離散最適化基礎論　第 8 回
幾何的被覆問題 (2)：シフト法

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 12 月 15 日

最終更新：2017 年 12 月 20 日　16:33

主題

離散最適化のトピックの 1 つとして幾何的被覆問題を取り上げ，
その数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

- 「離散最適化」と「計算幾何学」の接点として重要な役割を果たしているから
- 様々なアルゴリズム設計技法・解析技法を紹介できるから
- 応用が多いから

スケジュール 前半

1. 幾何的被覆問題とは？ (10/6)
- ⋆ 国内出張のため休み (10/13)
2. 最小包囲円問題 (1)：基本的な性質 (10/20)
3. 最小包囲円問題 (2)：乱択アルゴリズム (10/27)
- ⋆ 文化の日のため休み (11/3)
4. クラスタリング (1)：k-センター (11/10)
5. 幾何ハイパーグラフ (1)：VC 次元 (11/17)
- ⋆ 調布祭 のため 休み (11/24)
6. 幾何ハイパーグラフ (2)：ε ネット (12/1)

スケジュール 後半 (予定)

7. 幾何的被覆問題 (1)：線形計画法の利用 (12/8)
8. 幾何的被覆問題 (2)：シフト法 (12/15)
9. 幾何的被覆問題 (3)：局所探索法 (12/22)
10. 幾何的被覆問題 (4)：局所探索法の解析 (1/5)

⋆ センター試験準備 のため 休み (1/12)

11. 幾何ハイパーグラフ (3)：ε ネット定理の証明 (1/19)
12. 幾何アレンジメント (1)：合併複雑度と ε ネット (1/26)
13. 幾何アレンジメント (2)：合併複雑度の例 (2/2)
14. 最近のトピック (2/9)
15. 期末試験 (2/16？)

注意：予定の変更もありうる

今日の内容

幾何的被覆問題に対する近似アルゴリズム

シフト法 (shifting strategy) を利用したもの

- 重要な観点：体積論法 (volume argument)

今回紹介する内容は次の論文に基づく

- D. Hochbaum and W. Maass: Approximation Schemes for Covering and Packing Problems in Image Processing and VLSI. Journal of the Association for Computing Machinery 32 (1985) 130–136.

これは，次の論文の技法を幾何の問題に適用したもの

- B.S. Baker: Approximation Algorithms for NP-Complete Problems on Planar Graphs. Journal of the Association for Computing Machinery 41 (1994) 153–180.

この講義では，いくつかの技法を見る (予定である)

- 離散型単位円被覆問題：多項式時間 $O(1)$ 近似アルゴリズム

  (Brönnimann, Goodrich '95)

  ⇝ アルゴリズム：線形計画法の利用
  利点：他の図形にも広く応用可能
- 連続型単位円被覆問題：多項式時間 $1+\varepsilon$ 近似アルゴリズム

  (Hochbaum, Maass '85)

  ⇝ アルゴリズム：シフト法
  利点：他の問題にも広く応用可能
- 離散型単位円被覆問題：多項式時間 $1+\varepsilon$ 近似アルゴリズム

  (Mustafa, Ray '10)

  ⇝ アルゴリズム：局所探索法
  利点：単純

その他にも関連する話題に触れる

離散型単位円被覆問題 (discrete unit disk cover problem)

入力

- 平面上の点集合 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$
- 平面上の単位円の集合 $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$

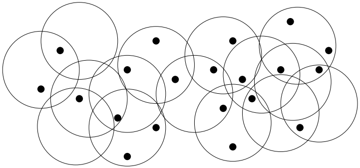
出力

- 単位円の集合 $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ で次を満たすもの ($\mathcal{D}'$ が P を被覆する)

  任意の $p \in P$ に対して，ある $D \in \mathcal{D}'$ が存在して，$p \in D$

目的

- $|\mathcal{D}'|$ の最小化



連続型単位円被覆問題 (continuous unit disk cover problem)

入力

- 平面上の点集合 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$

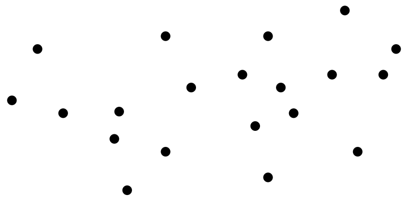
出力

- 単位円の集合 $\mathcal{D}'$ で次を満たすもの ($\mathcal{D}'$ が P を被覆する)

$$\text{任意の } p \in P \text{ に対して，ある } D \in \mathcal{D}' \text{ が存在して，} p \in D$$

目的

- $|\mathcal{D}'|$ の最小化



連続型単位円被覆問題 (continuous unit disk cover problem)

$\boxed{\text{入力}}$

- 平面上の点集合 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$

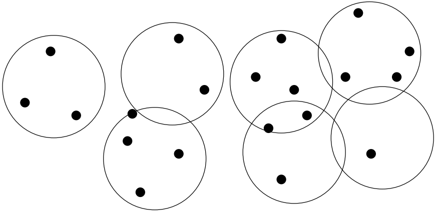
$\boxed{\text{出力}}$

- 単位円の集合 $\mathcal{D}'$ で次を満たすもの ($\mathcal{D}'$ が P を被覆する)

$$\text{任意の } p \in P \text{ に対して，ある } D \in \mathcal{D}' \text{ が存在して，} p \in D$$

$\boxed{\text{目的}}$

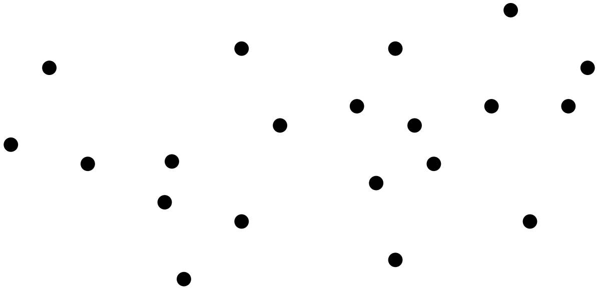
- $|\mathcal{D}'|$ の最小化



連続型単位円被覆問題 (continuous unit disk cover problem)

入力

- 平面上の点集合 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$

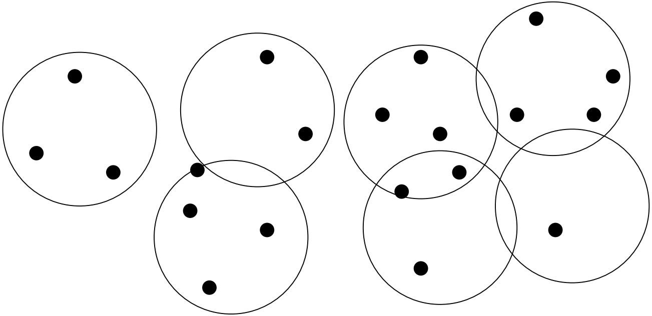


連続型単位円被覆問題を離散型単位円覆問題と見なす

連続型単位円被覆問題 (continuous unit disk cover problem)

入力

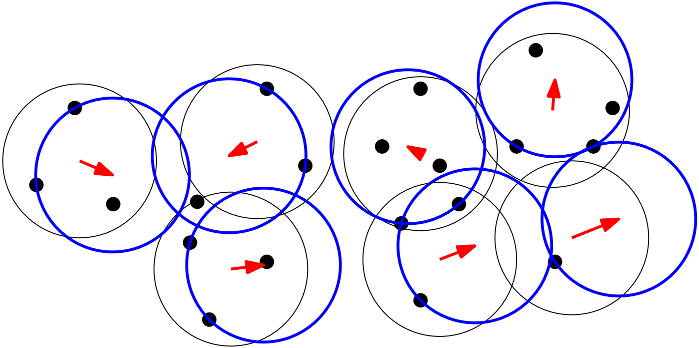
- 平面上の点集合 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$



連続型単位円被覆問題 (continuous unit disk cover problem)

入力

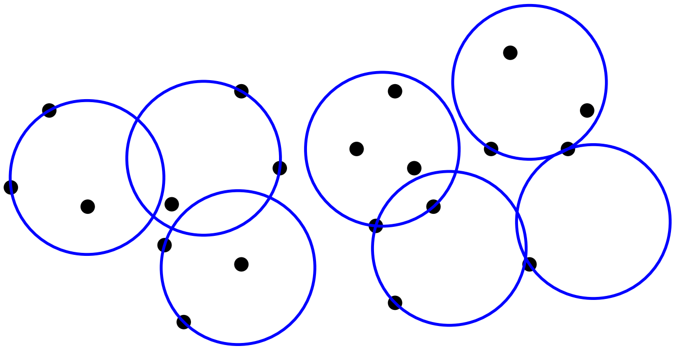
- 平面上の点集合 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$



連続型単位円被覆問題 (continuous unit disk cover problem)

入力

- 平面上の点集合 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$



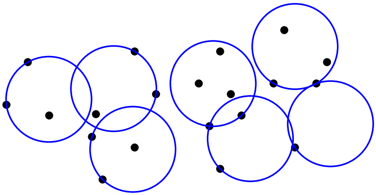
連続型単位円被覆問題 (continuous unit disk cover problem)

入力

- 平面上の点集合 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$

- このとき，単位円の集合 $\mathcal{D}$ として，次を考える

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D} &= \{D \mid D \text{ は } P \text{ の 2 点を通る単位円 }\} \cup \\
&\quad \{D \mid D \text{ は } P \text{ の点を中心とする単位円 }\}
\end{aligned}
$$



連続型単位円被覆問題 (continuous unit disk cover problem)

入力

- 平面上の点集合 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$

- このとき，単位円の集合 $\mathcal{D}$ として，次を考える

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \{D \mid D \text{ は } P \text{ の 2 点を通る単位円}\} \cup \\ &\quad \{D \mid D \text{ は } P \text{ の点を中心とする単位円}\}\end{aligned}$$

- すると，

P を入力とする 連続型単位円被覆問題の 最適値	$=$	$P, \mathcal{D}$ を入力とする 離散型単位円被覆問題の 最適値

- また，$|\mathcal{D}| = O(n^2)$
- つまり，離散型が効率よく解ければ，連続型も効率よく解ける

今日の目標

連続型単位円被覆問題に対する近似アルゴリズム設計

- シフト法を用いる

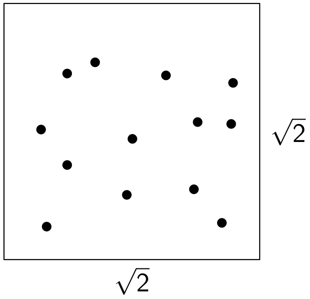
補足

- この手法は他の問題にも適用可能

目次

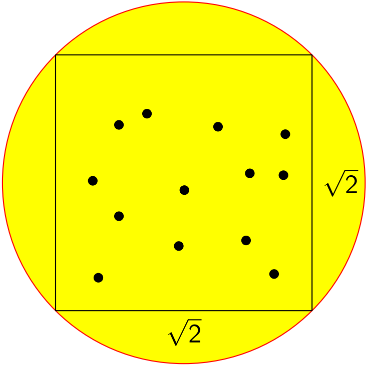
例題 1

連続型単位円被覆問題において，
入力される n 個の点が辺長 $\sqrt{2}$ の正方形に収まっているとき
最適値は？



例題 1

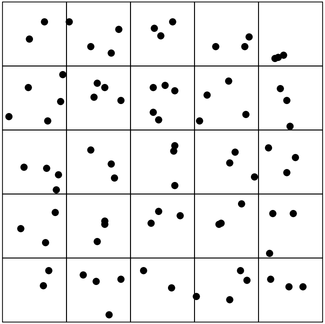
連続型単位円被覆問題において，
入力される n 個の点が辺長 $\sqrt{2}$ の正方形に収まっているとき
最適値は？



$\rightsquigarrow$ 最適値 $= 1$

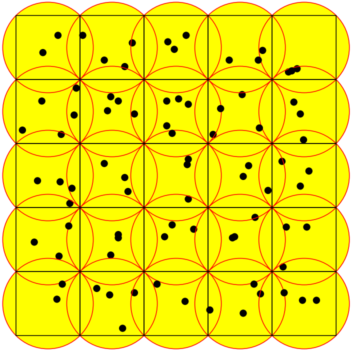
例題 2

連続型単位円被覆問題において，
入力される n 個の点が辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形に収まっているとき
最適値は？



例題 2

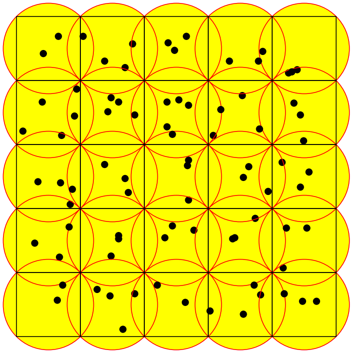
連続型単位円被覆問題において，
入力される n 個の点が辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形に収まっているとき
最適値は？



$\rightsquigarrow$ 最適値 $= k^2$

例題 2

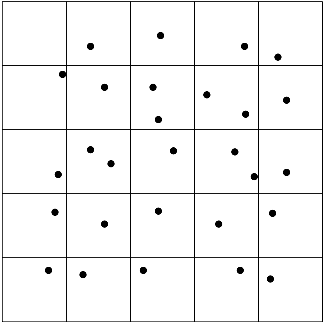
連続型単位円被覆問題において，
入力される n 個の点が辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形に収まっているとき
最適値は？



$\rightsquigarrow$ 最適値 $= k^2$???

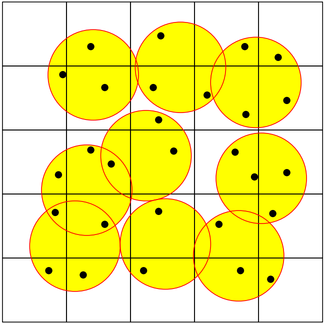
例題 2

連続型単位円被覆問題において，
入力される n 個の点が辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形に収まっているとき
最適値は？



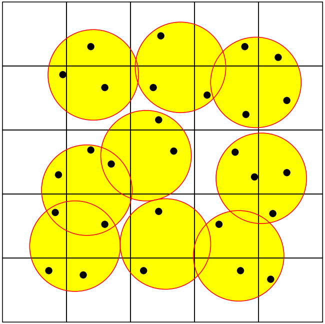
例題 2

連続型単位円被覆問題において，
入力される n 個の点が辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形に収まっているとき
最適値は？



例題 2

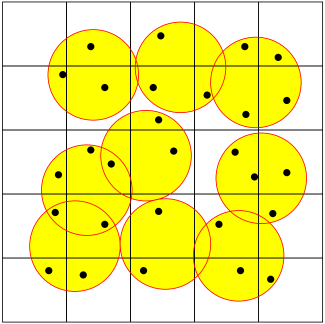
連続型単位円被覆問題において，
入力される n 個の点が辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形に収まっているとき
最適値は？



$\rightsquigarrow$ 最適値 $\leq k^2$

例題 2

連続型単位円被覆問題において，
入力される n 個の点が辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形に収まっているとき
最適値は？



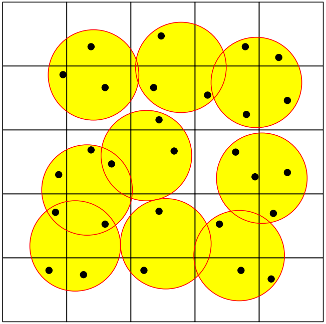
$\rightsquigarrow$ 最適値 $\leq k^2$

質問

どう解くか？

例題 2：アルゴリズム

連続型単位円被覆問題において，
入力される n 個の点が辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形に収まっているとき
どう解くか？



- 離散型単位円被覆問題に変換
- 考える単位円の数 $= O(n^2)$
- 最適解の候補の総数
$$= \sum_{i=0}^{k^2} \binom{O(n^2)}{i} \leq O(3^{k^2} n^{2k^2})$$
- その各候補が被覆であるか調べる
($O(nk^2)$ 時間)

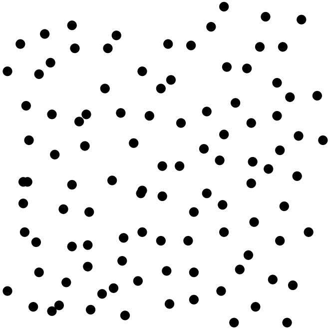
$\rightsquigarrow$ $O(n^{2k^2+1} 3^{k^2} k^2)$ 時間で厳密に解ける

目次

基本アイディア 1

平面を辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形に分割する

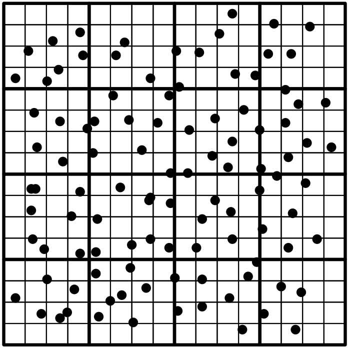
分割された正方形ごとに問題を最適に解いて，組み合わせる



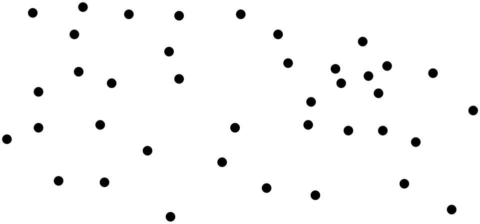
基本アイディア 1

平面を辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形に分割する

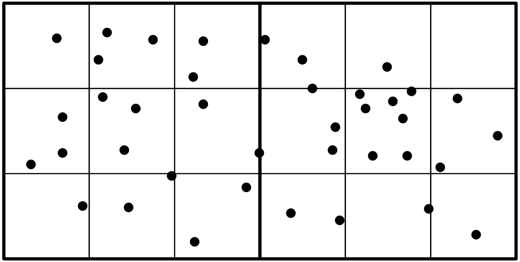
分割された正方形ごとに問題を最適に解いて，組み合わせる



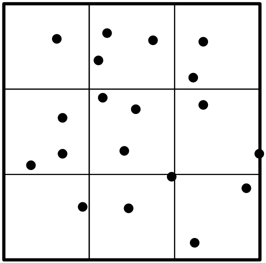
例：$k = 3$ の場合

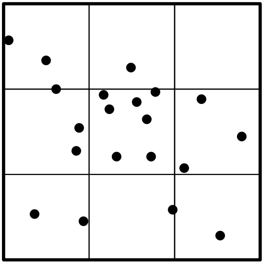


例：$k = 3$ の場合

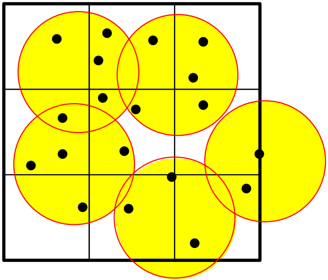


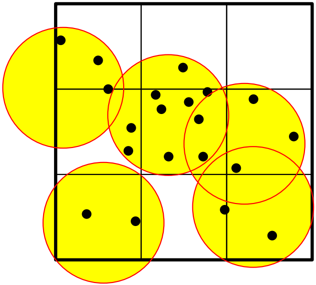
例：$k = 3$ の場合



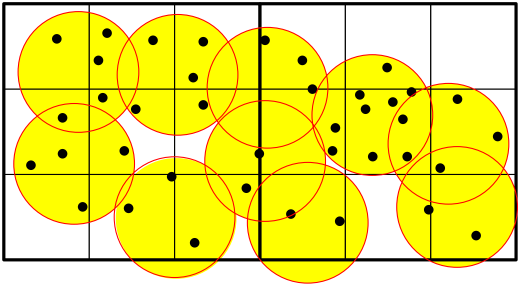


例：$k = 3$ の場合



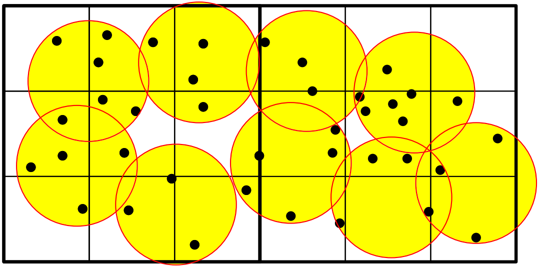


例：$k = 3$ の場合



アルゴリズムの出力値 $= 10$

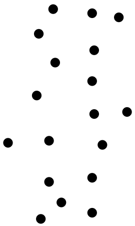
例：$k = 3$ の場合



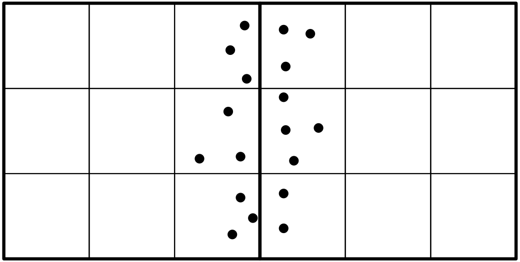
アルゴリズムの出力値 $= 10$

最適値 ≤ 9

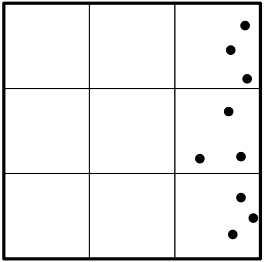
近似比がとても悪くなる可能性がある

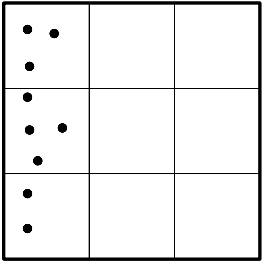


近似比がとても悪くなる可能性がある

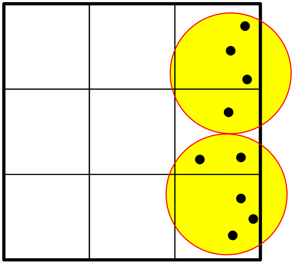


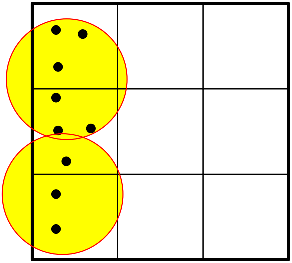
近似比がとても悪くなる可能性がある



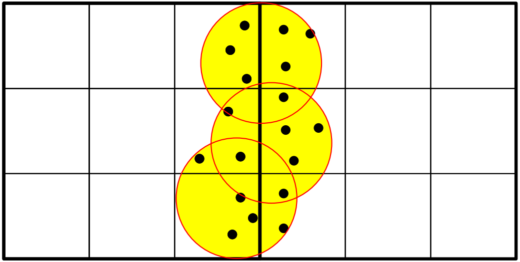


近似比がとても悪くなる可能性がある



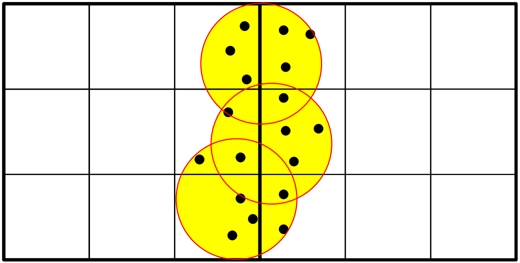


近似比がとても悪くなる可能性がある



アルゴリズムの出力値 $= 4$

近似比がとても悪くなる可能性がある



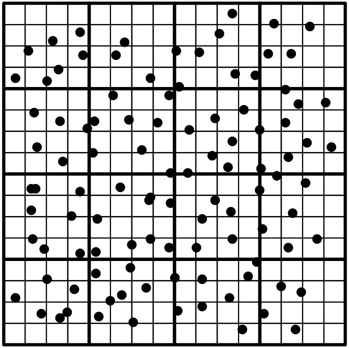
アルゴリズムの出力値 $= 4$

最適値 ≤ 3

基本アイディア 2

辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形の取り方をずらす (シフトする)

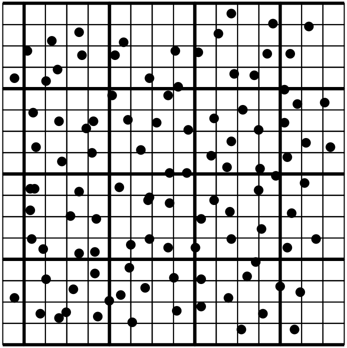
すべてのずらし方を考える



基本アイディア 2

辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形の取り方をずらす (シフトする)

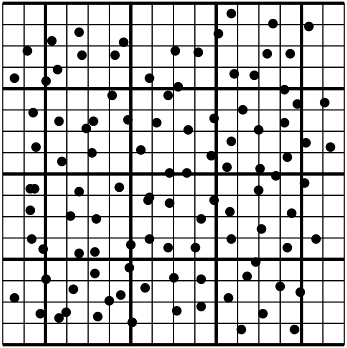
すべてのずらし方を考える



基本アイディア 2

辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形の取り方をずらす (シフトする)

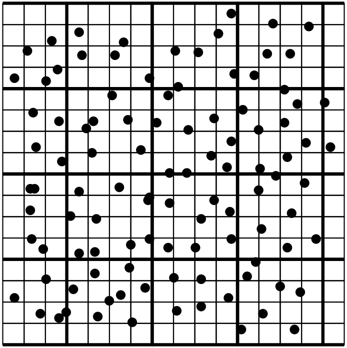
すべてのずらし方を考える



基本アイディア 2

辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形の取り方をずらす (シフトする)

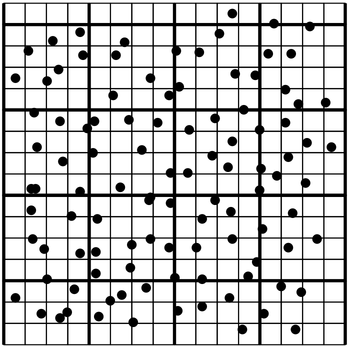
すべてのずらし方を考える



基本アイディア 2

辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形の取り方をずらす (シフトする)

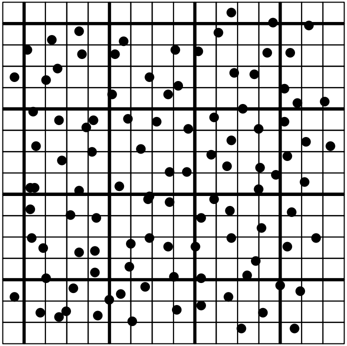
すべてのずらし方を考える



基本アイディア 2

辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形の取り方をずらす (シフトする)

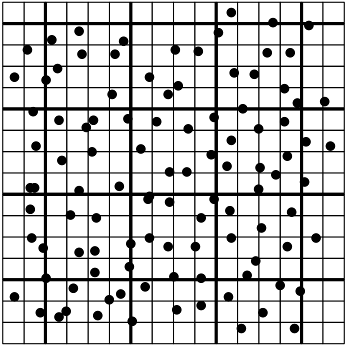
すべてのずらし方を考える



基本アイディア 2

辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形の取り方をずらす (シフトする)

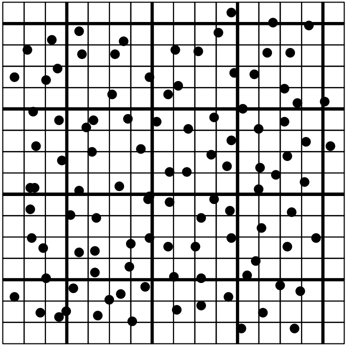
すべてのずらし方を考える



基本アイディア 2

辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形の取り方をずらす (シフトする)

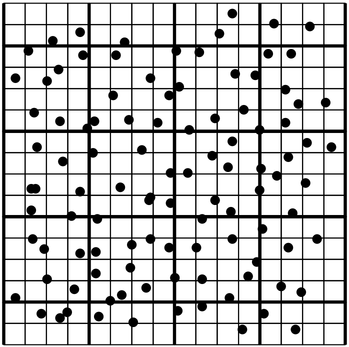
すべてのずらし方を考える



基本アイディア 2

辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形の取り方をずらす (シフトする)

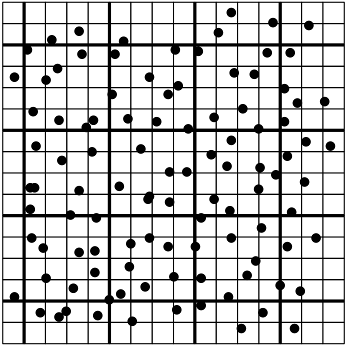
すべてのずらし方を考える



基本アイディア 2

辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形の取り方をずらす (シフトする)

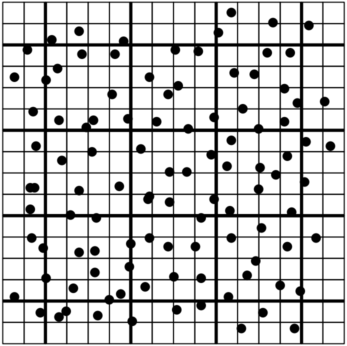
すべてのずらし方を考える



基本アイディア 2

辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形の取り方をずらす (シフトする)

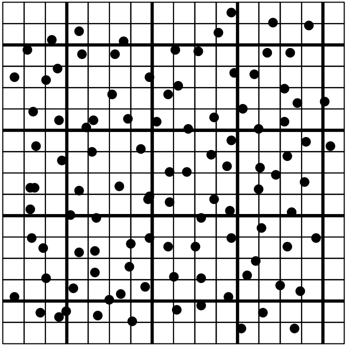
すべてのずらし方を考える



基本アイディア 2

辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形の取り方をずらす (シフトする)

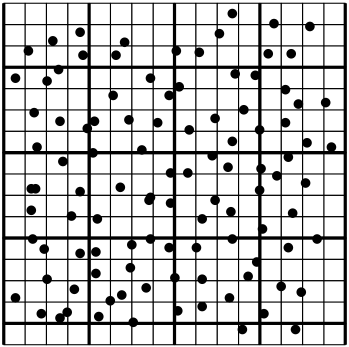
すべてのずらし方を考える



基本アイディア 2

辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形の取り方をずらす (シフトする)

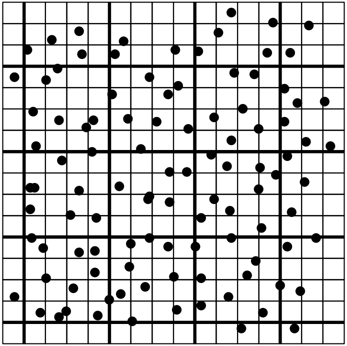
すべてのずらし方を考える



基本アイディア 2

辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形の取り方をずらす (シフトする)

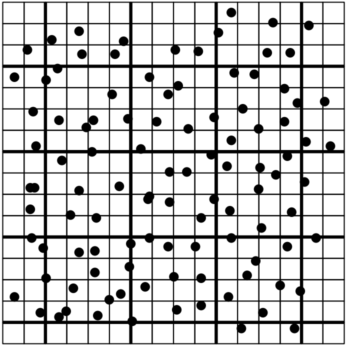
すべてのずらし方を考える



基本アイディア 2

辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形の取り方をずらす (シフトする)

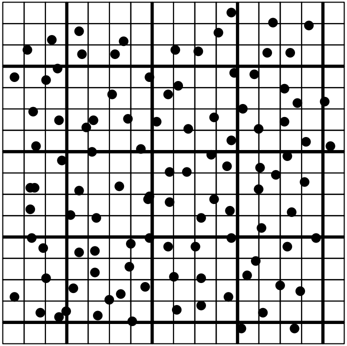
すべてのずらし方を考える



基本アイディア 2

辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形の取り方をずらす (シフトする)

すべてのずらし方を考える

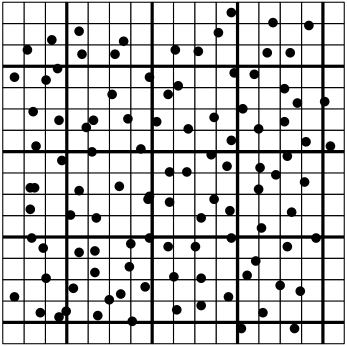


基本アイディア 2

辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形の取り方をずらす (シフトする)

すべてのずらし方を考える

$\rightsquigarrow$ すべてのずらし方で基本アイディア 1 を実行



連続型単位円被覆問題に対するシフト法

k をうまく定める (後述)

1. 平面に辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形を敷き詰める
2. 各 $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ と各 $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ に対して，以下を実行
   1. 敷き詰めに用いた正方形をすべて $(\sqrt{2}i, \sqrt{2}j)$ だけ平行移動させる
   2. 各正方形の中で，連続型単位円被覆問題を最適に解く
   3. 上で得られた解の合併を，全体に対する解の候補とする
3. k^2 個の解の候補の中で，最もよいものを出力する

正方形の数 $\leq n$ (入力された点の数)

連続型単位円被覆問題に対するシフト法

k をうまく定める (後述)

1. 平面に辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形を敷き詰める
2. 各 $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ と各 $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ に対して，以下を実行
   1. 敷き詰めに用いた正方形をすべて $(\sqrt{2}i, \sqrt{2}j)$ だけ平行移動させる
   2. 各正方形の中で，連続型単位円被覆問題を最適に解く
   3. 上で得られた解の合併を，全体に対する解の候補とする
3. k^2 個の解の候補の中で，最もよいものを出力する

計算量

- ステップ 2 は k^2 回反復される
- 各反復の計算量は $O(n) \times O(n^{2k^2+1} 3^{k^2} k^2)$

$\rightsquigarrow$ 全体で $O(n^{2k^2+2} 3^{k^2} k^4)$ 時間　　k が定数ならば，これは多項式時間

設定

- $\mathrm{ALG}_{i,j}$ ：(i,j) だけずらしたとき，アルゴリズムが出力する解
- $\mathrm{ALG}_{i,j}(S)$：正方形 S の中の点を最適に覆うものの集合
- OPT ：最適解
- $\mathrm{OPT}(S)$ ：OPT の中で正方形 S の中の点を覆うものの集合

解析

- 辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形 S の中でアルゴリズムは最適に解いているので，

$$|\mathrm{ALG}_{i,j}(S)| \leq |\mathrm{OPT}(S)|$$

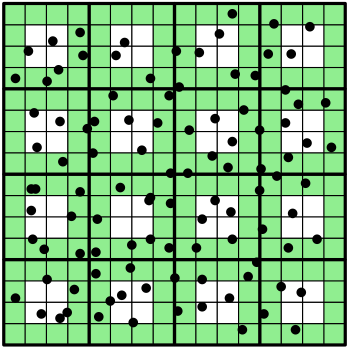
- つまり，

$$|\mathrm{ALG}_{i,j}| = \sum_{S} |\mathrm{ALG}_{i,j}(S)| \leq \sum_{S} |\mathrm{OPT}(S)|$$

解析 (続)

- $\sum_S |\mathrm{OPT}(S)|$ において，次の緑部に中心を持つ円は高々2 回現れ，
  k^2 通りのずらし方の中で，小さな正方形が高々$4k$ 回緑になるので，

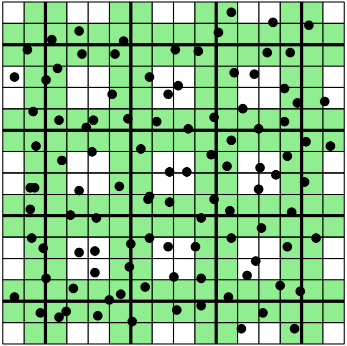
$$\sum_{i,j} \sum_S |\mathrm{OPT}(S)| \leq (k^2 + 4k)|\mathrm{OPT}|$$



解析 (続)

- $\sum_S |\mathrm{OPT}(S)|$ において，次の緑部に中心を持つ円は高々2 回現れ，k^2 通りのずらし方の中で，小さな正方形が高々$4k$ 回緑になるので，

$$\sum_{i,j} \sum_S |\mathrm{OPT}(S)| \leq (k^2 + 4k)|\mathrm{OPT}|$$



解析 (続 2)

- したがって，

$$
\begin{aligned}
\min_{i,j} |\mathrm{ALG}_{i,j}| &\leq \frac{1}{k^2}\sum_{i,j}|\mathrm{ALG}_{i,j}| = \frac{1}{k^2}\sum_{i,j}\sum_{S}|\mathrm{ALG}_{i,j}(S)| \\
&\leq \frac{1}{k^2}\sum_{i,j}\sum_{S}|\mathrm{OPT}(S)| \\
&\leq \frac{k^2+4k}{k^2}|\mathrm{OPT}| \\
&= \left(1+\frac{4}{k}\right)|\mathrm{OPT}| \\
&\leq (1+\varepsilon)|\mathrm{OPT}| \qquad (k = \lceil 4/\varepsilon \rceil \text{ とする})
\end{aligned}
$$

つまり，$k = \lceil 4/\varepsilon \rceil$ とすれば，近似比は $1+\varepsilon$

連続型単位円被覆問題に対するシフト法

$k = \lceil 4/\varepsilon \rceil$ とする

1. 平面に辺長 $\sqrt{2}k$ の正方形を敷き詰める
2. 各 $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ と各 $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ に対して，以下を実行
   1. 敷き詰めに用いた正方形をすべて $(\sqrt{2}i, \sqrt{2}j)$ だけ平行移動させる
   2. 各正方形の中で，連続型単位円被覆問題を最適に解く
   3. 上で得られた解の合併を，全体に対する解の候補とする
3. k^2 個の解の候補の中で，最もよいものを出力する

まとめ

ε が定数ならば，これは多項式時間 $(1+\varepsilon)$ 近似アルゴリズムである

目次

幾何的被覆問題に対する近似アルゴリズム

シフト法 (shifting strategy) を利用したもの

- 重要な観点：体積論法 (volume argument)

今回紹介する内容は次の論文に基づく

- D. Hochbaum and W. Maass: Approximation Schemes for Covering and Packing Problems in Image Processing and VLSI. Journal of the Association for Computing Machinery 32 (1985) 130–136.

これは，次の論文の技法を幾何の問題に適用したもの

- B.S. Baker: Approximation Algorithms for NP-Complete Problems on Planar Graphs. Journal of the Association for Computing Machinery 41 (1994) 153–180.

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次