離散最適化基礎論　第 2 回
最小包囲円問題 (1)：基本的な性質

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 10 月 20 日

最終更新：2017 年 10 月 23 日　08:44

主題

離散最適化のトピックの１つとして幾何的被覆問題を取り上げ，
その数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

- 「離散最適化」と「計算幾何学」の接点として重要な役割を果たしているから
- 様々なアルゴリズム設計技法・解析技法を紹介できるから
- 応用が多いから

スケジュール 前半 (予定)

1. 幾何的被覆問題とは？ (10/6)
- ⋆ 国内出張のため休み (10/13)
2. 最小包囲円問題 (1)：基本的な性質 (10/20)
3. 最小包囲円問題 (2)：乱択アルゴリズム (10/27)
- ⋆ 文化の日のため休み (11/3)
4. クラスタリング (1)：k-センター (11/10)
5. 幾何ハイパーグラフ (1)：VC 次元 (11/17)
- ⋆ 調布祭 のため 休み (11/24)
6. 幾何ハイパーグラフ (2)：ε ネット (12/1)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

7. 幾何的被覆問題 (1)：線形計画法の利用 (12/8)
8. 幾何的被覆問題 (2)：シフト法 (12/15)
9. 幾何的被覆問題 (3)：局所探索法 (12/22)
10. 幾何的被覆問題 (4)：局所探索法の解析 (1/5)

★ センター試験準備 のため 休み (1/12)

11. 幾何ハイパーグラフ (3)：ε ネット定理の証明 (1/19)
12. 幾何アレンジメント (1)：合併複雑度と ε ネット (1/26)
13. 幾何アレンジメント (2)：合併複雑度の例 (2/2)
14. 最近のトピック (2/9)
15. 期末試験 (2/16？)

注意：予定の変更もありうる

今日の内容

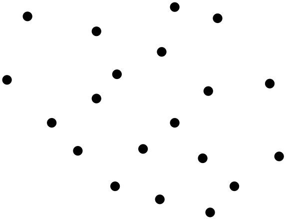
最小包囲円問題に対するアルゴリズムにむけて

- 最小包囲円とは？
- 最小包囲円の性質 (一意性など)
- アルゴリズム

次回：アルゴリズムの乱択化とその解析

連続型円被覆問題

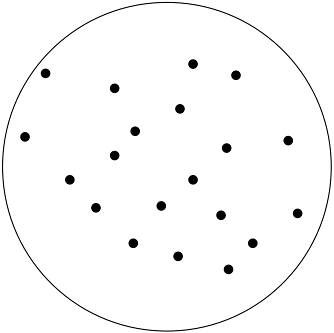
平面上にいくつか点が与えられたとき
いくつかの円によって，点をすべて覆いたい
用いる円の数を最も少なくするにはどうすればよいか？



$\rightsquigarrow$ 与えられた点をすべて含む円を 1 つ考えればよい (最適値 $= 1$)

連続型円被覆問題

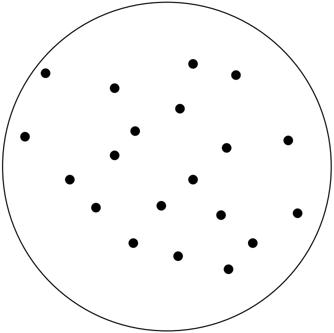
平面上にいくつか点が与えられたとき
いくつかの円によって，点をすべて覆いたい
用いる円の数を最も少なくするにはどうすればよいか？



$\rightsquigarrow$ 与えられた点をすべて含む円を 1 つ考えればよい (最適値 $= 1$)

最小包囲円問題

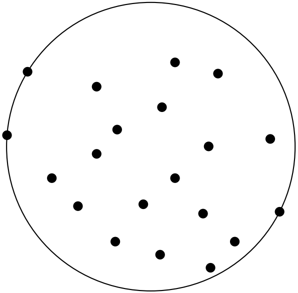
平面上にいくつか点が与えられたとき
それらをすべて含む円の中で面積が最小のものを求めよ



注意：円に対しては，面積の最小化 $\Leftrightarrow$ 半径の最小化

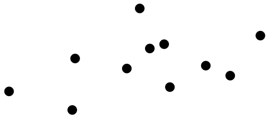
最小包囲円問題

平面上にいくつか点が与えられたとき
それらをすべて含む円の中で面積が最小のものを求めよ

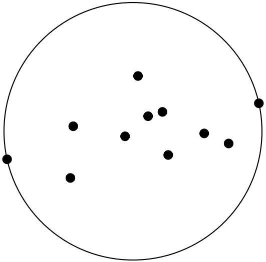


注意：円に対しては，面積の最小化 $\Leftrightarrow$ 半径の最小化

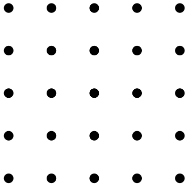
最小包囲円の例 (1)



最小包囲円の例 (1)

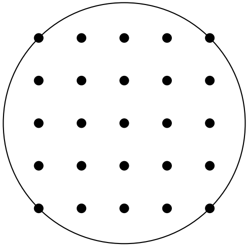


最小包囲円の例 (2)



注意：半径 0，半径 ∞ の円も考えることがある

最小包囲円の例 (2)

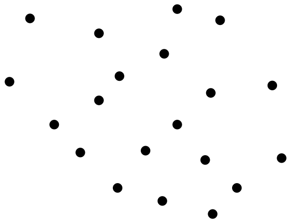


注意：半径 0，半径 ∞ の円も考えることがある

目次

記法

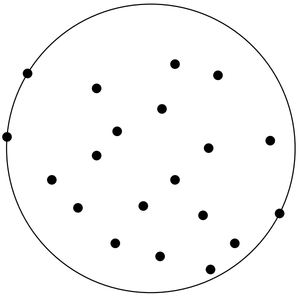
- $P \subseteq \mathbb{R}^2$：与えられる平面上の点の集合
- $\mathrm{sed}(P)$：P の最小包囲円 (smallest enclosing disk)
  - P を含む円で面積最小のもの



「最小包含円」と呼ぶこともある

記法

- $P \subseteq \mathbb{R}^2$：与えられる平面上の点の集合
- $\mathrm{sed}(P)$：P の最小包囲円 (smallest enclosing disk)
  - P を含む円で面積最小のもの



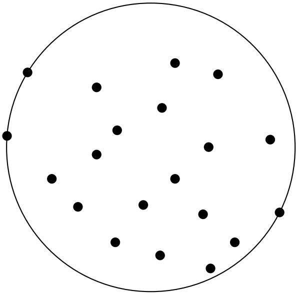
「最小包含円」と呼ぶこともある

点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ (ただし，$P \neq \emptyset$)

命題：最小包囲円の一意性

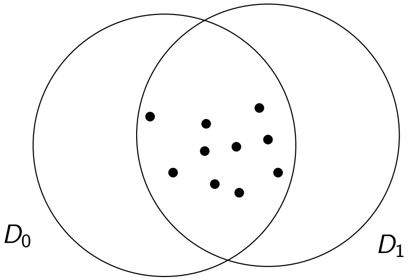
P の最小包囲円はただ 1 つ存在する

この意味で，$\mathrm{sed}(P)$ は well-defined



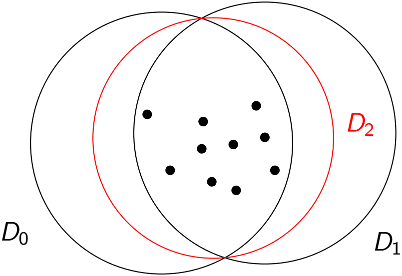
(背理法) P の最小包囲円が 2 つあると仮定する

- その 2 つを D_0, D_1 とする (r = D_0 の半径 = D_1 の半径とする)
- このとき，次の円 D_2 を考える
  - D_2 の中心：D_0 の中心と D_1 の中心の中点
  - D_2 の半径：$\sqrt{r^2 - a^2}$ (ただし，a は D_0 と D_2 の中心間の距離)



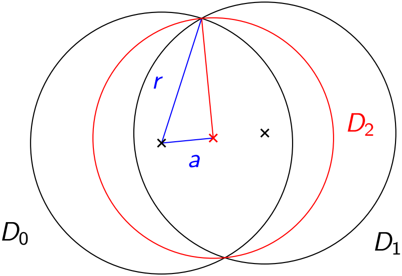
(背理法) P の最小包囲円が 2 つあると仮定する

- その 2 つを D_0, D_1 とする (r = D_0 の半径 = D_1 の半径とする)
- このとき，次の円 D_2 を考える
  - D_2 の中心：D_0 の中心と D_1 の中心の中点
  - D_2 の半径：$\sqrt{r^2 - a^2}$ (ただし，a は D_0 と D_2 の中心間の距離)

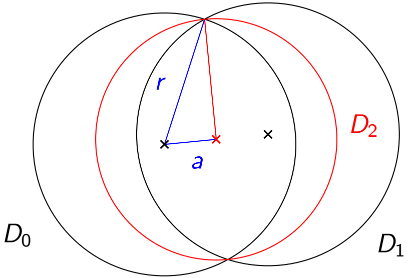


(背理法) P の最小包囲円が 2 つあると仮定する

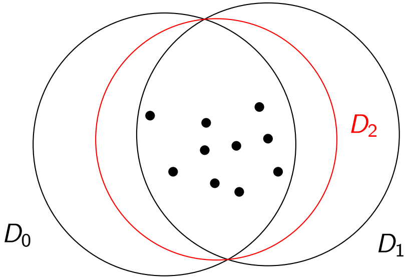
- その 2 つを D_0, D_1 とする (r = D_0 の半径 = D_1 の半径とする)
- このとき，次の円 D_2 を考える
  - D_2 の中心：D_0 の中心と D_1 の中心の中点
  - D_2 の半径：$\sqrt{r^2 - a^2}$ (ただし，a は D_0 と D_2 の中心間の距離)



- D_2 も P を含む　　$(\because P \subseteq D_0 \cap D_1 \subseteq D_2)$
- しかし，D_2 の半径 $= \sqrt{r^2 - a^2} < r = D_0$ の半径
- これは，D_0 が P の最小包囲円であることに矛盾　$\square$



- D_2 も P を含む　　$(\because P \subseteq D_0 \cap D_1 \subseteq D_2)$
- しかし，D_2 の半径 $= \sqrt{r^2 - a^2} < r = D_0$ の半径
- これは，D_0 が P の最小包囲円であることに矛盾　□

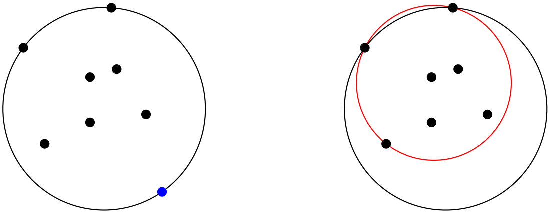


点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ (ただし，$|P| \geq 2$)，点 $p \in P$

命題：最小包囲円の半径の単調性

$\mathrm{sed}(P)$ の半径 $\geq \mathrm{sed}(P - \{p\})$ の半径

証明：P の包囲円は $P - \{p\}$ の包囲円であるから □



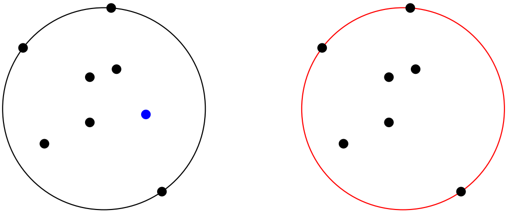
注：$\mathrm{sed}(P) \supseteq \mathrm{sed}(P - \{p\})$ が成り立つわけではない

点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ (ただし，$|P| \geq 2$)，点 $p \in P$

系

$p \in \mathrm{sed}(P - \{p\})$ ならば，$\mathrm{sed}(P) = \mathrm{sed}(P - \{p\})$

証明：$p \in \mathrm{sed}(P - \{p\})$ ならば，$\mathrm{sed}(P - \{p\})$ は P の包囲円

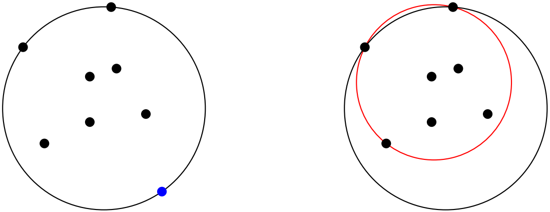


$\therefore$ $\mathrm{sed}(P - \{p\})$ の半径 $\leq$ $\mathrm{sed}(P)$ の半径 $\leq$ $\mathrm{sed}(P - \{p\})$ の半径
$\therefore$ 最小包囲円の一意性より，$\mathrm{sed}(P) = \mathrm{sed}(P - \{p\})$ $\square$

点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ (ただし，$|P| \geq 2$)，点 $p \in P$

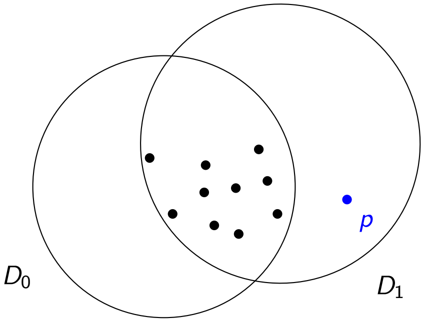
命題：最小包囲円の境界上への拘束

$p \notin \mathrm{sed}(P - \{p\})$ ならば，$\mathrm{sed}(P)$ は p をその境界上に持つ



(背理法) $D_0 = \mathrm{sed}(P - \{p\})$，$D_1 = \mathrm{sed}(P)$ とする

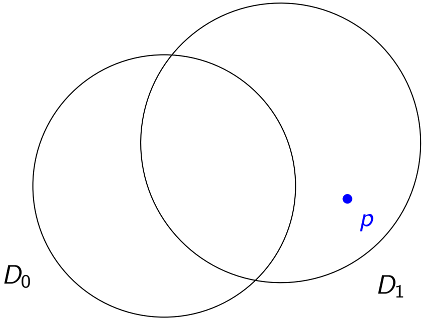
- $p \notin D_0$ と p が D_1 の境界上にないことを仮定する
- このとき，$P - \{p\} \subseteq D_0 \cap D_1$



補足：D_0 の半径 $\leq$ D_1 の半径　　($\because$ 半径の単調性)

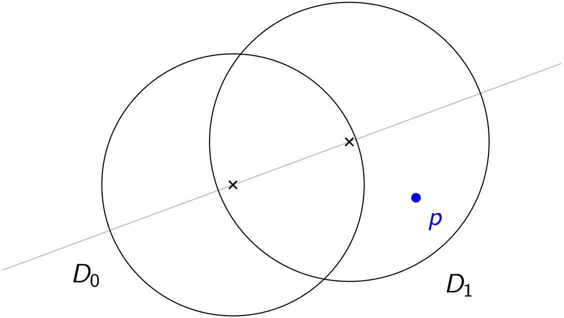
(背理法) $D_0 = \mathrm{sed}(P - \{p\})$，$D_1 = \mathrm{sed}(P)$ とする

- $p \notin D_0$ と p が D_1 の境界上にないことを仮定する
- このとき，$P - \{p\} \subseteq D_0 \cap D_1$

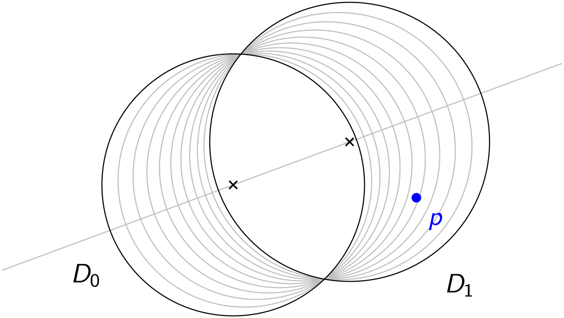


補足：D_0 の半径 $\leq$ D_1 の半径 (∵ 半径の単調性)

- D_0 と D_1 の中心を $\lambda : 1-\lambda$ に内分する点を中心に持ち，半径 $r(\lambda)$ が次の式で定められる円 D_λ を考える
$$r(\lambda)^2 = (1-\lambda)r_0^2 + \lambda r_1^2 - \lambda(1-\lambda)d$$
(ただし，r_0, r_1 はそれぞれ D_0, D_1 の半径，d は D_0, D_1 の中心間距離)
- $0 < \lambda < 1$ のとき，D_λ の半径 $<$ D_1 の半径であり，$D_0 \cap D_1 \subseteq D_\lambda$



- D_0 と D_1 の中心を $\lambda : 1 - \lambda$ に内分する点を中心に持ち，半径 $r(\lambda)$ が次の式で定められる円 D_λ を考える
$$r(\lambda)^2 = (1-\lambda)r_0^2 + \lambda r_1^2 - \lambda(1-\lambda)d$$
(ただし，r_0, r_1 はそれぞれ D_0, D_1 の半径，d は D_0, D_1 の中心間距離)
- $0 < \lambda < 1$ のとき，D_λ の半径 $<$ D_1 の半径であり，$D_0 \cap D_1 \subseteq D_\lambda$

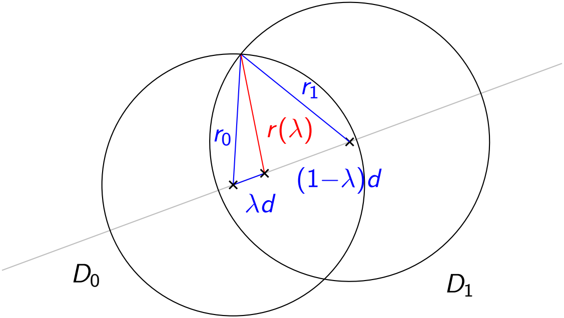


- D_0 と D_1 の中心を $\lambda : 1-\lambda$ に内分する点を中心に持ち，半径 $r(\lambda)$ が次の式で定められる円 D_λ を考える

$$r(\lambda)^2 = (1-\lambda)r_0^2 + \lambda r_1^2 - \lambda(1-\lambda)d$$

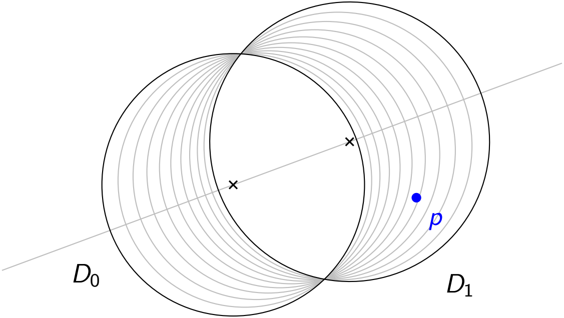
(ただし，r_0, r_1 はそれぞれ D_0, D_1 の半径，d は D_0, D_1 の中心間距離)

- $0 < \lambda < 1$ のとき，D_λ の半径 $<$ D_1 の半径であり，$D_0 \cap D_1 \subseteq D_\lambda$

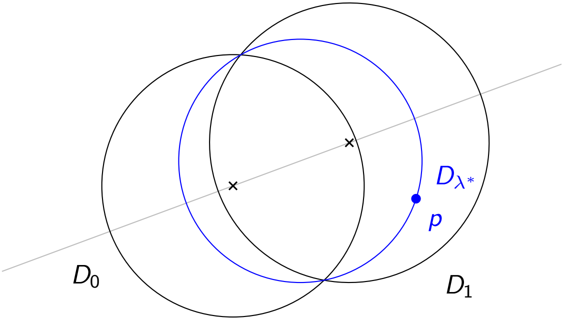


最小包囲円の境界上への拘束：証明 (3)

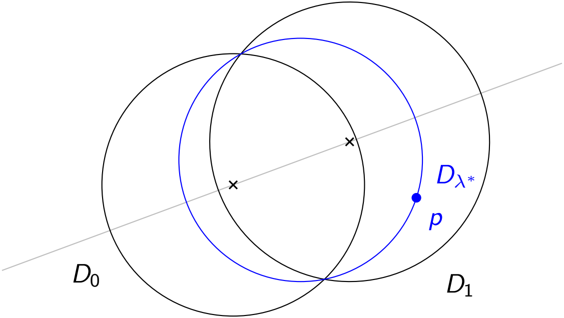
- $p \notin D_0$ かつ $p \in D_1$ なので，ある λ^* に対して，D_{λ^*} は p をその境界上に持つ　　(ただし，$0 < \lambda^* < 1$)



- $p \notin D_0$ かつ $p \in D_1$ なので，ある λ^* に対して，
  D_{λ^*} は p をその境界上に持つ　(ただし，$0 < \lambda^* < 1$)



- つまり，D_{λ^*} の半径 $<$ D_1 の半径
- D_1 が P の最小包囲円であることに矛盾 $\square$



目次

点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ $(|P| \geq 2)$，$p \in P$

ここまでの議論の帰結

まず，$\mathrm{sed}(P - \{p\})$ を考える

1. $p \in \mathrm{sed}(P - \{p\})$ ならば，$\mathrm{sed}(P) = \mathrm{sed}(P - \{p\})$
2. $p \notin \mathrm{sed}(P - \{p\})$ ならば，$\mathrm{sed}(P)$ は p を境界上に持つ

ここから再帰アルゴリズムの構想が得られる

入力：有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ $(|P| \geq 1)$

(1) $|P| = 1$ ならば，$\mathrm{sed}(P) = P$ として，終了

(2) $|P| \geq 2$ ならば，$p \in P$ を任意に選ぶ

(2-1) $\mathrm{sed}(P - \{p\})$ を再帰的に計算

(2-2) $p \in \mathrm{sed}(P - \{p\})$ ならば，$\mathrm{sed}(P) = \mathrm{sed}(P - \{p\})$ として，終了

(2-3) $p \notin \mathrm{sed}(P - \{p\})$ ならば，p を境界に持つ P の最小包囲円を計算し，終了

問題点

「p を境界に持つ P の最小包囲円の計算」をどのように行なえばよいかわからない

別の言い方をすれば，それさえ分かればよい

入力：有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ ($|P| \geq 1$)

(1) $|P| = 1$ ならば，$\mathrm{sed}(P) = P$ として，終了

(2) $|P| \geq 2$ ならば，$p \in P$ を任意に選ぶ

(2-1) $\mathrm{sed}(P - \{p\})$ を再帰的に計算

(2-2) $p \in \mathrm{sed}(P - \{p\})$ ならば，$\mathrm{sed}(P) = \mathrm{sed}(P - \{p\})$ として，終了

(2-3) $p \notin \mathrm{sed}(P - \{p\})$ ならば，p を境界に持つ P の最小包囲円を計算し，終了

問題点

「p を境界に持つ P の最小包囲円の計算」をどのように行なえばよいかわからない

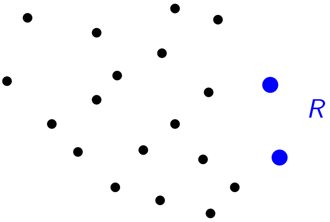
別の言い方をすれば，それさえ分かればよい

目次

記法

- $P \subseteq \mathbb{R}^2$：与えられる平面上の点の集合
- $R \subseteq P$：部分集合
- $\mathrm{sed}(P, R)$：R を境界上に持つ P の包囲円の中で，面積最小のもの

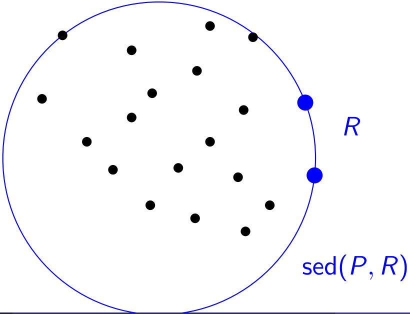
R 以外の点が境界にあってもよい



記法

- $P \subseteq \mathbb{R}^2$：与えられる平面上の点の集合
- $R \subseteq P$：部分集合
- $\mathrm{sed}(P, R)$：R を境界上に持つ P の包囲円の中で，面積最小のもの

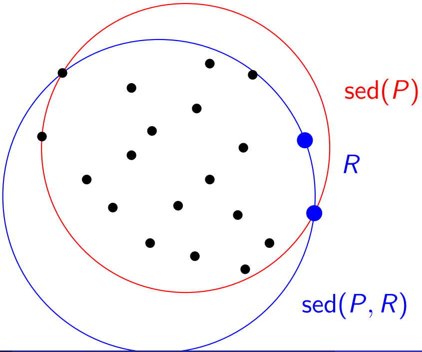
R 以外の点が境界にあってもよい



記法

- $P \subseteq \mathbb{R}^2$：与えられる平面上の点の集合
- $R \subseteq P$：部分集合
- $\mathrm{sed}(P, R)$：R を境界上に持つ P の包囲円の中で，面積最小のもの

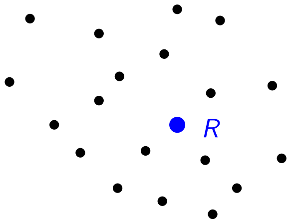
R 以外の点が境界にあってもよい



記法

- $P \subseteq \mathbb{R}^2$：与えられる平面上の点の集合
- $R \subseteq P$：部分集合
- $\mathrm{sed}(P, R)$：R を境界上に持つ P の包囲円の中で，面積最小のもの

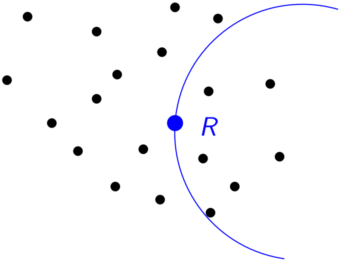
注意：$\mathrm{sed}(P, R)$ は存在しないかもしれない



記法

- $P \subseteq \mathbb{R}^2$：与えられる平面上の点の集合
- $R \subseteq P$：部分集合
- $\mathrm{sed}(P, R)$：R を境界上に持つ P の包囲円の中で，面積最小のもの

注意：$\mathrm{sed}(P, R)$ は存在しないかもしれない



命題：境界に拘束のある最小包囲円の性質 (1)

点集合 P ($P \neq \emptyset$)，部分集合 $R \subseteq P$

1. $\mathrm{sed}(P, R)$ は存在するならば，ただ 1 つ存在する

命題：境界に拘束のある最小包囲円の性質 (2)

点集合 P ($|P| \geq 2$)，部分集合 $R \subseteq P$，点 $p \in P - R$

1. $\mathrm{sed}(P - \{p\}, R)$ が存在し，$p \in \mathrm{sed}(P - \{p\}, R)$ ならば，
   $\mathrm{sed}(P, R) = \mathrm{sed}(P - \{p\}, R)$
2. $\mathrm{sed}(P - \{p\}, R)$ が存在し，$p \notin \mathrm{sed}(P - \{p\}, R)$ ならば，
   $\mathrm{sed}(P, R \cup \{p\})$ も存在するとき，
   $\mathrm{sed}(P, R) = \mathrm{sed}(P, R \cup \{p\})$

証明は演習問題 ($\mathrm{sed}(P)$ に対する証明と同様の方針で考えればよい)

入力：有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ ($|P| \geq 1$)，$R \subseteq P$

(1) $|P| \leq 2$ ならば，$\mathrm{sed}(P, R)$ を直接計算して，終了

(2) $|R| \geq 3$ ならば，$\mathrm{sed}(P, R)$ を直接計算して，終了

(3) $|P| \geq 3$ かつ $|R| \leq 2$ ならば，$p \in P - R$ を任意に選ぶ

(3-1) $\mathrm{sed}(P - \{p\}, R)$ を再帰的に計算 (存在しないならば終了)

(3-2) $\mathrm{sed}(P - \{p\}, R)$ が存在し，$p \in \mathrm{sed}(P - \{p\}, R)$ ならば，
$\mathrm{sed}(P, R) = \mathrm{sed}(P - \{p\}, R)$ として，終了

(3-3) $\mathrm{sed}(P - \{p\}, R)$ が存在し，$p \notin \mathrm{sed}(P - \{p\}, R)$ ならば，
$\mathrm{sed}(P, R \cup \{p\})$ を再帰的に計算して，
$\mathrm{sed}(P, R) = \mathrm{sed}(P, R \cup \{p\})$ として，終了

観察

- 前ページの命題より，このアルゴリズムの出力は正しい
- 再帰呼出において，$|P|$ が減るか，または，$|R|$ が増えるので，アルゴリズムは必ず終了する

入力：有限点集合 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ ($|P| \geq 1$)，$R \subseteq P$

(1) $|P| \leq 2$ ならば，$\mathrm{sed}(P, R)$ を直接計算して，終了

(2) $|R| \geq 3$ ならば，$\mathrm{sed}(P, R)$ を直接計算して，終了

(3) $|P| \geq 3$ かつ $|R| \leq 2$ ならば，$p \in P - R$ を任意に選ぶ

(3-1) $\mathrm{sed}(P - \{p\}, R)$ を再帰的に計算 (存在しないならば終了)

(3-2) $\mathrm{sed}(P - \{p\}, R)$ が存在し，$p \in \mathrm{sed}(P - \{p\}, R)$ ならば，
$\mathrm{sed}(P, R) = \mathrm{sed}(P - \{p\}, R)$ として，終了

(3-3) $\mathrm{sed}(P - \{p\}, R)$ が存在し，$p \notin \mathrm{sed}(P - \{p\}, R)$ ならば，
$\mathrm{sed}(P, R \cup \{p\})$ を再帰的に計算して，
$\mathrm{sed}(P, R) = \mathrm{sed}(P, R \cup \{p\})$ として，終了

P の最小包囲円を求めるためには？

$R = \emptyset$ として，このアルゴリズムを動かせばよい

ステップ (1), (2) の「直接計算」は演習問題

境界に拘束のある最小包囲円を求めるアルゴリズム：計算量 (1)

次の量 $t(n,k)$ を考える

$$t(n,k) \quad = \quad (|P| = n, |R| = k \text{ のときの最悪計算量})$$

(1) $n \leq 2$ のとき，$t(n,k) = O(1)$
(2) $k \geq 3$ のとき，$t(n,k) = O(n)$
(3) $n \geq 3$ かつ $k \leq 2$ のとき，
最悪の場合を考えると，$\mathrm{sed}(P,R)$ の計算のために
$\mathrm{sed}(P - \{p\}, R)$ と $\mathrm{sed}(P, R \cup \{p\})$ を計算するので

$$t(n,k) \leq O(1) + t(n-1,k) + t(n,k+1)$$

これを解く

$n \geq 3$ かつ $k = 2$ のとき，

$$\begin{aligned} t(n,2) &\leq O(1) + t(n-1,2) + t(n,3) \\ &= O(1) + t(n-1,2) + O(n) \\ &= t(n-1,2) + O(n) \end{aligned}$$

したがって，$t(n,2) \leq O(n^2)$

$n \geq 3$ かつ $k = 1$ のとき，

$$\begin{array}{rcl} t(n,1) & \leq & O(1) + t(n-1,1) + t(n,2) \\ & = & O(1) + t(n-1,1) + O(n^2) \\ & = & t(n-1,1) + O(n^2) \end{array}$$

したがって，$t(n,1) \leq O(n^3)$

$n \geq 3$ かつ $k = 0$ のとき，

$$\begin{aligned} t(n,0) &\leq O(1) + t(n-1,0) + t(n,1) \\ &= O(1) + t(n-1,0) + O(n^3) \\ &= t(n-1,0) + O(n^3) \end{aligned}$$

したがって，$t(n,0) \leq O(n^4)$

結論

平面上に与えられた n 個の点の最小包囲円は $O(n^4)$ 時間で計算できる

この結論は「当たり前」(もっと簡単なアルゴリズムで実現できる)

目次

今日の内容

最小包囲円問題に対するアルゴリズムにむけて

- 最小包囲円とは？
- 最小包囲円の性質 (一意性など)
- アルゴリズム

次回の予告

アルゴリズムの乱択化とその解析

- 「$p \in P - R$ の選択」を確率的に行うことで, 計算量の期待値が $O(n)$ になる

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次