離散最適化基礎論　第 9 回
幾何的被覆問題 (3)：局所探索法 (準備)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 12 月 22 日

最終更新：2017 年 12 月 22 日　10:56

概要

主題

離散最適化のトピックの 1 つとして幾何的被覆問題を取り上げ，
その数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

- 「離散最適化」と「計算幾何学」の接点として重要な役割を果たしているから
- 様々なアルゴリズム設計技法・解析技法を紹介できるから
- 応用が多いから

スケジュール 前半

1. 幾何的被覆問題とは？ (10/6)
- ⋆ 国内出張のため休み (10/13)
2. 最小包囲円問題 (1)：基本的な性質 (10/20)
3. 最小包囲円問題 (2)：乱択アルゴリズム (10/27)
- ⋆ 文化の日のため休み (11/3)
4. クラスタリング (1)：k-センター (11/10)
5. 幾何ハイパーグラフ (1)：VC 次元 (11/17)
- ⋆ 調布祭 のため 休み (11/24)
6. 幾何ハイパーグラフ (2)：ε ネット (12/1)

スケジュール 後半 (予定)

7. 幾何的被覆問題 (1)：線形計画法の利用 (12/8)
8. 幾何的被覆問題 (2)：シフト法 (12/15)
9. 幾何的被覆問題 (3)：局所探索法 (準備) (12/22)
10. 幾何的被覆問題 (4)：局所探索法 (1/5)
- ⋆ センター試験準備 のため 休み (1/12)
11. 幾何ハイパーグラフ (3)：ε ネット定理の証明 (1/19)
12. 幾何アレンジメント (1)：合併複雑度と ε ネット (1/26)
13. 幾何アレンジメント (2)：合併複雑度の例 (2/2)
14. 最近のトピック (2/9)
15. 期末試験 (2/16？)

注意：予定の変更もありうる

幾何的被覆問題に対する近似アルゴリズム

局所探索法 (local search) を利用したもの

- これの準備のために「平面的分離集合定理」を紹介

今回紹介する内容は主に次の論文に基づく

- N. Alon, P. Seymour, and R. Thomas: Planar separators, SIAM Journal on Discrete Mathematics **7** (1994) 184–193.

平面的分離集合定理 (planar separator theorem) 自体は次の論文による

- R. J. Lipton and R. E. Tarjan: A separator theorem for planar graphs, SIAM Journal on Applied Mathematics **36** (1979) 177–189.

目次

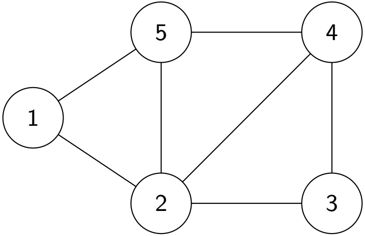
グラフといったら

頂点集合 V と辺集合 E の組 (V, E) のこと

- V は (たいてい) 有限集合　　V の要素は**頂点** (vertex)
- E は V の要素の組の集合　　E の要素は**辺** (edge)

例：

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

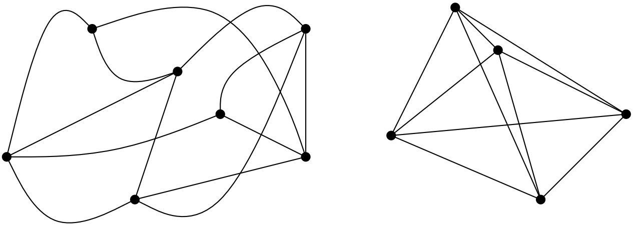


無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの描画とは？

グラフ G の描画とは，平面上に次のように G を表現したもの

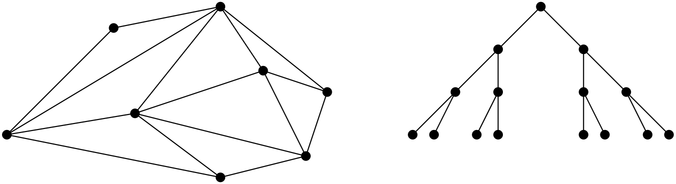
- 各頂点 $v \in V$ は平面上の点
- 各辺 $\{u, v\} \in E$ は u と v を表す点を結ぶ (自己交差のない) 曲線



無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの平面描画とは？

グラフ G の平面描画とは，G の描画で，
辺を表す曲線どうしが端点以外に共有点を持たないこと



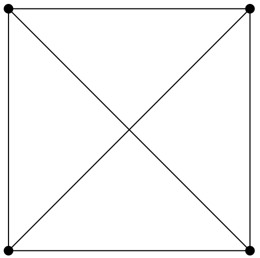
平面描画のことを平面グラフ (plane graph) とも呼ぶ

無向グラフ $G = (V, E)$

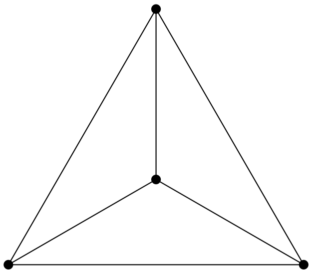
平面的グラフとは？

G が**平面的** (planar) であるとは，G が平面描画を持つこと

例：K_4 は平面的グラフである



K_4 の非平面描画



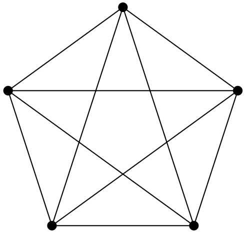
K_4 の平面描画

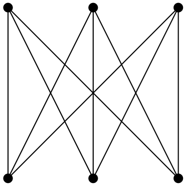
無向グラフ $G = (V, E)$

平面的グラフとは？

G が平面的 (planar) であるとは，G が平面描画を持つこと

平面的ではない例



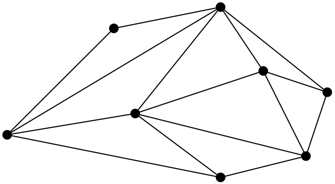


平面的グラフ $G = (V, E)$

平面的グラフの性質 (1)

$|V| \geq 3$ のとき,

$$|E| \leq 3|V| - 6$$



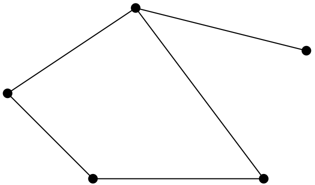
- $|V| = 8$
- $|E| = 15$
- $3|V| - 6 = 3 \cdot 8 - 6 = 18$

極大平面的グラフ

平面的グラフ $G = (V, E)$

極大平面的グラフとは？

G が極大平面的グラフ (maximally planar graph) であるとは
平面的であるという性質を保ったまま，辺を追加できないこと

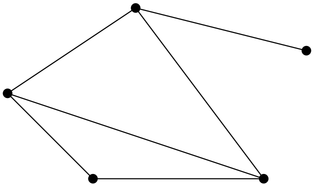


$\boxed{\text{性質 (2)}}$：$G = (V, E)$ が極大平面的グラフ，$|V| \geq 3 \Rightarrow |E| = 3|V| - 6$

平面的グラフ $G = (V, E)$

極大平面的グラフとは？

G が**極大平面的グラフ** (maximally planar graph) であるとは
平面的であるという性質を保ったまま，辺を追加できないこと

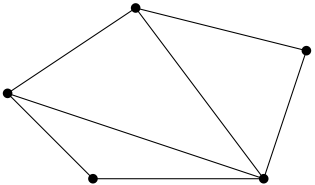


$\boxed{\text{性質 (2)}}$: $G = (V, E)$ が極大平面的グラフ，$|V| \geq 3 \Rightarrow |E| = 3|V| - 6$

平面的グラフ $G = (V, E)$

極大平面的グラフとは？

G が極大平面的グラフ (maximally planar graph) であるとは
平面的であるという性質を保ったまま，辺を追加できないこと

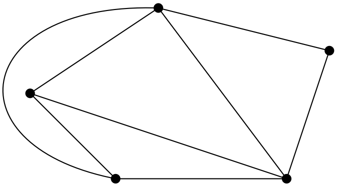


$\boxed{\text{性質 (2)}}$: $G = (V, E)$ が極大平面的グラフ，$|V| \geq 3 \Rightarrow |E| = 3|V| - 6$

平面的グラフ $G = (V, E)$

極大平面的グラフとは？

G が極大平面的グラフ (maximally planar graph) であるとは
平面的であるという性質を保ったまま，辺を追加できないこと

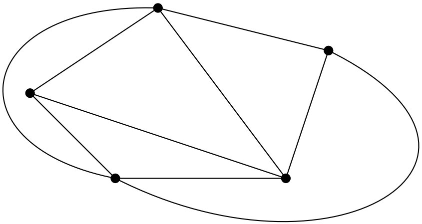


$\boxed{\text{性質 (2)}}$: $G = (V, E)$ が極大平面的グラフ，$|V| \geq 3 \Rightarrow |E| = 3|V| - 6$

平面的グラフ $G = (V, E)$

極大平面的グラフとは？

G が**極大平面的グラフ** (maximally planar graph) であるとは
平面的であるという性質を保ったまま，辺を追加できないこと

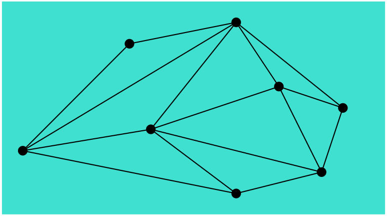


$\boxed{\text{性質 (2)}}$: $G = (V, E)$ が極大平面的グラフ，$|V| \geq 3 \Rightarrow |E| = 3|V| - 6$

平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

平面グラフの面とは？ (常識に基づく定義)

G の面とは，G の辺 (を表す曲線) で囲まれた平面上の領域のこと

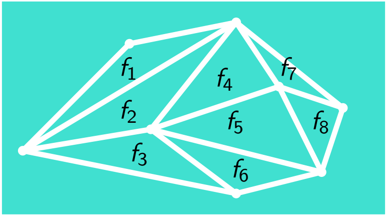


G の面で非有界であるものを G の外面と呼ぶ

平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

平面グラフの面とは？ (常識に基づく定義)

G の面とは，G の辺 (を表す曲線) で囲まれた平面上の領域のこと

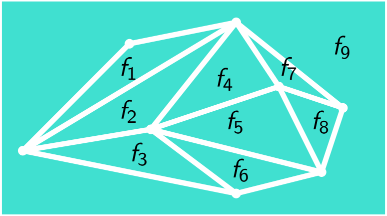


G の面で非有界であるものを G の外面と呼ぶ

平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

平面グラフの面とは？ (常識に基づく定義)

G の**面**とは，G の辺 (を表す曲線) で囲まれた平面上の領域のこと

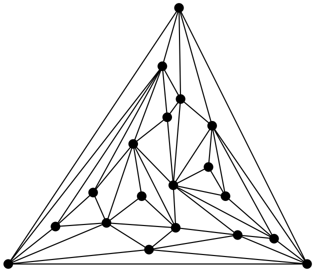


G の面で非有界であるものを G の**外面**と呼ぶ

極大平面的グラフ $G = (V, E)$

性質 (3)

極大平面的グラフ G の任意の平面描画において，
どの面もちょうど 3 つの辺で囲まれている



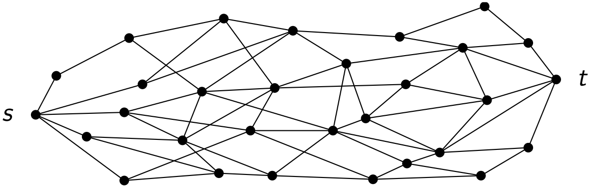
その意味で，極大平面的グラフのことを三角形分割と呼ぶこともある

目次

無向グラフ $G = (V, E)$, $s, t \in V$, $\{s, t\} \notin E$

Menger の定理 (無向グラフ・頂点版)

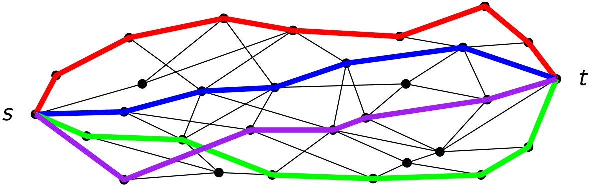
s から t へ向かう道で，内点素であるものの最大数 $=$ s と t を分離する頂点集合の最小要素数



無向グラフ $G = (V, E)$， $s, t \in V$， $\{s, t\} \notin E$

Menger の定理 (無向グラフ・頂点版)

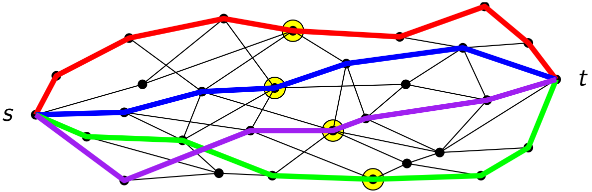
s から t へ向かう道で，内点素であるものの最大数 $=$ s と t を分離する頂点集合の最小要素数



無向グラフ $G = (V, E)$, $s, t \in V$, $\{s, t\} \notin E$

Menger の定理 (無向グラフ・頂点版)

s から t へ向かう道で，内点素であるものの最大数 $=$ s と t を分離する頂点集合の最小要素数

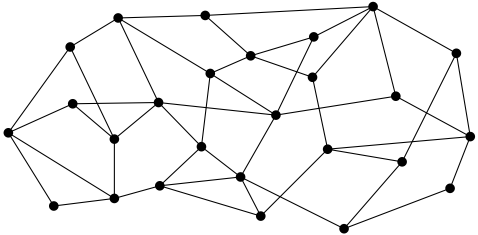


無向グラフ $G = (V, E)$，実数 $\alpha \in [1/2, 1]$

α-分離集合とは？

G の α-分離集合 (α-separator) とは，
頂点部分集合 $S \subseteq V$ で，$V - S$ が 2 つの部分 A, B に分かれ，次を満たす

- A の頂点と B の頂点を結ぶ辺が存在しない
- $|A| \leq \alpha\, |V|$ かつ $|B| \leq \alpha\, |V|$



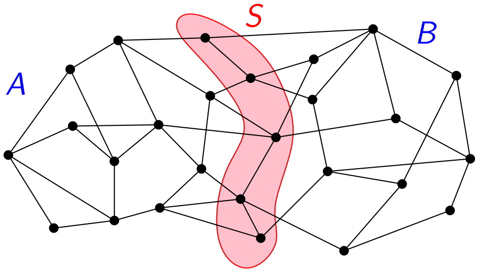
分離集合

無向グラフ $G = (V, E)$，実数 $\alpha \in [1/2, 1]$

α-分離集合とは？

G の α-分離集合 (α-separator) とは，
頂点部分集合 $S \subseteq V$ で，$V - S$ が 2 つの部分 A, B に分かれ，次を満たす

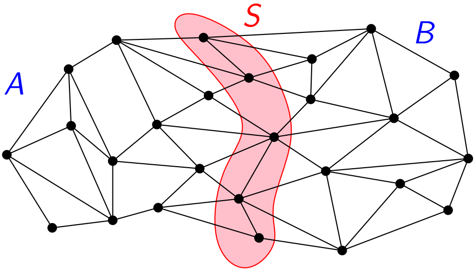
- A の頂点と B の頂点を結ぶ辺が存在しない
- $|A| \leq \alpha\ |V|$ かつ $|B| \leq \alpha\ |V|$



平面的グラフ $G = (V, E)$

平面的分離集合定理 (Lipton, Tarjan '79)

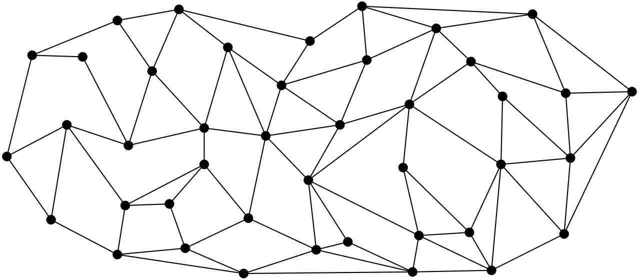
平面的グラフ G には 2/3-分離集合 S で，
$|S| = O(\sqrt{|V|})$ を満たすものが必ず存在する



これが成り立つのは，平面的グラフの場合

証明 (Alon, Seymour, Thomas ('94) による)：

- 辺を追加して，G を極大平面的グラフにする

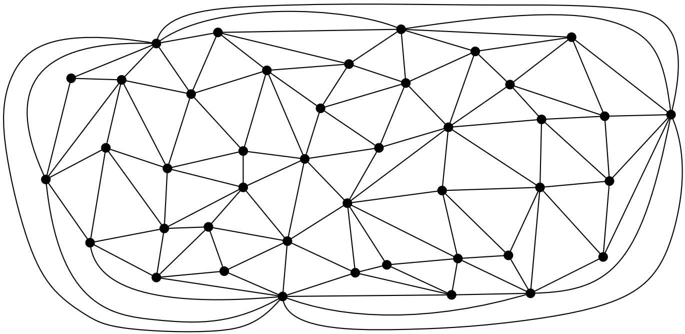


そのようにしたグラフの分離集合は，もとの G の分離集合でもある

- 都合上，$k = \lfloor\sqrt{2|V|}\rfloor$ とする

証明 (Alon, Seymour, Thomas ('94) による)：

- 辺を追加して，G を極大平面的グラフにする

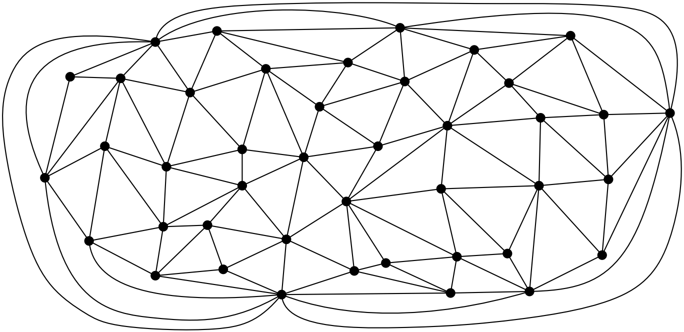


そのようにしたグラフの分離集合は，もとの G の分離集合でもある

- 都合上，$k = \lfloor \sqrt{2|V|} \rfloor$ とする

次の性質を満たす閉路 C を考える
(閉路の内側の頂点集合を $A(C)$，外側の頂点集合を $B(C)$ とする)

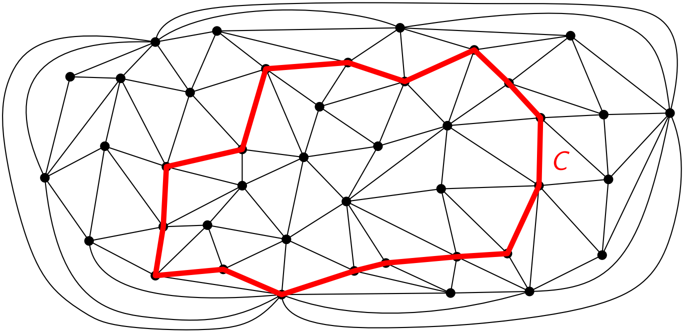
1. $|V(C)| \leq 2k$
2. $|B(C)| < \frac{2}{3}|V|$
3. その 2 つの条件を満たす C の中で，$|A(C)| - |B(C)|$ を最小とする



そのような閉路 C は必ず存在する (なぜ？)

次の性質を満たす閉路 C を考える
(閉路の内側の頂点集合を $A(C)$，外側の頂点集合を $B(C)$ とする)

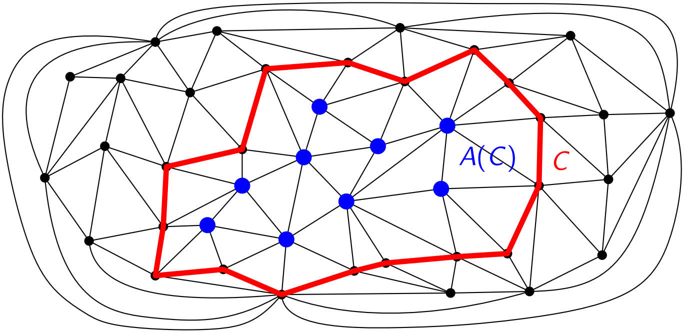
1. $|V(C)| \leq 2k$
2. $|B(C)| < \frac{2}{3}|V|$
3. その 2 つの条件を満たす C の中で，$|A(C)| - |B(C)|$ を最小とする



そのような閉路 C は必ず存在する (なぜ？)

次の性質を満たす閉路 C を考える
(閉路の内側の頂点集合を $A(C)$，外側の頂点集合を $B(C)$ とする)

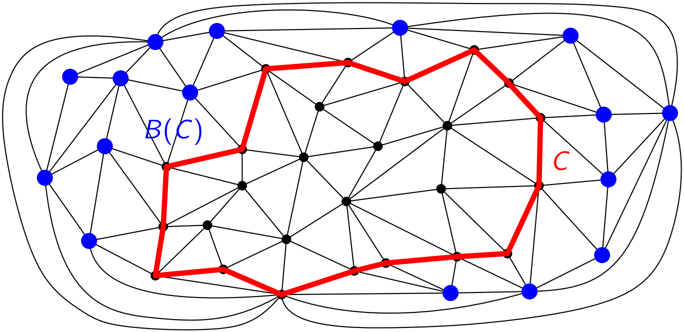
1. $|V(C)| \le 2k$
2. $|B(C)| < \frac{2}{3}|V|$
3. その 2 つの条件を満たす C の中で，$|A(C)| - |B(C)|$ を最小とする



そのような閉路 C は必ず存在する　(なぜ？)

次の性質を満たす閉路 C を考える
(閉路の内側の頂点集合を $A(C)$，外側の頂点集合を $B(C)$ とする)

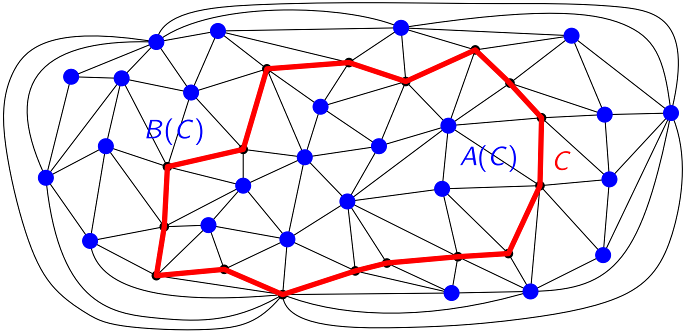
1. $|V(C)| \leq 2k$
2. $|B(C)| < \frac{2}{3}|V|$
3. その 2 つの条件を満たす C の中で，$|A(C)| - |B(C)|$ を最小とする



そのような閉路 C は必ず存在する　(なぜ？)

次の性質を満たす閉路 C を考える
(閉路の内側の頂点集合を $A(C)$，外側の頂点集合を $B(C)$ とする)

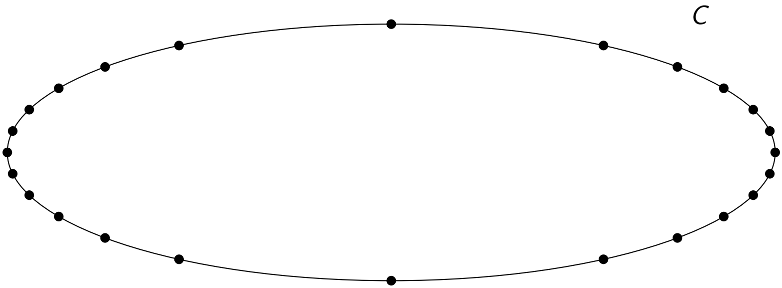
1. $|V(C)| \le 2k$
2. $|B(C)| < \frac{2}{3}|V|$
3. その 2 つの条件を満たす C の中で，$|A(C)| - |B(C)|$ を最小とする



そのような閉路 C は必ず存在する　(なぜ？)

背理法：$|A(C)| \geq \frac{2}{3}|V|$ と仮定する

- $u, v \in V(C)$ に対して，$d(u, v)$ で G における u, v 間の距離を表す
- 同様に，$c(u, v)$ で C における u, v 間の距離を表す



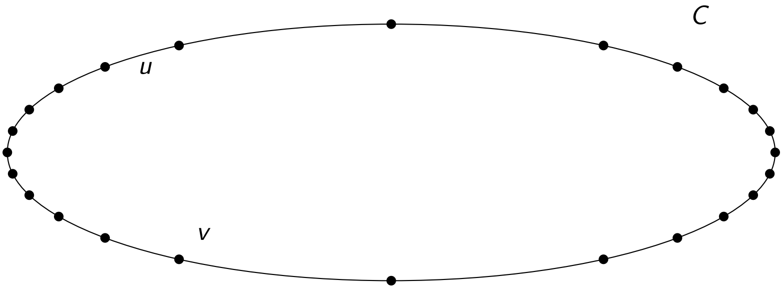
観察 1

任意の $u, v \in V(C)$ に対して，$c(u, v) = d(u, v)$

C は G に含まれるので，$d(u, v) \leq c(u, v)$ はすぐに分かる

背理法：$|A(C)| \geq \frac{2}{3}|V|$ と仮定する

- $u, v \in V(C)$ に対して，$d(u, v)$ で G における u, v 間の距離を表す
- 同様に，$c(u, v)$ で C における u, v 間の距離を表す



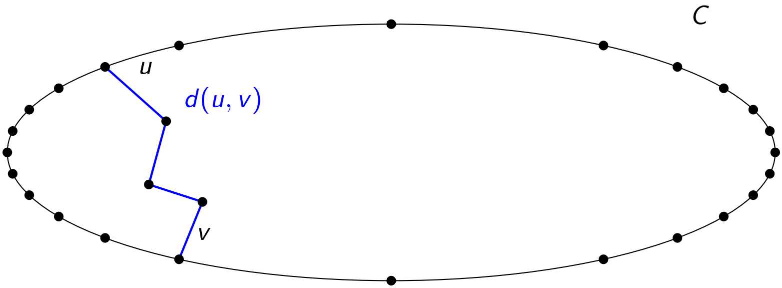
観察 1

任意の $u, v \in V(C)$ に対して，$c(u, v) = d(u, v)$

C は G に含まれるので，$d(u, v) \leq c(u, v)$ はすぐに分かる

背理法：$|A(C)| \geq \frac{2}{3}|V|$ と仮定する

- $u, v \in V(C)$ に対して，$d(u, v)$ で G における u, v 間の距離を表す
- 同様に，$c(u, v)$ で C における u, v 間の距離を表す



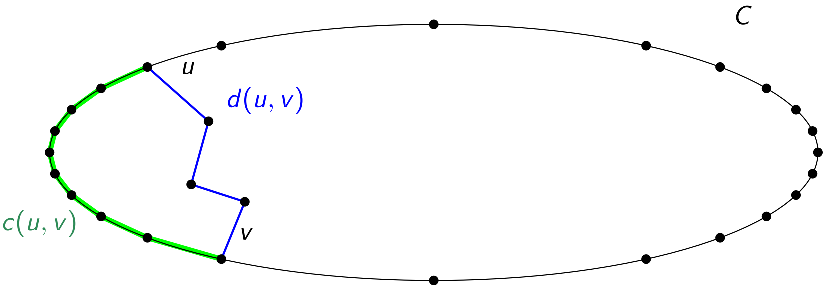
観察 1

任意の $u, v \in V(C)$ に対して，$c(u, v) = d(u, v)$

C は G に含まれるので，$d(u, v) \leq c(u, v)$ はすぐに分かる

背理法：$|A(C)| \geq \frac{2}{3}|V|$ と仮定する

- $u, v \in V(C)$ に対して，$d(u, v)$ で G における u, v 間の距離を表す
- 同様に，$c(u, v)$ で C における u, v 間の距離を表す



観察 1

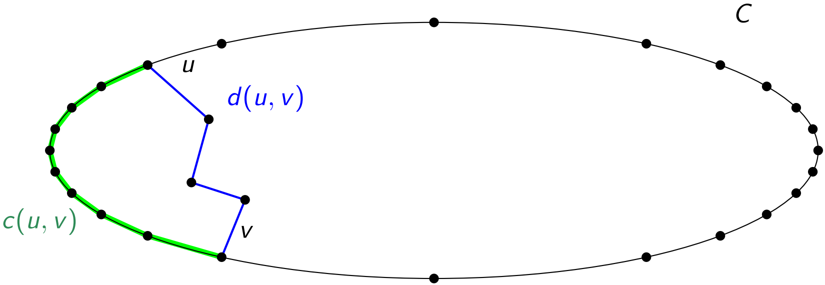
任意の $u, v \in V(C)$ に対して，$c(u, v) = d(u, v)$

C は G に含まれるので，$d(u, v) \leq c(u, v)$ はすぐに分かる

観察 1

任意の $u, v \in V(C)$ に対して，$c(u, v) = d(u, v)$

$d(u, v) < c(u, v)$ を満たす u, v の中で，$d(u, v)$ が最小のものを考える

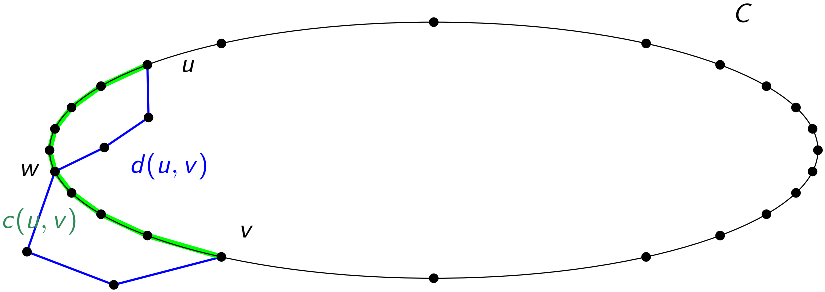


- $d(u, v)$ を達成する道 P は C を通らない　　(なぜ？)

観察 1

任意の $u, v \in V(C)$ に対して，$c(u, v) = d(u, v)$

$d(u, v) < c(u, v)$ を満たす u, v の中で，$d(u, v)$ が最小のものを考える

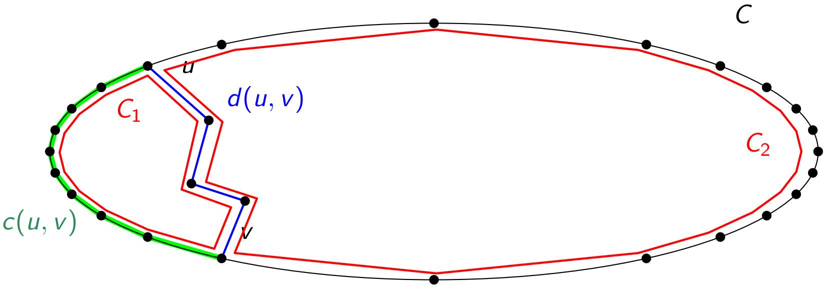


- $d(u, v)$ を達成する道 P は C を通らない　　(なぜ？)

観察 1

任意の $u, v \in V(C)$ に対して，$c(u,v) = d(u,v)$

$C \cup P$ が新たに作る閉路を C_1, C_2 として，$|A(C_1)| \geq |A(C_2)|$ とする



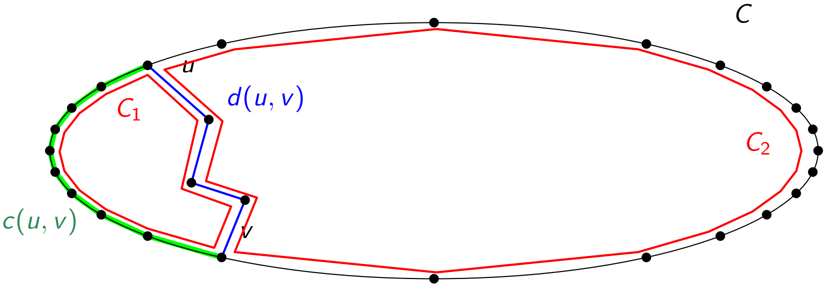
- このとき，$|V(C_1)| > |V(P)| - 2$ と仮定 $|A(C)| \geq \frac{1}{3}|V|$ より，

$$|A(C_1)| + |V(C_1)| > \frac{1}{2}(|A(C_1)| + |A(C_2)| + |V(P)| - 2) = \frac{1}{2}|A(C)| \geq \frac{1}{3}|V|$$

観察 1

任意の $u, v \in V(C)$ に対して，$c(u,v) = d(u,v)$

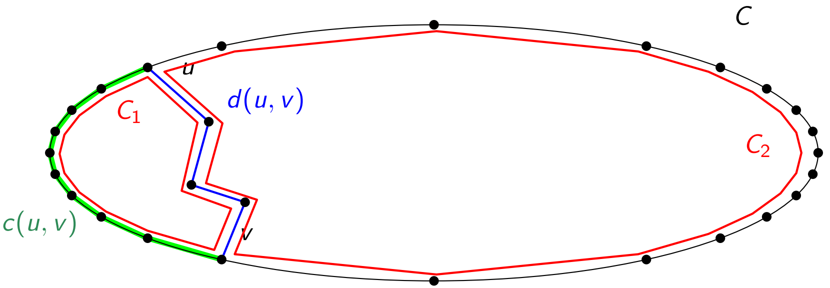
$C \cup P$ が新たに作る閉路を C_1, C_2 として，$|A(C_1)| \geq |A(C_2)|$ とする



- つまり，$|B(C_1)| = |V| - (|A(C_1)| + |V(C_1)|) < \frac{2}{3}|V|$
- また，$d(u,v) < c(u,v)$ なので，$|V(C_1)| < |V(C)| \leq 2k$

観察 1

任意の $u, v \in V(C)$ に対して，$c(u,v) = d(u,v)$

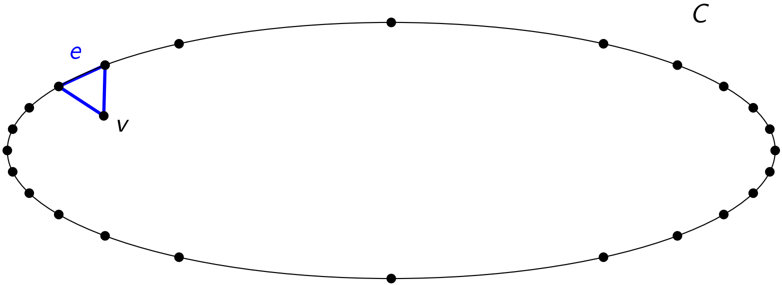


- ゆえに，$|A(C)| - |B(C)| \leq |A(C_1)| - |B(C_1)|$ となり，$|A(C)| > |A(C_1)|$ なので，$|B(C)| > |B(C_1)|$ となる
- これは構成に矛盾 (観察 1 の証明終了)

観察 2

$|V(C)| = 2k$

背理法：$|V(C)| < 2k$ であると仮定する

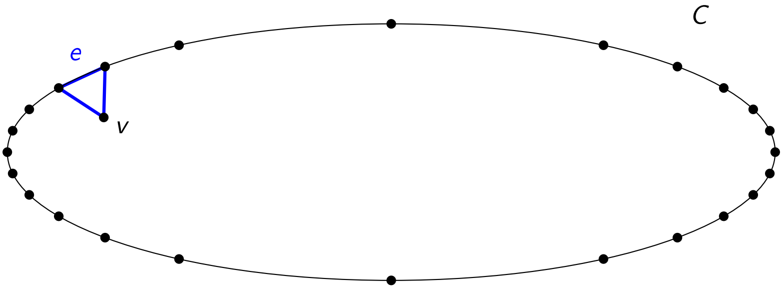


- C の任意の辺 e を選んで，それが C の内部に作る面を考える
- その面の e に接続しない頂点を v とする

観察 2

$|V(C)| = 2k$

背理法：$|V(C)| < 2k$ であると仮定する



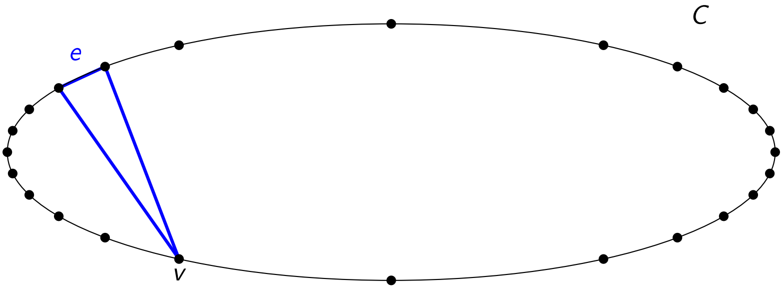
- 観察 1 より，$v \notin V(C)$
- したがって，C の選び方に矛盾

(観察 2 の証明終了)

観察 2

$|V(C)| = 2k$

背理法：$|V(C)| < 2k$ であると仮定する



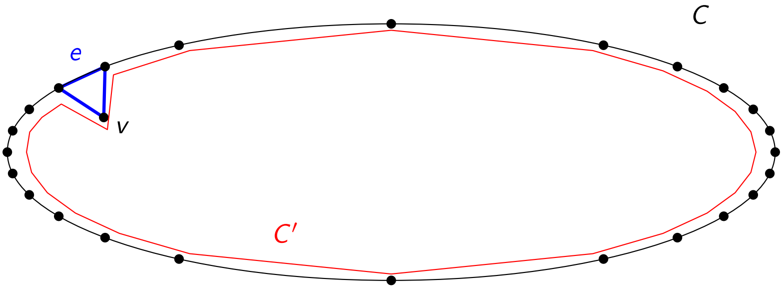
- 観察 1 より，$v \notin V(C)$
- したがって，C の選び方に矛盾

(観察 2 の証明終了)

観察 2

$|V(C)| = 2k$

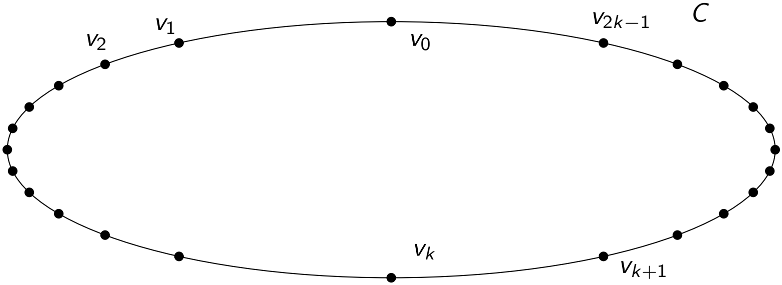
背理法：$|V(C)| < 2k$ であると仮定する



- 観察 1 より，$v \notin V(C)$
- したがって，C の選び方に矛盾

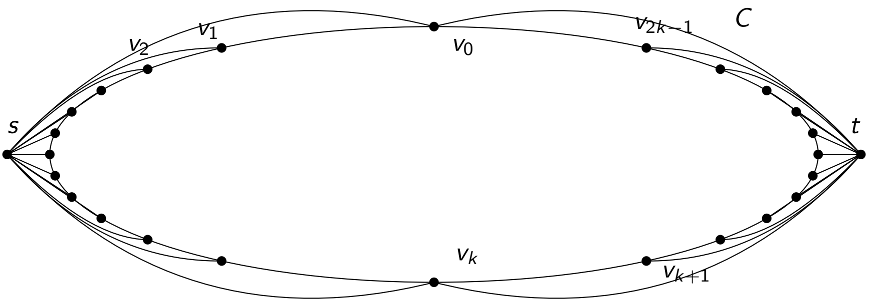
(観察 2 の証明終了)

C の頂点を反時計回り順に $v_0, v_1, \ldots, v_{2k-1}$ とする



- 新たに頂点 s, t を考え，s と $v_0, v_1, \ldots, v_k$ を辺で結び，t と $v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{2k-1}, v_0$ を辺で結ぶ

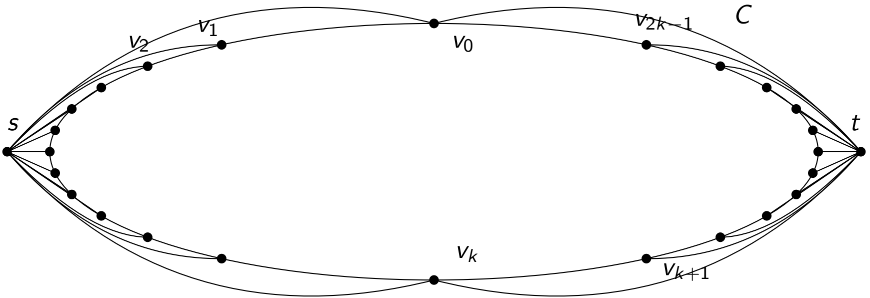
C の頂点を反時計回り順に $v_0, v_1, \ldots, v_{2k-1}$ とする



- 新たに頂点 s, t を考え，s と $v_0, v_1, \ldots, v_k$ を辺で結び，t と $v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{2k-1}, v_0$ を辺で結ぶ

観察 3

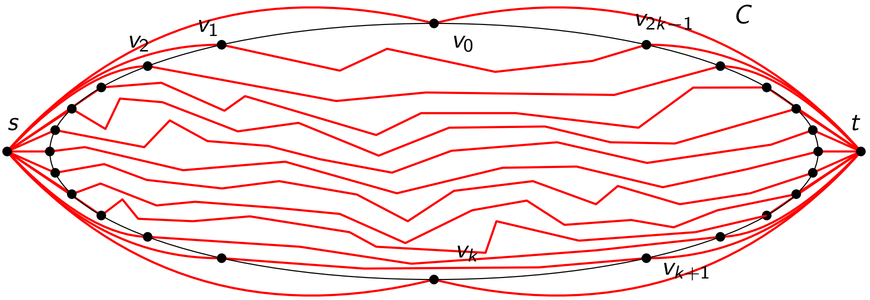
s と t を結ぶ内点素な道が $k+1$ 本存在する



Menger の定理を思い出して，観察 3 を証明する

観察 3

s と t を結ぶ内点素な道が $k+1$ 本存在する

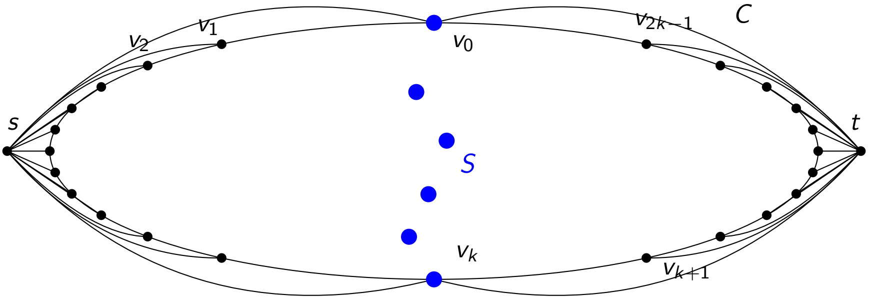


Menger の定理を思い出して，観察 3 を証明する

観察 3

s と t を結ぶ内点素な道が $k+1$ 本存在する

背理法：内点素な道が k 本以下しかないと仮定する

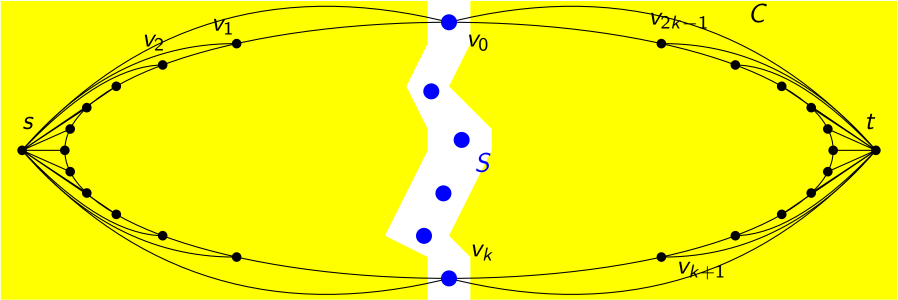


- s と t を分ける頂点集合 S で，要素数 k 以下のものが存在（Menger）
- $v_0, v_k \in S$

観察 3

s と t を結ぶ内点素な道が $k+1$ 本存在する

背理法：内点素な道が k 本以下しかないと仮定する

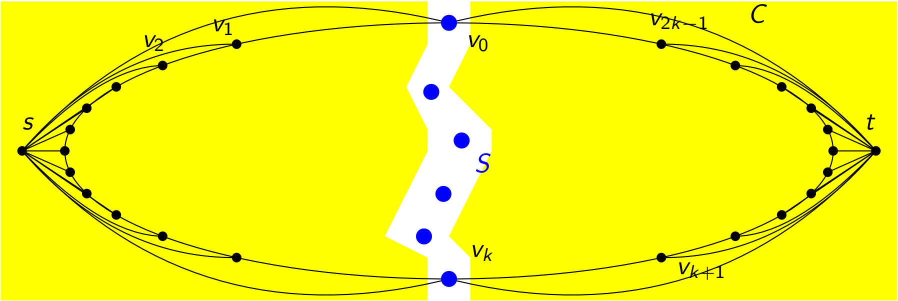


- s と t を分ける頂点集合 S で，要素数 k 以下のものが存在（Menger）
- $v_0, v_k \in S$

観察 3

s と t を結ぶ内点素な道が $k+1$ 本存在する

このとき，S は v_0 と v_k を結ぶ道を構成する　(なぜ？)

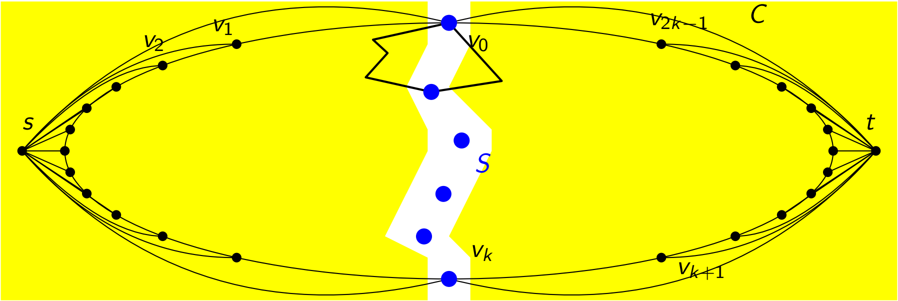


- この道の長さは $k-1$ 以下なので，観察 1 に矛盾 (観察 3 の証明終了)

観察 3

s と t を結ぶ内点素な道が $k+1$ 本存在する

このとき，S は v_0 と v_k を結ぶ道を構成する (なぜ？)

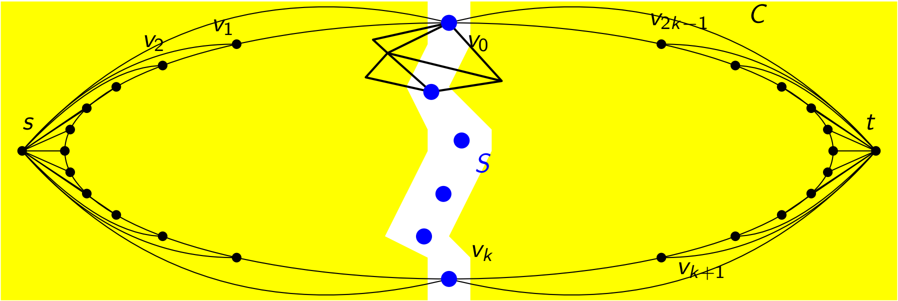


- この道の長さは $k-1$ 以下なので，観察 1 に矛盾 (観察 3 の証明終了)

観察 3

s と t を結ぶ内点素な道が $k+1$ 本存在する

このとき，S は v_0 と v_k を結ぶ道を構成する (なぜ？)

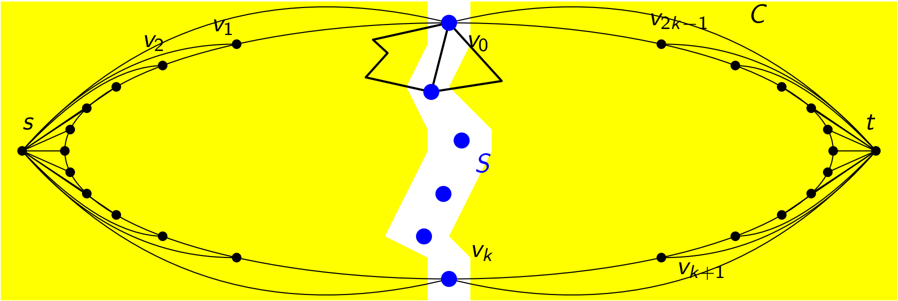


- この道の長さは $k-1$ 以下なので，観察 1 に矛盾 (観察 3 の証明終了)

観察 3

s と t を結ぶ内点素な道が $k+1$ 本存在する

このとき，S は v_0 と v_k を結ぶ道を構成する (なぜ？)

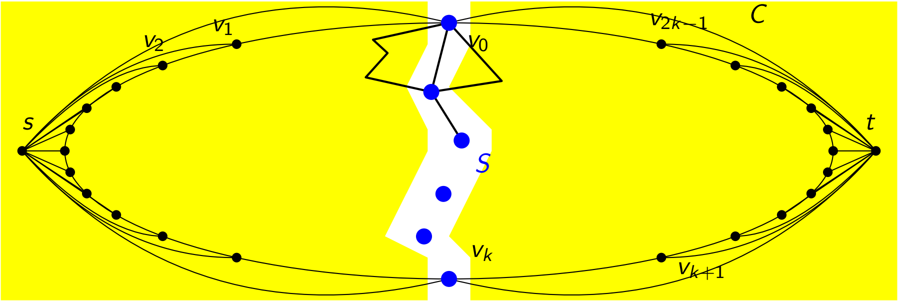


- この道の長さは $k-1$ 以下なので，観察 1 に矛盾 (観察 3 の証明終了)

観察 3

s と t を結ぶ内点素な道が $k+1$ 本存在する

このとき，S は v_0 と v_k を結ぶ道を構成する　　(なぜ？)

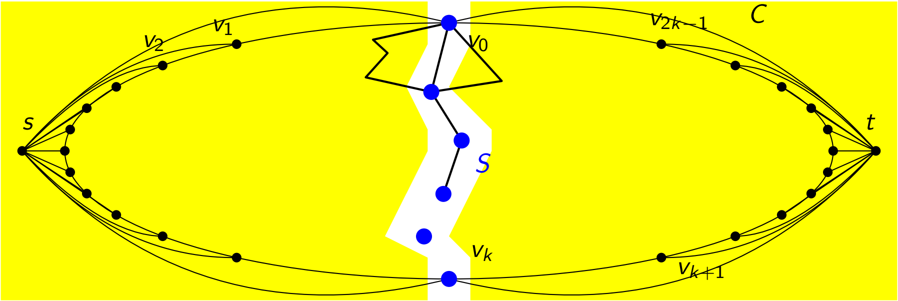


- この道の長さは $k-1$ 以下なので，観察 1 に矛盾 (観察 3 の証明終了)

観察 3

s と t を結ぶ内点素な道が $k+1$ 本存在する

このとき，S は v_0 と v_k を結ぶ道を構成する (なぜ？)

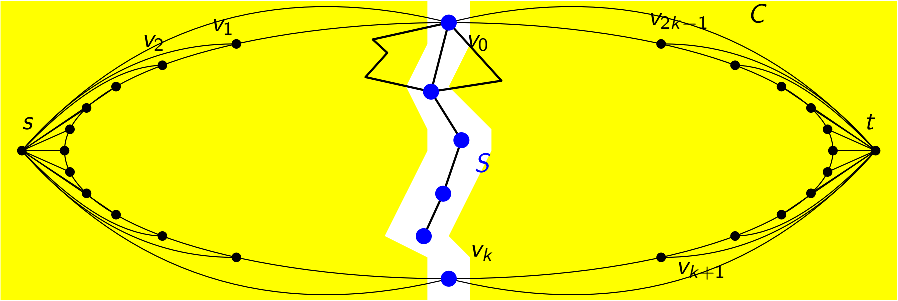


- この道の長さは $k-1$ 以下なので，観察 1 に矛盾 (観察 3 の証明終了)

観察 3

s と t を結ぶ内点素な道が $k+1$ 本存在する

このとき，S は v_0 と v_k を結ぶ道を構成する　　(なぜ？)

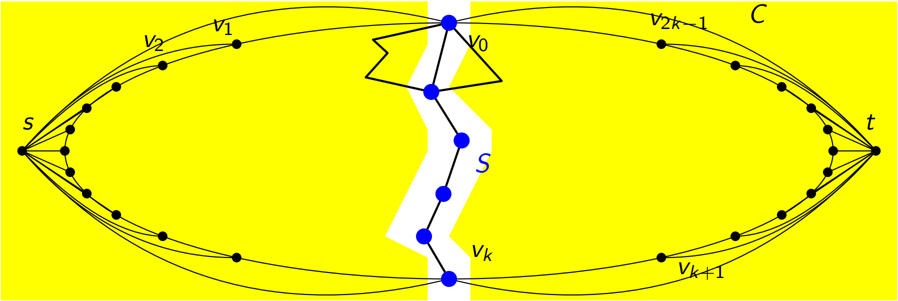


- この道の長さは $k-1$ 以下なので，観察 1 に矛盾 (観察 3 の証明終了)

観察 3

s と t を結ぶ内点素な道が $k+1$ 本存在する

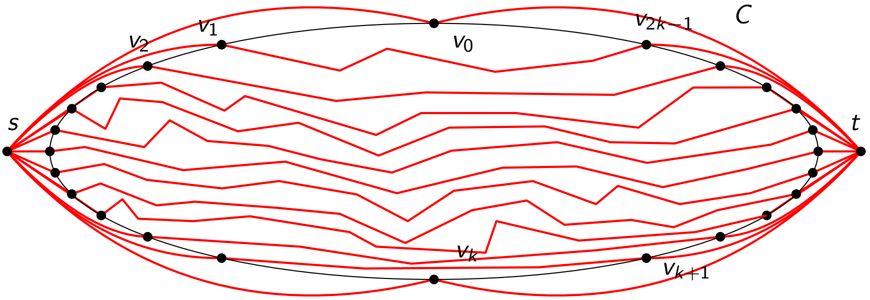
このとき，S は v_0 と v_k を結ぶ道を構成する　(なぜ？)



- この道の長さは $k-1$ 以下なので，観察 1 に矛盾 (観察 3 の証明終了)

点素な道の上にある頂点を数えると

$$|V| \geq \sum_{i=0}^{k} \min\{2i+1, 2(k-i)+1\} \geq \frac{1}{2}(k+1)^2$$



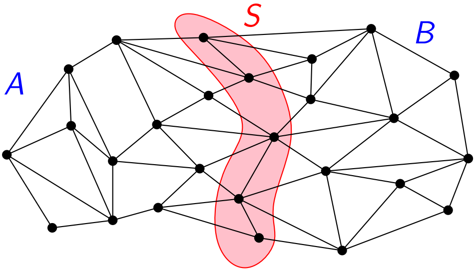
- しかし，$k \leq \sqrt{2|V|}$ より，$|V| > \frac{1}{2}(\sqrt{2|V|})^2 = |V|$ となり矛盾 □

目次

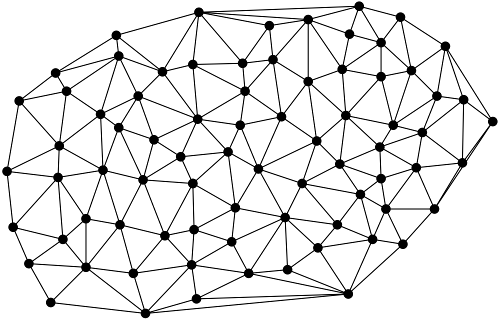
平面的グラフ $G = (V, E)$

平面的分離集合定理 (Lipton, Tarjan '79)

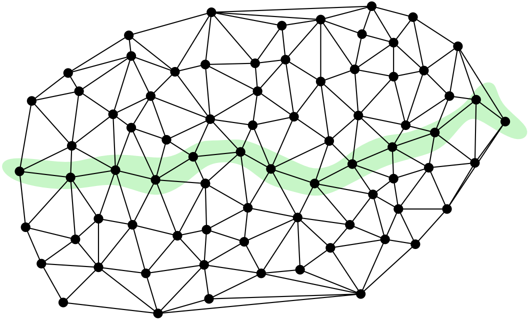
平面的グラフ G には 2/3-分離集合 S で,
$|S| = O(\sqrt{|V|})$ を満たすものが必ず存在する



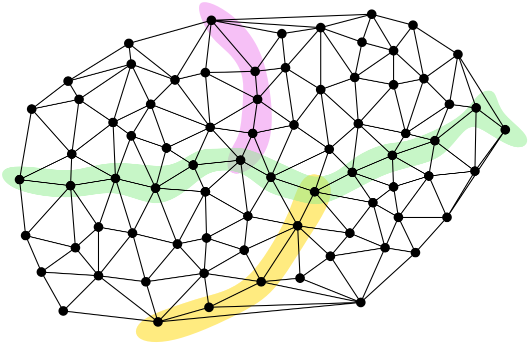
これが成り立つのは，平面的グラフの場合



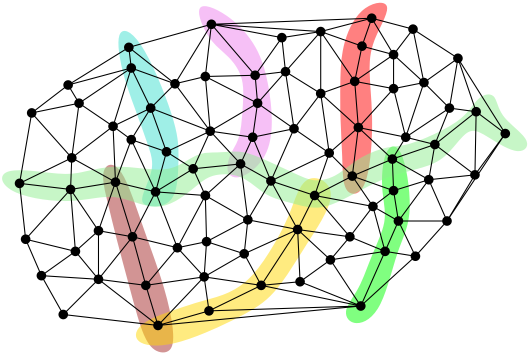
平面的分離集合定理の再帰的適用



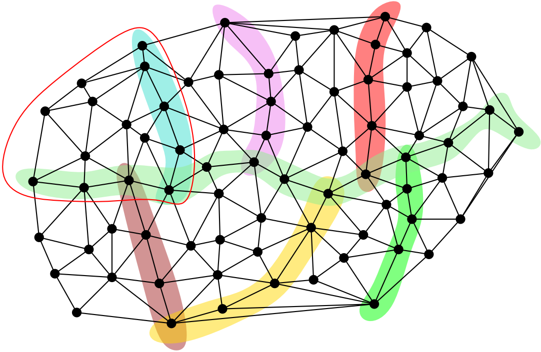
平面的分離集合定理の再帰的適用



平面的分離集合定理の再帰的適用

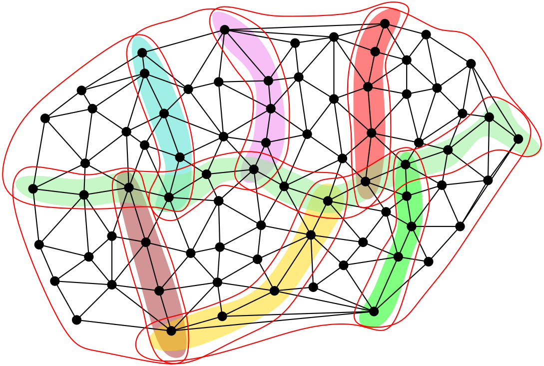


領域 (region) とその境界 (boundary)



領域 $R \subseteq V$ の境界とは,
$V - R$ に隣接頂点を持つ R の頂点の集合

領域 (region) とその境界 (boundary)



領域 $R \subseteq V$ の境界とは，
$V - R$ に隣接頂点を持つ R の頂点の集合

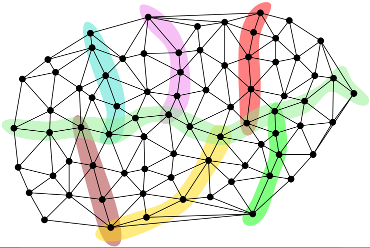
平面的グラフ $G = (V, E)$，自然数 $r \geq 1$

定理 (Frederickson '87)

次のように領域へ分解できる

- 各領域の頂点数 $\leq r$，領域の数 $= O(|V|/r)$
- $b(v)$ で頂点 v が含まれる境界の数を表すと

$$\sum_{v \in V} b(v) = O(|V|/\sqrt{r})$$



次のような手順を考える

1. 頂点数が r 以下ならば停止
2. そうでなければ，G に平面的分離集合定理を適用し，分離集合 S とそれによって分けられた A, B を得る
3. 得られた $A \cup S$ と $B \cup S$ が誘導する部分グラフを新たに G として再帰

頂点数が r 以下ならば即停止をするので，領域の数は $O(|V|/r)$

証明すべきこと

$$\sum_{v \in V} b(v) = O(|V|/\sqrt{r})$$

頂点数 n の平面的グラフ $G = (V, E)$ に対して

$$B(n) = \sum_{v \in V} b(v)$$

とすると，次の再帰式が成り立つ

- $n \le r$ のとき
$$B(n) = 0$$
- $n > r$ のとき

$$B(n) \le 2\sqrt{2n} + \max_{1/3 \le \alpha \le 2/3} \{B(\alpha n + 2\sqrt{2n}) + B((1-\alpha)n + 2\sqrt{2n})\}$$

これを解いて，$B(n) = O(n/\sqrt{r})$ を導けばよい (演習問題) □

幾何的被覆問題に対する近似アルゴリズム

局所探索法 (local search) を利用したもの

- これの準備のために「平面的分離集合定理」を紹介

今回紹介する内容は主に次の論文に基づく

- N. Alon, P. Seymour, and R. Thomas: Planar separators, SIAM Journal on Discrete Mathematics **7** (1994) 184–193.

平面的分離集合定理 (planar separator theorem) 自体は次の論文による

- R. J. Lipton and R. E. Tarjan: A separator theorem for planar graphs, SIAM Journal on Applied Mathematics **36** (1979) 177–189.

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次