離散最適化基礎論　第 5 回
幾何ハイパーグラフ (1)：VC 次元

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 11 月 17 日

最終更新：2017 年 12 月 8 日　16:16

主題

離散最適化のトピックの１つとして幾何的被覆問題を取り上げ,
その数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

- 「離散最適化」と「計算幾何学」の接点として重要な役割を果たしているから
- 様々なアルゴリズム設計技法・解析技法を紹介できるから
- 応用が多いから

スケジュール 前半 (予定)

1. 幾何的被覆問題とは？ (10/6)
- ★ 国内出張のため休み (10/13)
2. 最小包囲円問題 (1)：基本的な性質 (10/20)
3. 最小包囲円問題 (2)：乱択アルゴリズム (10/27)
- ★ 文化の日のため休み (11/3)
4. クラスタリング (1)：k-センター (11/10)
5. 幾何ハイパーグラフ (1)：VC 次元 (11/17)
- ★ 調布祭 のため 休み (11/24)
6. 幾何ハイパーグラフ (2)：ε ネット (12/1)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

7. 幾何的被覆問題 (1)：線形計画法の利用 (12/8)
8. 幾何的被覆問題 (2)：シフト法 (12/15)
9. 幾何的被覆問題 (3)：局所探索法 (12/22)
10. 幾何的被覆問題 (4)：局所探索法の解析 (1/5)

⋆ センター試験準備 のため 休み (1/12)

11. 幾何ハイパーグラフ (3)：ε ネット定理の証明 (1/19)
12. 幾何アレンジメント (1)：合併複雑度と ε ネット (1/26)
13. 幾何アレンジメント (2)：合併複雑度の例 (2/2)
14. 最近のトピック (2/9)
15. 期末試験 (2/16？)

注意：予定の変更もありうる

今日の内容

幾何ハイパーグラフの特殊性

特に，VC 次元

- VC 次元の定義
- Sauer の補題 (VC 次元の小さいハイパーグラフの性質)
- VC 次元の例
  - 区間，半平面，凸多角形
  - 集合演算との関係

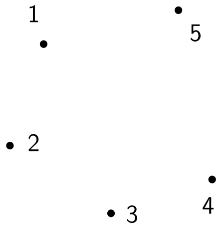
復習：ハイパーグラフ

被覆問題 (covering problem) で与えられるものはハイパーグラフ

定義：ハイパーグラフ (hypergraph)

ハイパーグラフとは，次を満たす順序対 $H = (V, E)$
- V は (有限) 集合　　(H の頂点集合)
- $E \subseteq 2^V$　　(H の辺集合)

例：$H = (V, E)$
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4\}, \{2, 4, 5\}\}$



計算幾何・離散幾何では領域空間 (range space) と呼ばれることもある

被覆問題 (covering problem) で与えられるものはハイパーグラフ

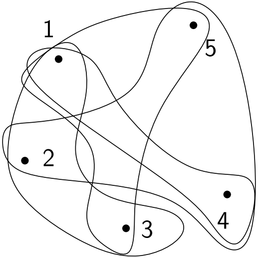
定義：ハイパーグラフ (hypergraph)

ハイパーグラフとは，次を満たす順序対 $H = (V, E)$

- V は (有限) 集合　　(H の頂点集合)
- $E \subseteq 2^V$　　(H の辺集合)

例：$H = (V, E)$

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4\}, \{2, 4, 5\}\}$

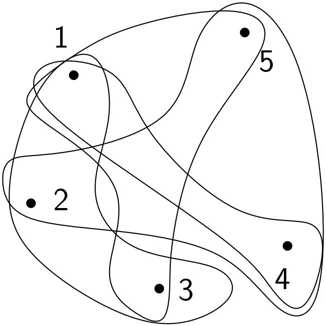


計算幾何・離散幾何では領域空間 (range space) と呼ばれることもある

被覆問題 (covering problem) と言ったら，次のような設定の問題

入力として与えられるもの

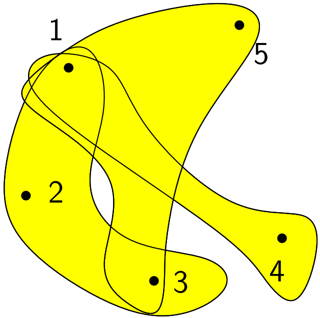
- ハイパーグラフ $H = (V, E)$



被覆問題 (covering problem) と言ったら，次のような設定の問題

出力したいもの

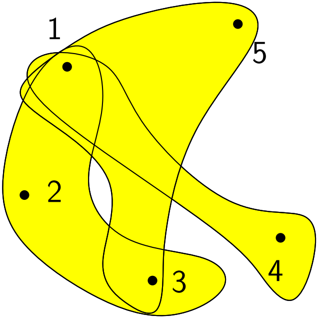
- E の部分集合 E' で，V の要素をすべて被覆するもの
(任意の $v_i \in V$ に対して，ある $e_j \in E'$ が存在して，$v_i \in e_j$)



被覆問題 (covering problem) と言ったら，次のような設定の問題

目的

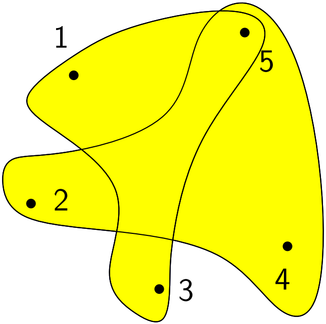
- $|E'|$ の最小化



被覆問題 (covering problem) と言ったら，次のような設定の問題

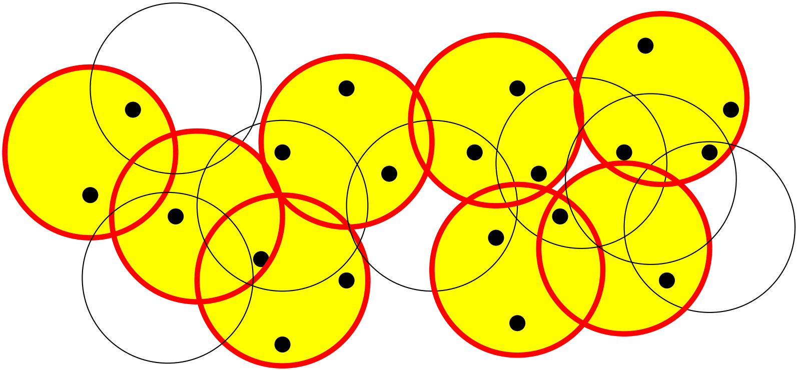
目的

- $|E'|$ の最小化



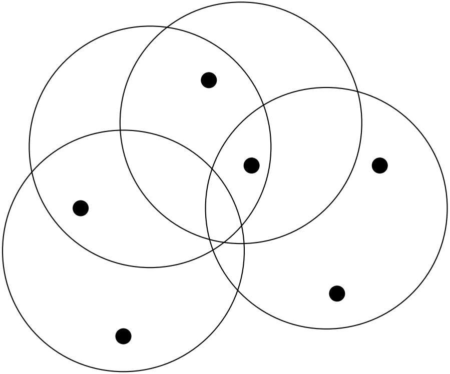
幾何的被覆問題の例 (1)

平面上にいくつかの点といくつかの単位円が与えられたとき
単位円を選んで，点をすべて覆いたい
選ばれる単位円の数を最も少なくするにはどうすればよいか？



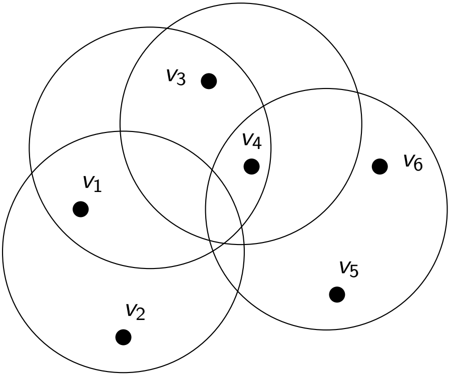
被覆問題としての定式化

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
- $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
- $e_1 = \{v_1, v_2\}$, $e_2 = \{v_1, v_3, v_4\}$, $e_3 = \{v_3, v_4\}$, $e_4 = \{v_4, v_5, v_6\}$



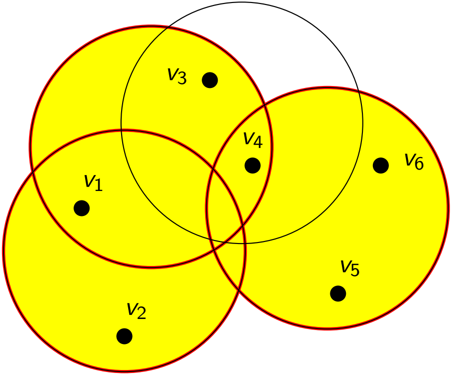
被覆問題としての定式化

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
- $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
- $e_1 = \{v_1, v_2\}$, $e_2 = \{v_1, v_3, v_4\}$, $e_3 = \{v_3, v_4\}$, $e_4 = \{v_4, v_5, v_6\}$



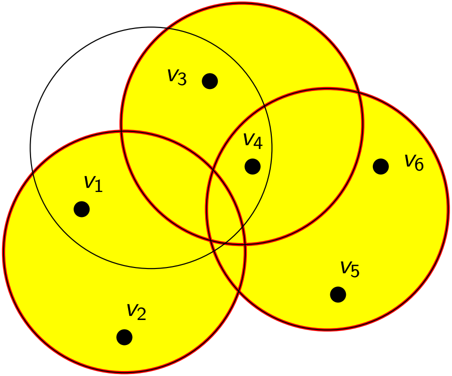
被覆問題としての定式化：最適解と最適値

- $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
- $e_1 = \{v_1, v_2\}$, $e_2 = \{v_1, v_3, v_4\}$, $e_3 = \{v_3, v_4\}$, $e_4 = \{v_4, v_5, v_6\}$
- $E' = \{e_1, e_2, e_4\}$ は最適解で，3 が最適値

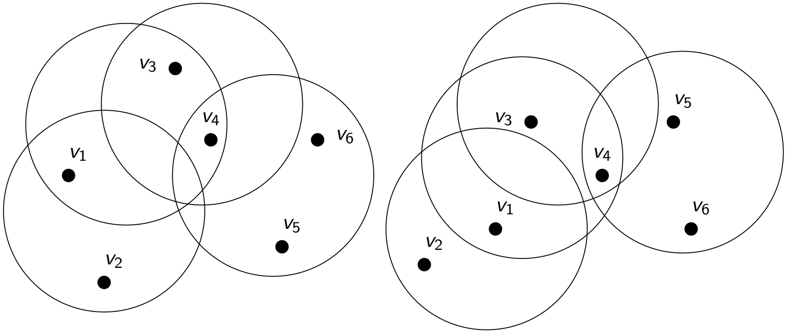


被覆問題としての定式化：最適解と最適値

- $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
- $e_1 = \{v_1, v_2\}$，$e_2 = \{v_1, v_3, v_4\}$，$e_3 = \{v_3, v_4\}$，$e_4 = \{v_4, v_5, v_6\}$
- $E' = \{e_1, e_3, e_4\}$ も最適解で，3 が最適値



復習：違う幾何配置が同じハイパーグラフを与えることもある



$\rightsquigarrow$ ハイパーグラフは幾何配置の「組合せ構造」に着目している

ハイパーグラフ $H = (V, E)$ に対する被覆問題を考える

よく知られた事実 (定理)

$H = (V, E)$ に対する被覆問題には,
多項式時間 $1 + \ln n$ 近似アルゴリズムが存在する　(ただし，$n = |V|$)

つまり，ほとんどの 幾何的被覆問題は同じ近似比で解ける

よいこと：万能であること

このアルゴリズムから
どんな幾何的被覆問題にも
$1 + \ln n$ 近似解が得られる

悪いこと：大きな近似比

近似比 $1 + \ln n$ が大きすぎる
(n に関して単調増加)

$\boxed{\text{目標}}$：この「悪いこと」を改善したい

この講義では，いくつかの技法を見る (予定である)

- $\boxed{\text{離散型単位円被覆問題：多項式時間 } O(1) \text{ 近似アルゴリズム}}$
  (Brönnimann, Goodrich ’95)
  $\rightsquigarrow$ アルゴリズム：線形計画法の利用
- $\boxed{\text{連続型単位円被覆問題：多項式時間 } 1+\varepsilon \text{ 近似アルゴリズム}}$
  (Hochbaum, Maass ’85)
  $\rightsquigarrow$ アルゴリズム：シフト法
- $\boxed{\text{離散型単位円被覆問題：多項式時間 } 1+\varepsilon \text{ 近似アルゴリズム}}$
  (Mustafa, Ray ’10)
  $\rightsquigarrow$ アルゴリズム：局所探索法

つまり

- 幾何的に得られるハイパーグラフは特殊な性質を持つ
- それはどんな性質なのか？

目次

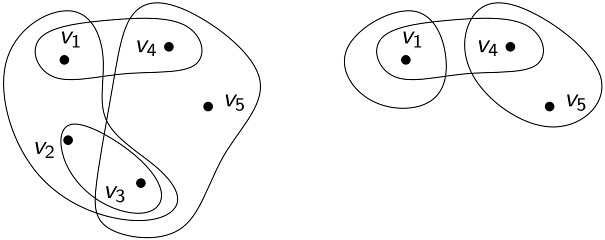
ハイパーグラフ $H = (V, E)$，部分集合 $X \subseteq V$

定義：ハイパーグラフの射影 (projection)

H の X の上への**射影**とは，ハイパーグラフ $H|_X = (X, E|_X)$ で，

$$E|_X = \{e \cap X \mid e \in E\}$$

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $X = \{v_1, v_4, v_5\}$,
$e_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $e_2 = \{v_1, v_4\}$, $e_3 = \{v_2, v_3\}$, $e_4 = \{v_3, v_4, v_5\}$ のとき

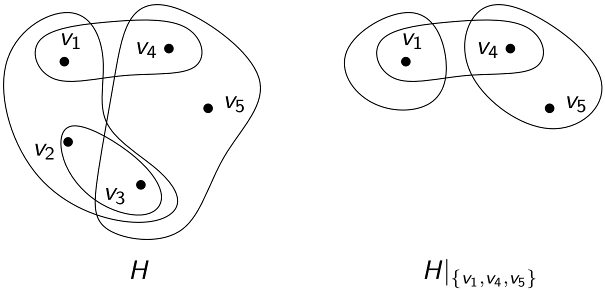


H　　　$H|_{\{v_1, v_4, v_5\}}$

ハイパーグラフ $H = (V, E)$，部分集合 $X \subseteq V$

定義：集合の粉砕

X が H によって粉砕される (shattered) とは，$E|_X = 2^X$ となること

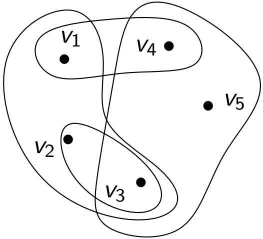


$\{v_1, v_4, v_5\}$ は H によって粉砕されない

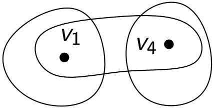
ハイパーグラフ $H = (V, E)$，部分集合 $X \subseteq V$

定義：集合の粉砕

X が H によって粉砕される (shattered) とは，$E|_X = 2^X$ となること



H



$H|_{\{v_1, v_4\}}$

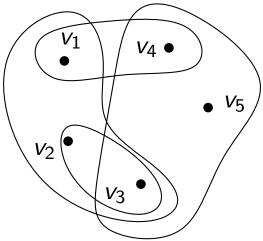
$\{v_1, v_4\}$ は H によって粉砕される

ハイパーグラフ $H = (V, E)$

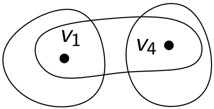
定義：ハイパーグラフの VC 次元 (VC-dimension)

H の VC 次元とは，H によって粉砕される集合の最大要素数

$$\text{vc-dim}(H) = \sup\{|X| \mid X \subseteq V, X \text{ は } H \text{ に粉砕される}\}$$



H



$H|_{\{v_1, v_4\}}$

$\text{vc-dim}(H) = 2$

ハイパーグラフ $H = (V, E)$

定義：ハイパーグラフの VC 次元 (VC-dimension)

H の VC 次元とは，H によって粉砕される集合の最大要素数

$$\mathrm{vc\text{-}dim}(H) = \sup\{|X| \mid X \subseteq V, X \text{ は } H \text{ に粉砕される}\}$$

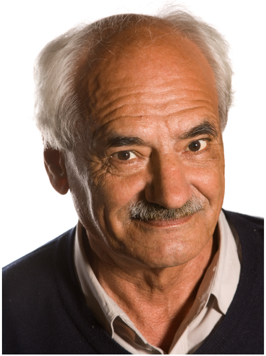
$\mathrm{vc\text{-}dim}(H) \geq d$ であることを証明するには

要素数 d の集合で，粉砕されるものを見つければよい

$\mathrm{vc\text{-}dim}(H) \leq d$ であることを証明するには

要素数 $d+1$ のどんな集合も，粉砕されないことを確認すればよい

ヴァプニク



チェルフォネンキス

http://clrc.rhul.ac.uk/people/vlad/
http://clrc.rhul.ac.uk/people/chervonenkis/

目次

ハイパーグラフ $H = (V, E)$

Sauer の補題

$n = |V|$, $d = \text{vc-dim}(H)$ とするとき，

$$|E| \leq \sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i}$$

解釈：VC 次元の小さいハイパーグラフの辺数は小さい

ハイパーグラフ $H = (V, E)$，$X \subseteq V$

Sauer の補題

$n = |V|$, $d = \mathrm{vc\text{-}dim}(H)$ とするとき，

- $H(x) = -x \log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$ をエントロピー関数とすると

$$|E| \leq \sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i} \leq 2^{n \cdot H(d/n)}$$

- $d \geq 1$ ならば

$$|E| \leq \sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i} \leq \left(\frac{e\,n}{d}\right)^d \leq (3n)^d$$

つまり，d が定数であるとき，$|E| = O(n^d)$

証明：$n+d$ に関する帰納法.

- $n+d=0$ のとき，つまり，$n=0$ かつ $d=0$ のときを考える
- $|V|=n=0$ より，$E=\emptyset$
- $\therefore |E|=0$
- 一方で，$\displaystyle\sum_{i=0}^{d}\binom{n}{i}=\binom{0}{0}=1$
- したがって，このとき，$|E|\le\displaystyle\sum_{i=0}^{d}\binom{n}{i}$

同様に，$n=0$ ならば，$d>0$ であっても成り立つ
(したがって，$n\ge 1$ と仮定してよい)

証明 (続き)：帰納段階に進む

- 任意の $x \in V$ を考える
- 次のハイパーグラフ $H_1 = (V_1, E_1), H_2 = (V_2, H_2)$ を考える

$$
\begin{aligned}
V_1 &= V - \{x\}, & E_1 &= \{e - \{x\} \mid e \in E\}, \\
V_2 &= V - \{x\}, & E_2 &= \{e - \{x\} \mid e - \{x\} \in E, e \cup \{x\} \in E\}
\end{aligned}
$$

- このとき，次の 3 つが成り立つ

1. $\text{vc-dim}(H_1) \leq d$
2. $\text{vc-dim}(H_2) \leq d - 1$ (←演習問題)
3. $|E| = |E_1| + |E_2|$

1. $\text{vc-dim}(H_1) \le d$ の証明

- VC 次元の定義より
  ある集合 $X \subseteq V - \{x\}$ に対して，$E_1|_X = 2^X$ かつ $|X| = \text{vc-dim}(H_1)$
- このとき，$x \notin X$ なので，

$$
\begin{aligned}
E|_X &= \{e \cap X \mid e \in E\} \\
&= \{(e - \{x\}) \cap X \mid e \in E\} \\
&= E_1|_X = 2^X
\end{aligned}
$$

- したがって，X は H に粉砕され，

$$d = \text{vc-dim}(H) \ge |X| = \text{vc-dim}(H_1)$$

1. $\mathrm{vc\text{-}dim}(H_2) \leq d - 1$ の証明

演習問題

- ヒント：ある集合 $X \subseteq V - \{x\}$ に対して，
  $E_2|_X = 2^X$ かつ $|X| = \mathrm{vc\text{-}dim}(H_2)$ であると仮定して，
  $X \cup \{x\}$ が H に粉砕されることを証明すればよい

3 $|E| = |E_1| + |E_2|$ の証明

- E の要素 e を E_1 の要素に対応付けることを考える
- ここで，$x \notin e$ であるとき，
  $e \in E$ と $e \cup \{x\} \in E$ は同じ要素 $e \in E_1$ に対応する
- しかし，このとき，$e \in E_2$ である
- したがって，$|E| = |E_1| + |E_2|$ となる

証明の続き：

- 帰納法の仮定より，

$$|E_1| \le \sum_{i=0}^{d} \binom{n-1}{i}, \quad |E_2| \le \sum_{i=0}^{d-1} \binom{n-1}{i}$$

- したがって，

$$\begin{aligned}
|E| &= |E_1| + |E_2| \le \sum_{i=0}^{d} \binom{n-1}{i} + \sum_{i=0}^{d-1} \binom{n-1}{i} \\
&= \binom{n-1}{0} + \sum_{i=1}^{d} \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right) \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{d} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i}
\end{aligned}$$

□

ハイパーグラフ $H = (V, E)$

Sauer の補題

$n = |V|$, $d = \text{vc-dim}(H)$ とするとき，

$$|E| \leq \sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i}$$

Sauer の補題：系

$X \subseteq V$ として，$m = |X|$ とすると，

$$|E|_X| \leq \sum_{i=0}^{d} \binom{m}{i}$$

証明：$\text{vc-dim}(H|_X) \leq \text{vc-dim}(H)$ を確認すればよい　　(演習問題)

目次

数直線上の閉区間族

ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}$
- $E = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$

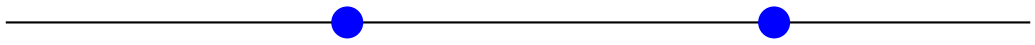
つまり，H は数直線上の閉区間を全部集めてできるハイパーグラフ

ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}$
- $E = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$

VC 次元の下界

このハイパーグラフ H に対して，$\text{vc-dim}(H) \geq 2$



ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}$
- $E = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$

VC 次元の下界

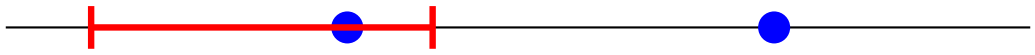
このハイパーグラフ H に対して，$\text{vc-dim}(H) \geq 2$

ハイパーグラフ $H=(V,E)$ として，次を考える

- $V=\mathbb{R}$
- $E=\{[a,b] \mid a,b\in\mathbb{R}, a\le b\}$

VC 次元の下界

このハイパーグラフ H に対して，$\text{vc-dim}(H)\ge 2$



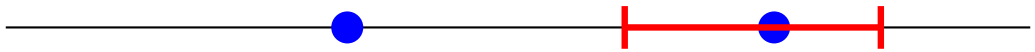
数直線上の閉区間族：VC 次元の下界

ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}$
- $E = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$

VC 次元の下界

このハイパーグラフ H に対して，$\text{vc-dim}(H) \geq 2$



ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}$
- $E = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$

VC 次元の下界

このハイパーグラフ H に対して，$\mathrm{vc\text{-}dim}(H) \geq 2$

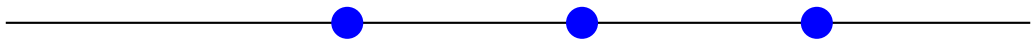
ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}$
- $E = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$

VC 次元の上界

このハイパーグラフ H に対して，$\mathrm{vc\text{-}dim}(H) \leq 2$

数直線上の任意の 3 点を考える



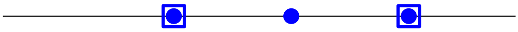
ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}$
- $E = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$

VC 次元の上界

このハイパーグラフ H に対して，$\mathrm{vc\text{-}dim}(H) \leq 2$

数直線上の任意の 3 点を考える



ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}$
- $E = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$

VC 次元の上界

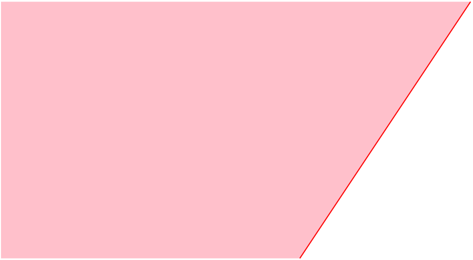
このハイパーグラフ H に対して，$\text{vc-dim}(H) \leq 2$

数直線上の任意の 3 点を考える

ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}^2$
- $E = \{$ 閉半平面 $\}$

つまり，H は平面上の閉半平面を全部集めてできるハイパーグラフ



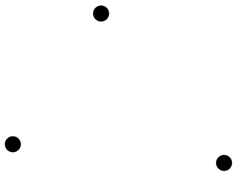
平面上の閉半平面族：VC 次元の下界

ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}^2$
- $E = \{$ 閉半平面 $\}$

VC 次元の下界

このハイパーグラフ H に対して，$\text{vc-dim}(H) \geq 3$

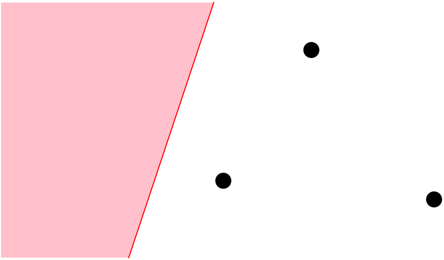


ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}^2$
- $E = \{$ 閉半平面 $\}$

VC 次元の下界

このハイパーグラフ H に対して，$\text{vc-dim}(H) \geq 3$

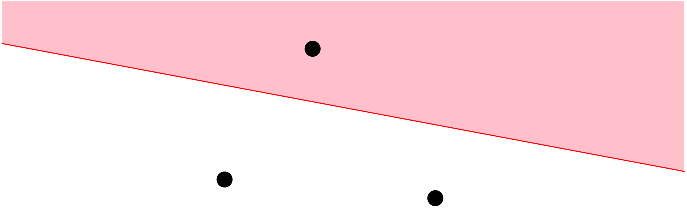


ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}^2$
- $E = \{$ 閉半平面 $\}$

VC 次元の下界

このハイパーグラフ H に対して，$\text{vc-dim}(H) \geq 3$

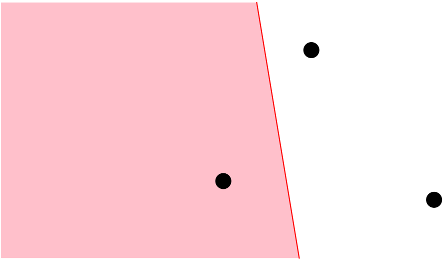


ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}^2$
- $E = \{$ 閉半平面 $\}$

VC 次元の下界

このハイパーグラフ H に対して，$\text{vc-dim}(H) \geq 3$

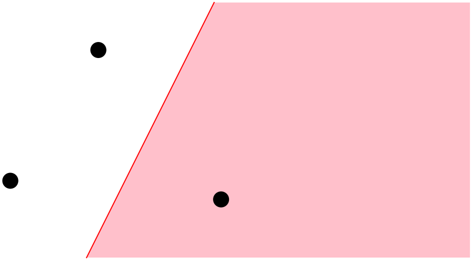


ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}^2$
- $E = \{$ 閉半平面 $\}$

VC 次元の下界

このハイパーグラフ H に対して，$\text{vc-dim}(H) \geq 3$

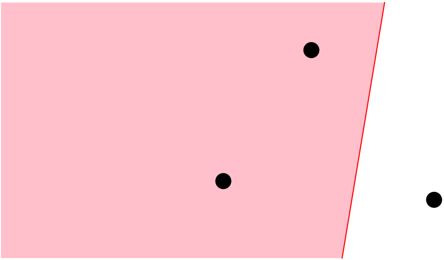


ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}^2$
- $E = \{$ 閉半平面 $\}$

VC 次元の下界

このハイパーグラフ H に対して，$\text{vc-dim}(H) \geq 3$



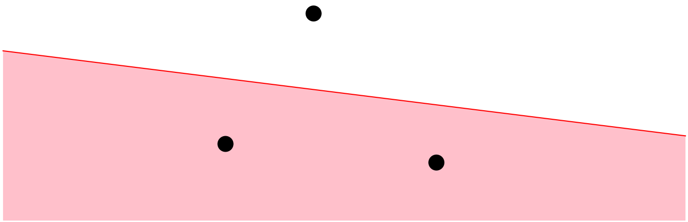
平面上の閉半平面族：VC 次元の下界

ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}^2$
- $E = \{$ 閉半平面 $\}$

VC 次元の下界

このハイパーグラフ H に対して，$\text{vc-dim}(H) \geq 3$

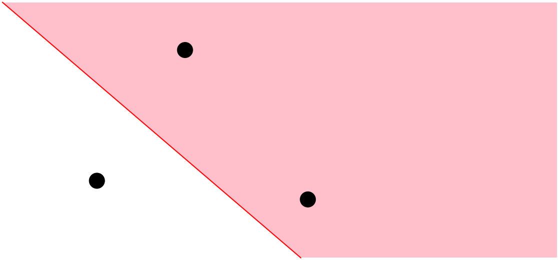


ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}^2$
- $E = \{$ 閉半平面 $\}$

VC 次元の下界

このハイパーグラフ H に対して，$\text{vc-dim}(H) \geq 3$



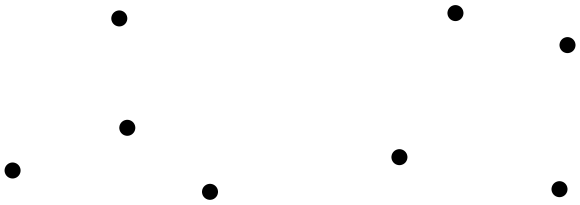
ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}^2$
- $E = \{$ 閉半平面 $\}$

VC 次元の上界

このハイパーグラフ H に対して，$\mathrm{vc\text{-}dim}(H) \leq 3$

平面上の任意の 4 点を考える



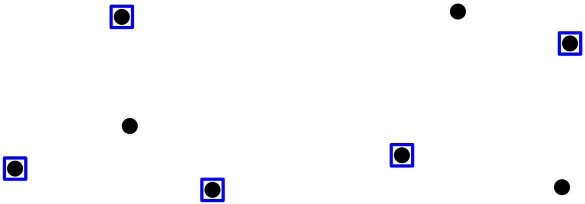
ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}^2$
- $E = \{$ 閉半平面 $\}$

VC 次元の上界

このハイパーグラフ H に対して，$\mathrm{vc\text{-}dim}(H) \leq 3$

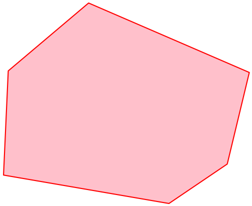
平面上の任意の 4 点を考える



ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}^2$
- $E = \{$ 凸多角形 $\}$

つまり，H は平面上の凸多角形を全部集めてできるハイパーグラフ



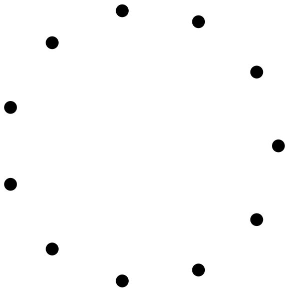
ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}^2$
- $E = \{$ 凸多角形 $\}$

VC 次元の下界

このハイパーグラフ H に対して，$\text{vc-dim}(H) = \infty$

つまり，任意の自然数 n に対して，凸多角形族が粉砕する n 個の点の集合が存在する



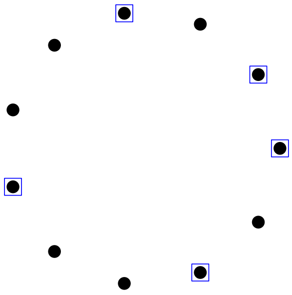
ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}^2$
- $E = \{$ 凸多角形 $\}$

VC 次元の下界

このハイパーグラフ H に対して，$\text{vc-dim}(H) = \infty$

つまり，任意の自然数 n に対して，
凸多角形族が粉砕する n 個の点の
集合が存在する



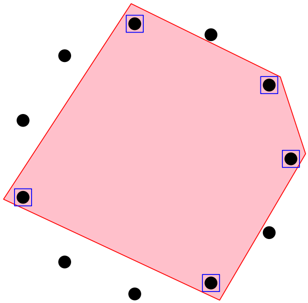
ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}^2$
- $E = \{$ 凸多角形 $\}$

VC 次元の下界

このハイパーグラフ H に対して，$\text{vc-dim}(H) = \infty$

つまり，任意の自然数 n に対して，
凸多角形族が粉砕する n 個の点の
集合が存在する



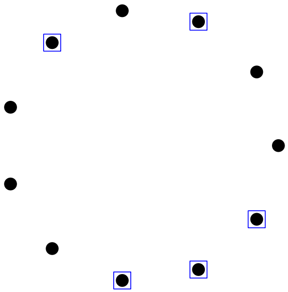
平面上の凸多角形族：VC 次元の下界

ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}^2$
- $E = \{\,$凸多角形$\,\}$

VC 次元の下界

このハイパーグラフ H に対して，$\mathrm{vc\text{-}dim}(H) = \infty$



つまり，任意の自然数 n に対して，
凸多角形族が粉砕する n 個の点の集合が存在する

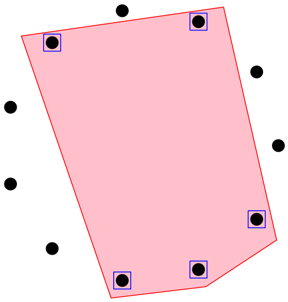
ハイパーグラフ $H = (V, E)$ として，次を考える

- $V = \mathbb{R}^2$
- $E = \{$ 凸多角形 $\}$

VC 次元の下界

このハイパーグラフ H に対して，$\text{vc-dim}(H) = \infty$

つまり，任意の自然数 n に対して，凸多角形族が粉砕する n 個の点の集合が存在する



VC 次元の例：まとめ

- $H = (\mathbb{R}, \text{閉区間}) \rightsquigarrow \text{vc-dim}(H) = 2$
- $H = (\mathbb{R}^2, \text{半平面}) \rightsquigarrow \text{vc-dim}(H) = 3$
- $H = (\mathbb{R}^2, \text{凸多角形}) \rightsquigarrow \text{vc-dim}(H) = \infty$

今から行いたいこと

他にも様々なハイパーグラフの VC 次元を考えたい

目次

ハイパーグラフ $H = (V, E)$

補集合から作られるハイパーグラフの VC 次元

ハイパーグラフ $H' = (V', E')$ を次で定義する

$$V' = V, \quad E' = \{V - e \mid e \in E\}$$

このとき，

$$\text{vc-dim}(H') = \text{vc-dim}(H)$$

証明：演習問題

ハイパーグラフ $H_1 = (V_1, E_1), H_2 = (V_2, E_2)$

合併から作られるハイパーグラフの VC 次元

ハイパーグラフ $H = (V, E)$ を次で定義する

$$V = V_1 \cup V_2, \quad E = \{e_1 \cup e_2 \mid e_1 \in E_1, e_2 \in E_2\}$$

このとき，$\mathrm{vc\text{-}dim}(H) = d$, $\mathrm{vc\text{-}dim}(H_1) = d_1, \mathrm{vc\text{-}dim}(H_2) = d_2$ ならば，

$$d = O((d_1 + d_2)\log(d_1 + d_2))$$

証明：ある集合 $X \subseteq V$ に対して，$E|_X = 2^X$, $|X| = d$ が成り立つとする

- このとき，次のページの式が成り立つ

$$
\begin{aligned}
E|_X &= \{e \cap X \mid e \in E\} \\
&= \{(e_1 \cup e_2) \cap X \mid e_1 \in E_1, e_2 \in E_2\} \\
&= \{(e_1 \cap X) \cup (e_2 \cap X) \mid e_1 \in E_1, e_2 \in E_2\} \\
&= \{e_1' \cup e_2' \mid e_1' \in E_1|_X, e_2' \in E_2|_X\} \\
\therefore \quad |E|_X| &\leq |E_1|_X| \cdot |E_2|_X| \\
\therefore \quad 2^d &\leq \sum_{i=0}^{d_1} \binom{d}{i} \cdot \sum_{i=0}^{d_2} \binom{d}{i} \leq (3d)^{d_1} \cdot (3d)^{d_2} = (3d)^{d_1+d_2}
\end{aligned}
$$

つまり，

$$2^d \leq (3d)^{d_1+d_2}$$

したがって，$d = O((d_1 + d_2)\log(d_1 + d_2))$ □

ハイパーグラフ $H_1 = (V_1, E_1), H_2 = (V_2, E_2)$

共通部分から作られるハイパーグラフの VC 次元

ハイパーグラフ $H = (V, E)$ を次で定義する

$$V = V_1 \cup V_2, \quad E = \{e_1 \cap e_2 \mid e_1 \in E_1, e_2 \in E_2\}$$

このとき，$\mathrm{vc\text{-}dim}(H) = d$, $\mathrm{vc\text{-}dim}(H_1) = d_1, \mathrm{vc\text{-}dim}(H_2) = d_2$ ならば，

$$d = O((d_1 + d_2) \log(d_1 + d_2))$$

証明：$e_1 \cap e_2 = V - ((V - e_1) \cup (V - e_2))$ という事実を使う

(詳細は演習問題)

目次

今日の内容と次回の予告

幾何ハイパーグラフの特殊性

特に，VC 次元

- VC 次元の定義
- Sauer の補題 (VC 次元の小さいハイパーグラフの性質)
- VC 次元の例
  - 区間，半平面，凸多角形
  - 集合演算との関係

次回の予告

VC 次元が小さいと何がよいのか？ $\rightsquigarrow$ ϵ ネット定理

ϵ ネット定理は，計算幾何学だけではなく，
計算論的学習理論でも使われる強力な道具

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次