaunay グラフから，
R の点と B の点を結ぶ辺だけを残してグラフを作り，それを G とする

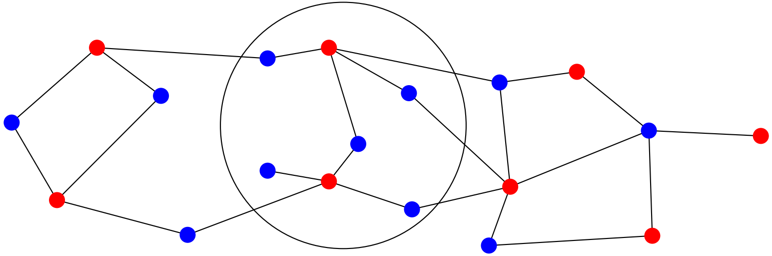


性質 (3)

任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して，ある $p \in R \cap D$ とある $q \in B \cap D$ が存在して，$\{p, q\}$ は G の辺

「Delaunay グラフの性質 (2)」から導ける (演習問題)

$R \cup B$ に対する Delaunay グラフから，
R の点と B の点を結ぶ辺だけを残してグラフを作り，それを G とする



性質 (3)

任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して，ある $p \in R \cap D$ とある $q \in B \cap D$ が存在して，$\{p, q\}$ は G の辺

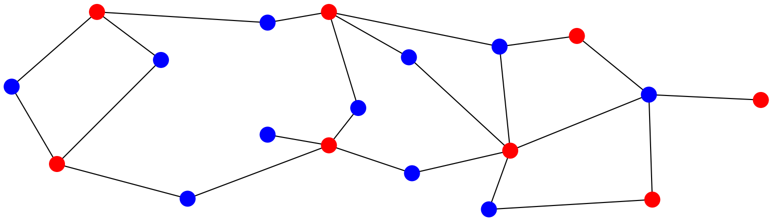
「Delaunay グラフの性質 (2)」から導ける (演習問題)

R は最適解，B は局所探索法の出力

補題

G において，要素数 k 以下の任意の $B' \subseteq B$ に対して，$|N(B')| \geq |B'|$

$N(B')$ は B' の隣接頂点集合

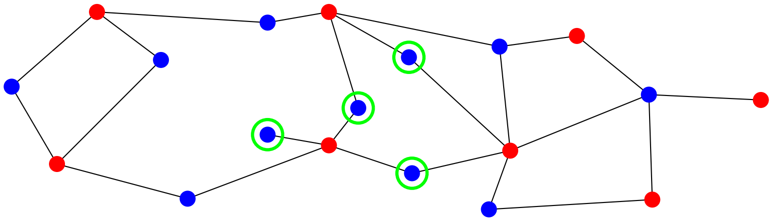


R は最適解，B は局所探索法の出力

補題

G において，要素数 k 以下の任意の $B' \subseteq B$ に対して，$|N(B')| \geq |B'|$

$N(B')$ は B' の隣接頂点集合

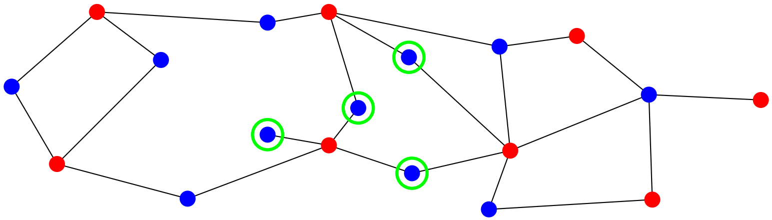


R は最適解，B は局所探索法の出力

補題

G において，要素数 k 以下の任意の $B' \subseteq B$ に対して，$|N(B')| \geq |B'|$

$N(B')$ は B' の隣接頂点集合



つまり，$k = 3$ のとき，このグラフに対して補題は成立しない

R は最適解，B は局所探索法の出力

補題

G において，要素数 k 以下の任意の $B' \subseteq B$ に対して，$|N(B')| \geq |B'|$

証明：性質 (3) より，$(B - B') \cup N(B')$ は $\mathcal{D}$ の横断

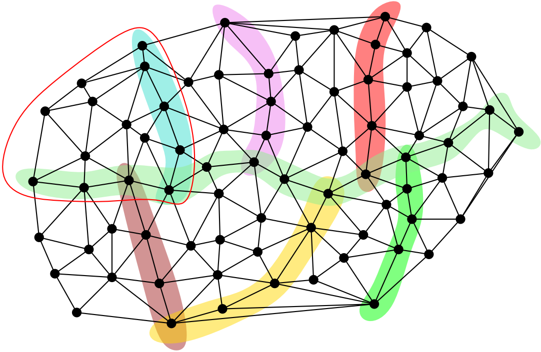
- なぜならば，$D \in \mathcal{D}$ に対して $(B - B') \cap D = \emptyset$ が成り立つとしても，性質 (3) より，$N(B') \cap D \neq \emptyset$ なので，$((B - B') \cup N(B')) \cap D \neq \emptyset$ となるから
- B が局所探索法の出力なので，

$$|B'| \leq k \quad \text{ならば,} \quad |(B - B') \cup N(B')| \geq |B|$$

- したがって，$|N(B')| \geq |B'|$ $\square$

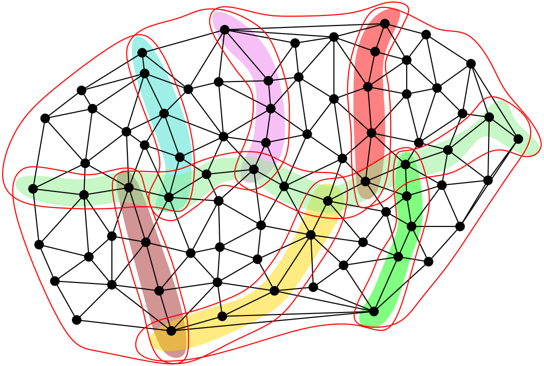
目次

領域 (region) とその境界 (boundary)



領域 $R \subseteq V$ の境界とは,
$V - R$ に隣接頂点を持つ R の頂点の集合

領域 (region) とその境界 (boundary)



領域 $R \subseteq V$ の境界とは,
$V - R$ に隣接頂点を持つ R の頂点の集合

(復習) 平面的分離集合定理の再帰的適用：定理

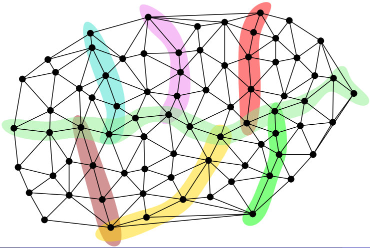
平面的グラフ $G = (V, E)$，自然数 $r \geq 1$

定理 (Frederickson '87)

次のように領域へ分解できる

- 各領域の頂点数 $\leq r$，領域の数 $= O(|V|/r)$
- $b(v)$ で頂点 v が含まれる境界の数を表すと

$$\sum_{v \in V} b(v) = O(|V|/\sqrt{r})$$



証明すること

ある定数 c が存在して，最適解の 1 つを R，局所探索法の出力を B とすると，

$$|B| \leq (1 + c/\sqrt{k})|R|$$

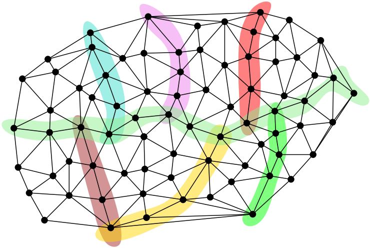
が成り立つ (ただし，k は十分大きい定数とする)

証明の着想：$r = k$ として，Frederickson の定理を利用する

- あとは頂点の数を数える

証明：$r = k$ として，Frederickson の定理を利用する

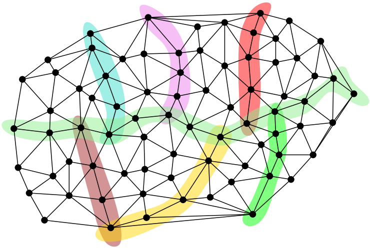
- 領域の数は $O((|R| + |B|)/k)$
- 第 i 番目の領域に対して，
  - その中にある R, B の頂点の集合を R_i, B_i とする
  - その境界にある R, B の頂点の集合を $R_i^\partial, B_i^\partial$ とする
  - その境界にない R, B の頂点の集合を R_i°, B_i° とする
- 特に，$|B_i^\circ| \le k$



証明 (続)：

- 補題より，$|B_i^\circ| \le |N(B_i^\circ)| \le |R_i| = |R_i^\circ| + |R_i^\partial|$
- したがって，$|B_i| = |B_i^\circ| + |B_i^\partial| \le |R_i^\circ| + |R_i^\partial| + |B_i^\partial|$
- Frederickson の定理より，ある定数 γ が存在して，

$$
\begin{aligned}
|B| &\le \sum_i |B_i| \le \sum_i |R_i^\circ| + \sum_i (|R_i^\partial| + |B_i^\partial|) \\
&\le |R| + \gamma \cdot (|R| + |B|)/\sqrt{k}
\end{aligned}
$$



証明 (続)：

- 変形すると，

$$|B| \leq \frac{1+\gamma/\sqrt{k}}{1-\gamma/\sqrt{k}}|R|$$

- $0 < k \geq 4\gamma^2$ とすると，$0 \leq \gamma/\sqrt{k} \leq 1/2$
- 実数 x が $0 \leq x \leq 1/2$ を満たすとき，$\dfrac{1+x}{1-x} \leq 1+4x$ となるので，

$$|B| \leq \frac{1+\gamma/\sqrt{k}}{1-\gamma/\sqrt{k}}|R| \leq (1+4\gamma/\sqrt{k})|R|$$

- $c = 4\gamma$ と置くと，$|B| \leq (1+c/\sqrt{k})|R|$ □

目次

幾何的被覆問題に対する近似アルゴリズム

局所探索法 (local search) を利用したもの

- 前回の「平面的分離集合定理」を解析に用いる

今回紹介する内容は主に次の論文に基づく

- N. H. Mustafa and S. Ray: Improved results on geometric hitting set problems. Discrete & Computational Geometry **44** (2010) 883–895.

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次