離散最適化基礎論　第 7 回
幾何的被覆問題 (1)：線形計画法の利用

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 12 月 8 日

最終更新：2017 年 12 月 15 日　13:07

概要

主題

離散最適化のトピックの１つとして幾何的被覆問題を取り上げ,
その数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

- 「離散最適化」と「計算幾何学」の接点として重要な役割を果たしているから
- 様々なアルゴリズム設計技法・解析技法を紹介できるから
- 応用が多いから

スケジュール 前半 (予定)

1. 幾何的被覆問題とは？ (10/6)
- ⋆ 国内出張のため休み (10/13)
2. 最小包囲円問題 (1)：基本的な性質 (10/20)
3. 最小包囲円問題 (2)：乱択アルゴリズム (10/27)
- ⋆ 文化の日のため休み (11/3)
4. クラスタリング (1)：k-センター (11/10)
5. 幾何ハイパーグラフ (1)：VC 次元 (11/17)
- ⋆ 調布祭 のため 休み (11/24)
6. 幾何ハイパーグラフ (2)：ε ネット (12/1)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

7. 幾何的被覆問題 (1)：線形計画法の利用 (12/8)
8. 幾何的被覆問題 (2)：シフト法 (12/15)
9. 幾何的被覆問題 (3)：局所探索法 (12/22)
10. 幾何的被覆問題 (4)：局所探索法の解析 (1/5)

⋆ センター試験準備 のため 休み (1/12)

11. 幾何ハイパーグラフ (3)：ε ネット定理の証明 (1/19)
12. 幾何アレンジメント (1)：合併複雑度と ε ネット (1/26)
13. 幾何アレンジメント (2)：合併複雑度の例 (2/2)
14. 最近のトピック (2/9)
15. 期末試験 (2/16？)

注意：予定の変更もありうる

幾何的被覆問題に対する近似アルゴリズム

線形計画法を利用したもの

- 整数計画法と線形計画法
- ε ネットによる丸め

今回紹介する内容は次の論文に基づく

- G. Even, D. Rawitz, S. Shahar: Hitting sets with the VC-dimension is small. Information Processing Letters 95 (2005) 358–362.

これは，次の論文を線形計画法を利用して解釈したもの (と考えられている)

- Hervé Brönnimann, Michael T. Goodrich: Almost optimal set covers in finite VC-dimension. Discrete & Computational Geometry 14 (1995) 463–479.

この講義では，いくつかの技法を見る (予定である)

- $\boxed{\text{離散型単位円被覆問題：多項式時間 } O(1) \text{ 近似アルゴリズム}}$

  (Brönnimann, Goodrich '95)

  $\rightsquigarrow$ アルゴリズム：線形計画法の利用
  利点：他の図形にも広く応用可能

- $\boxed{\text{連続型単位円被覆問題：多項式時間 } 1+\varepsilon \text{ 近似アルゴリズム}}$

  (Hochbaum, Maass '85)

  $\rightsquigarrow$ アルゴリズム：シフト法
  利点：他の問題にも広く応用可能

- $\boxed{\text{離散型単位円被覆問題：多項式時間 } 1+\varepsilon \text{ 近似アルゴリズム}}$

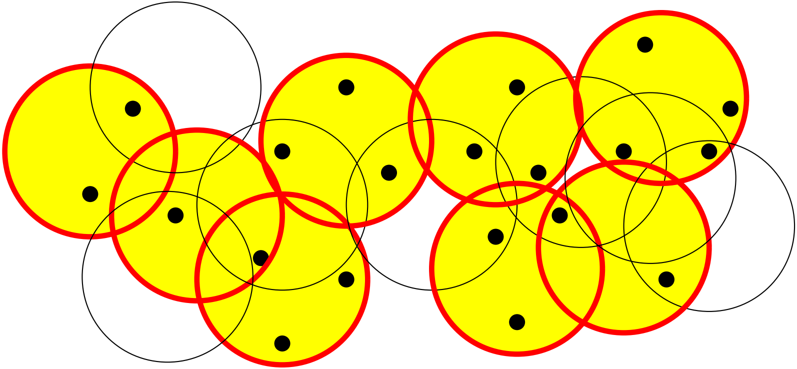
  (Mustafa, Ray '10)

  $\rightsquigarrow$ アルゴリズム：局所探索法
  利点：単純

その他にも関連する話題に触れる

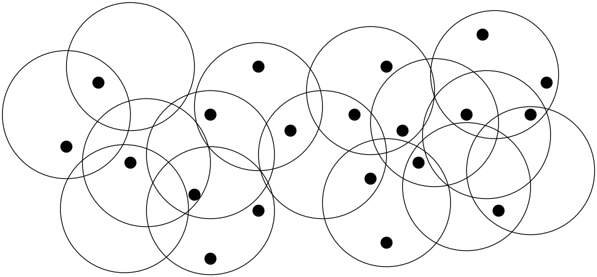
離散型単位円被覆問題 (discrete unit disk cover problem)

平面上にいくつかの点といくつかの単位円が与えられたとき
単位円を選んで，点をすべて覆いたい
選ばれる単位円の数を最も少なくするにはどうすればよいか？



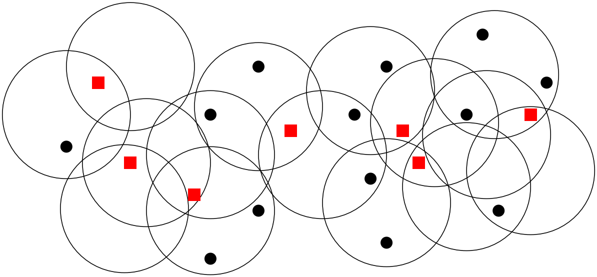
離散型単位円横断問題 (discrete unit disk transversal problem)

平面上にいくつかの点といくつかの単位円が与えられたとき
点を選んで，すべての単位円を横断したい
選ばれる点の数を最も少なくするにはどうすればよいか？



離散型単位円横断問題 (discrete unit disk transversal problem)

平面上にいくつかの点といくつかの単位円が与えられたとき
点を選んで，すべての単位円を横断したい
選ばれる点の数を最も少なくするにはどうすればよいか？



今日の目標

離散型単位円横断問題に対する近似アルゴリズム設計

- 線形計画法と ε ネットを用いる

補足

- 離散型単位円被覆問題と離散型単位円横断問題は同値 (第 1 回演習問題)
- この手法は他の横断問題，被覆問題にも適用可能

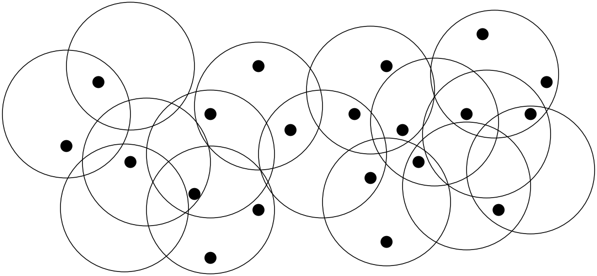
目次

1. 横断と分数横断
2. 線形計画法に基づく近似アルゴリズム
3. 他のハイパーグラフの場合
4. 今日のまとめ

離散型単位円横断問題 (discrete unit disk transversal problem)

入力

- 平面上の点集合 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$
- 平面上の単位円の集合 $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$

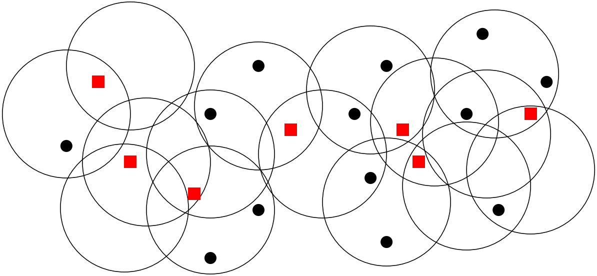


離散型単位円横断問題 (discrete unit disk transversal problem)

出力

- 点集合 $P' \subseteq P$ で次を満たすもの (P' が $\mathcal{D}$ を横断する)

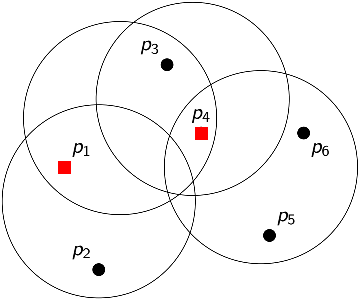
$$\text{任意の } D \in \mathcal{D} \text{ に対して，ある } p \in P' \text{ が存在して，} p \in D$$



基本的なアイディア

各点 $p_i \in P$ に対して，$x_i \in \{0, 1\}$ を考えて，
横断 P' に対して，次のような値を割り当てる

$$x_i = \begin{cases} 1 & p_i \in P', \\ 0 & p_i \notin P' \end{cases}$$

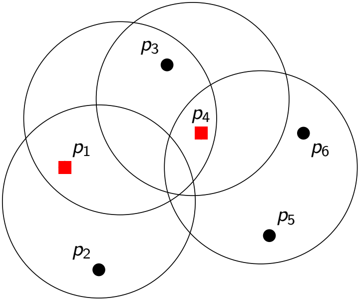


$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= 0, \\ x_3 &= 0, \\ x_4 &= 1, \\ x_5 &= 0, \\ x_6 &= 0 \end{aligned}$$

値の割り当てが横断であるための必要十分条件

任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して

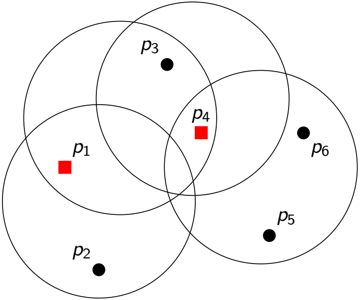
$$\sum_{i\colon p_i \in D} x_i \geq 1$$



$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1, \\ x_1 + x_3 + x_4 &\geq 1, \\ x_3 + x_4 &\geq 1, \\ x_4 + x_5 + x_6 &\geq 1 \end{aligned}$$

最小化すべき式 (目的関数)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$



目的は

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

の最小化

数理計画法による離散型単位円横断問題の定式化

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i \\
\text{subject to} \quad & \sum_{i:\ p_i \in D} x_i \geq 1 \qquad \forall\ D \in \mathcal{D}, \\
& x_i \in \{0,1\} \qquad \forall\ i \in \{1,\ldots,n\}
\end{aligned}
$$

これは整数計画問題 (integer programming problem)

- 元の問題を書き換えただけなので，これも解くのが難しい

今から行うこと

制約条件を緩和する

離散型単位円横断問題の緩和 (relaxation)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{i:\ p_i \in D} x_i \geq 1 & \forall\ D \in \mathcal{D}, \\
& x_i \in [0,1] & \forall\ i \in \{1,\ldots,n\}
\end{array}
$$

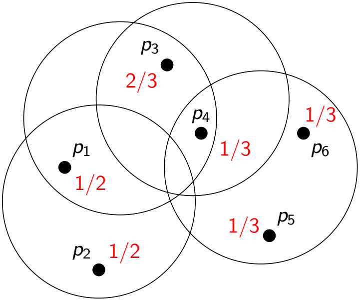
これは線形計画問題 (linear programming problem)

- 理論：線形計画問題は多項式時間で解ける
- 実践：数理計画ソルバで大規模な問題も簡単に解ける

緩和における制約

$$\text{subject to} \quad \sum_{i:\ p_i \in D} x_i \geq 1 \qquad \forall\ D \in \mathcal{D}$$
$$x_i \in [0, 1] \qquad \forall\ i \in \{1, \ldots, n\}$$

緩和では各点を「部分的」に選んで，単位円を横断する



$x_1 = 1/2,\ x_2 = 1/2,\ x_3 = 2/3,$
$x_4 = 1/3,\ x_5 = 1/3,\ x_6 = 1/3$

このため，
緩和における制約条件を満たす x を
分数横断と呼ぶことがある

離散型単位円横断問題の緩和 (relaxation)

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i \\
\text{subject to} \quad & \sum_{i:\ p_i \in D} x_i \geq 1 \qquad \forall\ D \in \mathcal{D}, \\
& x_i \in [0, 1] \qquad \forall\ i \in \{1, \dots, n\}
\end{aligned}
$$

x^* をこれの最適有理解とする

事実

制約における変数の係数と定数項がすべて整数である線形計画問題は最適解を持つならば，すべての成分を有理数とする最適解を持つ

普通の数理計画ソルバは，最適有理解を見つける

離散型単位円横断問題の緩和 (relaxation)

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i \\
\text{subject to} \quad & \sum_{i:\ p_i \in D} x_i \geq 1 \qquad \forall\ D \in \mathcal{D}, \\
& x_i \in [0, 1] \qquad \forall\ i \in \{1, \ldots, n\}
\end{aligned}
$$

x を最適横断 (に対応する 01 ベクトル) とすると

- このとき，緩和の方が制約条件が緩いので，

$$
\sum_{i=1}^{n} x_i^* \leq \sum_{i=1}^{n} x_i = \text{最適横断の要素数}
$$

目次

1 横断と分数横断

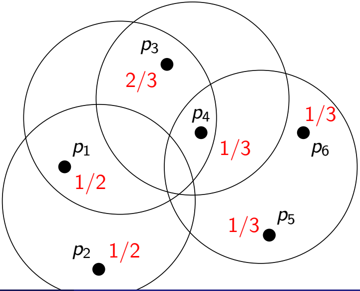
2 線形計画法に基づく近似アルゴリズム

3 他のハイパーグラフの場合

4 今日のまとめ

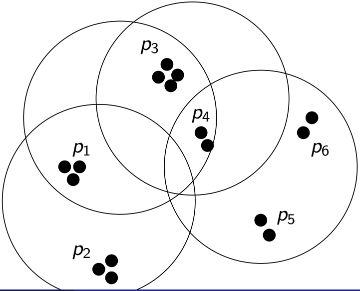
線形計画法に基づく近似アルゴリズム

1. 最適分数横断を求める (x^* とする)
   - このとき，ある正整数 M に対して，Mx^* は整数ベクトル
2. 各点 p_i を Mx_i^* 個だけコピーしてできる多重集合を $\tilde{P}$ とする
3. $\varepsilon = 1/\sum_{i=1}^{n} x_i^*$ として，$\tilde{P}$ の $\mathcal{D}$ に対する ε ネットを求める
4. 求めた ε ネット N を出力する



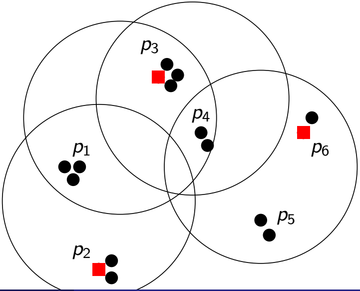
線形計画法に基づく近似アルゴリズム

1. 最適分数横断を求める (x^* とする)
   - このとき，ある正整数 M に対して，Mx^* は整数ベクトル
2. 各点 p_i を Mx_i^* 個だけコピーしてできる多重集合を $\tilde{P}$ とする
3. $\varepsilon = 1/\sum_{i=1}^{n} x_i^*$ として，$\tilde{P}$ の $\mathcal{D}$ に対する ε ネットを求める
4. 求めた ε ネット N を出力する



線形計画法に基づく近似アルゴリズム

1. 最適分数横断を求める (x^* とする)
   - このとき，ある正整数 M に対して，Mx^* は整数ベクトル
2. 各点 p_i を Mx_i^* 個だけコピーしてできる多重集合を $\tilde{P}$ とする
3. $\varepsilon = 1/\sum_{i=1}^{n} x_i^*$ として，$\tilde{P}$ の $\mathcal{D}$ に対する ε ネットを求める
4. 求めた ε ネット N を出力する



ハイパーグラフ $H = (V, E)$，実数 $\varepsilon \in [0, 1]$

定義：ハイパーグラフに対する ε ネット (ε-net)

H に対する ε ネットとは，次を満たす集合 $N \subseteq V$ のこと

$|e| \geq \varepsilon \cdot |V|$ を満たす任意の $e \in E$ に対して，$N \cap e \neq \emptyset$

この状況に合わせて言い直すと，

単位円集合に対する ε ネットとは？

$\mathcal{D}$ に対する ε ネットとは，次を満たす集合 $N \subseteq \tilde{P}$ のこと

$|D \cap \tilde{P}| \geq \varepsilon \cdot |\tilde{P}|$ を満たす任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して，$N \cap D \neq \emptyset$

線形計画法に基づく近似アルゴリズム

1. 最適分数横断を求める (x^* とする)
   - このとき，ある正整数 M に対して，Mx^* は整数ベクトル
2. 各点 p_i を Mx_i^* 個だけコピーしてできる多重集合を $\tilde{P}$ とする
3. $\varepsilon = 1/\sum_{i=1}^{n} x_i^*$ として，$\tilde{P}$ の $\mathcal{D}$ に対する ε ネットを求める
4. 求めた ε ネット N を出力する

今から行うこと

- 出力 N が必ず横断になること
- 出力 N の要素数を評価すること

出力は必ず横断である

- $\tilde{P}$ と ε の定め方より，次が成り立つ

$$\frac{M}{\varepsilon} = M\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{i=1}^{n} Mx_i^* = |\tilde{P}|$$

- 一方で，x^* は分数横断なので，任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して

$$\sum_{i\colon p_i \in D} x_i^* \geq 1$$

- したがって，

$$|D \cap \tilde{P}| = \sum_{i\colon p_i \in D} Mx_i^* = M \sum_{i\colon p_i \in D} x_i^* \geq M = \varepsilon \cdot |\tilde{P}|$$

- ε ネットの定義より，N が ε ネットならば，

$$N \cap D \neq \emptyset, \qquad \text{すなわち } |N \cap D| \geq 1$$

$\therefore$ N は横断である

出力の要素数

出力 N は単位円に対する ε ネット

前回の復習

- 円に対して，要素数 $\dfrac{13.4}{\varepsilon}$ の ε ネットが必ず存在 ($O(n \log n)$ 期待時間で見つけられる)

(Bus, Gupta, Mustafa, Ray '16)

つまり，

$$|N| \leq \frac{13.4}{\varepsilon} = 13.4 \sum_{i=1}^{n} x_i^* \leq 13.4 \cdot (\text{最適横断の要素数})$$

となり，

結論

離散型単位円横断問題に対して，多項式時間 13.4 近似アルゴリズムが存在する

目次

1 横断と分数横断

2 線形計画法に基づく近似アルゴリズム

3 他のハイパーグラフの場合

4 今日のまとめ

先ほどのアルゴリズムは，図形が「単位円」であるという性質を使っていない

- 図形が「円」であるという性質は使っている

結論

離散型円横断問題に対して，多項式時間 13.4 近似アルゴリズムが存在する

より一般に
ハイパーグラフ $H = (V, E)$ の「横断問題」を考えるとどうなるか？

横断問題とは？

頂点部分集合 $V' \subseteq V$ で，任意の $e \in E$ に対して，
$e \cap V' \neq \emptyset$ を満たすものの中で，要素数が最小のものを見つける問題

小さな ε ネットの存在性 (前回)

要素数 $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\log|E|\right)$ の ε ネットが存在する (多項式時間で発見可)

結論

ハイパーグラフの横断問題に対して，
多項式時間 $O(\log|E|)$ 近似アルゴリズムが存在する

より一般に
ハイパーグラフ $H = (V, E)$ の「横断問題」を考えるとどうなるか？

横断問題とは？

頂点部分集合 $V' \subseteq V$ で，任意の $e \in E$ に対して，
$e \cap V' \neq \emptyset$ を満たすものの中で，要素数が最小のものを見つける問題

$\text{vc-dim}(H) = d$ とすると，

ε ネット定理 (前回)

要素数 $O\left(\frac{d}{\varepsilon} \log \frac{d}{\varepsilon}\right)$ の ε ネットが存在する (多項式時間で発見可)

結論

ハイパーグラフの横断問題に対して，
多項式時間 $O(d \log(d \cdot (\text{最適横断の要素数})))$ 近似アルゴリズムが存在

目次

1. 横断と分数横断
2. 線形計画法に基づく近似アルゴリズム
3. 他のハイパーグラフの場合
4. 今日のまとめ

幾何的被覆問題に対する近似アルゴリズム

線形計画法を利用したもの

- 整数計画法と線形計画法
- ε ネットによる丸め

今回紹介する内容は次の論文に基づく

- G. Even, D. Rawitz, S. Shahar: Hitting sets with the VC-dimension is small. Information Processing Letters 95 (2005) 358–362.

これは，次の論文を線形計画法を利用して解釈したもの (と考えられている)

- Hervé Brönnimann, Michael T. Goodrich: Almost optimal set covers in finite VC-dimension. Discrete & Computational Geometry 14 (1995) 463–479.

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次

1 横断と分数横断

2 線形計画法に基づく近似アルゴリズム

3 他のハイパーグラフの場合

4 今日のまとめ