

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2018 年 2 月 2 日

最終更新 : 2018 年 2 月 2 日 01:31

## 主題

離散最適化のトピックの 1 つとして幾何的被覆問題をとり上げ、その数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

## なぜ講義で取り扱う？

- ▶ 「離散最適化」と「計算幾何学」の接点として重要な役割を果たしているから
- ▶ 様々なアルゴリズム設計技法・解析技法を紹介できるから
- ▶ 応用が多いから

## スケジュール 前半

- |   |                                   |         |
|---|-----------------------------------|---------|
| 1 | 幾何的被覆問題とは？                        | (10/6)  |
| * | 国内出張のため休み                         | (10/13) |
| 2 | 最小包囲円問題 (1) : 基本的な性質              | (10/20) |
| 3 | 最小包囲円問題 (2) : 乱択アルゴリズム            | (10/27) |
| * | 文化の日のため休み                         | (11/3)  |
| 4 | クラスタリング (1) : $k$ -センター           | (11/10) |
| 5 | 幾何ハイパーグラフ (1) : VC 次元             | (11/17) |
| * | 調布祭のため休み                          | (11/24) |
| 6 | 幾何ハイパーグラフ (2) : $\varepsilon$ ネット | (12/1)  |

## スケジュール 後半

- |    |  |         |
|----|--|---------|
| 7  | 幾何的被覆問題 (1) : 線形計画法の利用                   | (12/8)  |
| 8  | 幾何的被覆問題 (2) : シフト法                       | (12/15) |
| 9  | 幾何的被覆問題 (3) : 局所探索法 (準備)                 | (12/22) |
| 10 | 幾何的被覆問題 (4) : 局所探索法                      | (1/5)   |
| *  | センター試験準備のため休み                            | (1/12)  |
| 11 | 幾何ハイパーグラフ (3) : $\varepsilon$ ネット定理の証明   | (1/19)  |
| 12 | 幾何アレンジメント (1) : 浅胞複雑度                    | (1/26)  |
| 13 | 幾何アレンジメント (2) : 浅胞複雑度と $\varepsilon$ ネット | (2/2)   |
| 14 | 休み                                       | (2/9)   |
| 15 | 期末試験                                     | (2/16)  |

注意 : 予定の変更もありうる

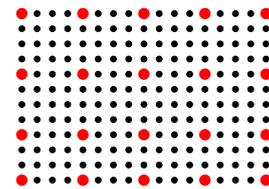
## 目次

- 1 前回の復習
- 2 Sauer の補題の強化と個別代表系
- 3 Hall の結婚定理
- 4 Clarkson-Shor の技法を用いた証明

ハイパーグラフに対する  $\varepsilon$  ネットハイパーグラフ  $H = (V, E)$ , 実数  $\varepsilon \in [0, 1]$ 定義 : ハイパーグラフに対する  $\varepsilon$  ネット ( $\varepsilon$ -net) $H$  に対する  $\varepsilon$  ネットとは, 次を満たす集合  $N \subseteq V$  のこと

$$|e| \geq \varepsilon \cdot |V| \text{ を満たす任意の } e \in E \text{ に対して, } N \cap e \neq \emptyset$$

$$|V| = 204, \varepsilon = 1/8 \text{ とすると, } \varepsilon \cdot |V| = 25.5$$

 $\rightsquigarrow$  1/8 ネット

## 問題

ハイパーグラフ  $H = (V, E)$ , 実数  $\varepsilon \in [0, 1]$ 

## 問題

 $H$  の  $\varepsilon$  ネットとして, どれくらい小さいものが作れるか?

- ▶ 小さければ小さいほどよい
- ▶ 小ささは  $\varepsilon$  に依存する?

## 問題に対する解答

ハイパーグラフ  $H = (V, E)$ , 実数  $\varepsilon \in (0, 1]$ 定理 : 小さな  $\varepsilon$  ネットの存在性

— 第 6 回講義で証明済

要素数  $O\left(\frac{1}{\varepsilon} \log |E|\right)$  の  $\varepsilon$  ネットが存在する定理 :  $\varepsilon$  ネット定理

— 第 11 回講義で証明済

要素数  $O\left(\frac{d}{\varepsilon} \log \frac{d}{\varepsilon}\right)$  の  $\varepsilon$  ネットが存在する ただし,  $d = \text{vc-dim}(H)$  $\therefore$  VC 次元が定数  $\Rightarrow \varepsilon$  ネットの最小要素数は  $|V|$  や  $|E|$  に依存しない!

ハイパーグラフ  $H = (V, E)$ , 実数  $\epsilon \in (0, 1]$

定理：ε ネット定理 (Haussler, Welzl '87)

要素数  $O\left(\frac{d}{\epsilon} \log \frac{d}{\epsilon}\right)$  の ε ネットが存在する ただし,  $d = \text{vc-dim}(H)$

H が幾何的に得られる場合, 要素数を更に小さくできることもある

- ▶ 半平面から得られる場合: 要素数 =  $O\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$  (Koslós, Pach, Woeginger '92)
- ▶ 円から得られる場合: 要素数 =  $O\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$  (Matoušek, Seidel, Welzl '90)
- ▶ 軸平行長方形から得られる場合: 要素数 =  $O\left(\frac{1}{\epsilon} \log \log \frac{1}{\epsilon}\right)$  (Aronov, Ezra, Sharir '10)

浅胞複雑性と ε ネット

ハイパーグラフ  $H = (V, E)$ ,  $\text{vc-dim}(H) = d$  は定数

最適 ε ネット定理

要素数  $O\left(\frac{1}{\epsilon} \log \varphi_H\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$  の ε ネットが存在する  
ただし,  $\varphi_H(n)$  は H の浅胞複雑性

最適 ε ネット定理を誰が証明したのか, 単一の論文を挙げるのは難しいが, 基本的な考え方は次の論文に基づく

- ▶ B. Aronov, E. Ezra, and M. Sharir: Small-size ε-nets for axis-parallel rectangles and boxes. SIAM Journal on Computing 39 (2010) 3248–3282.
- ▶ K. Varadarajan: Weighted geometric set cover via quasi uniform sampling. In Proc. STOC 2010, pp. 641–648.
- ▶ T.M. Chan, E. Grant, J. Könemann, and M. Sharpe: Weighted capacitated, priority, and geometric set cover via improved quasi-uniform sampling. In Proc. SODA 2012, pp. 1576–1585.

「最適 ε ネット定理」としては, 次の論文に証明がある

- ▶ N.H. Mustafa, K. Dutta, and A. Ghosh: A simple proof of optimal epsilon-nets. Combinatorica, to appear.

円板の浅胞複雑性

目標

次のハイパーグラフ  $H = (V, E)$  の浅胞複雑性が定数であることの証明

- ▶  $V \subseteq \mathbb{R}^2$
- ▶  $E = \{V \cap d \mid d \in \mathcal{D}\}$  ただし,  $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$  は閉円板の集合

より具体的な目標

任意の  $X \subseteq V$  と任意の正整数  $k$  に対して, 次を証明

$$|E|_X^{\leq k} = O(k^2|X|)$$

X は固定して,  $k = 1$  の場合,  $k = 2$  の場合,  $k = 3$  の場合,  $k \geq 4$  の場合を分けて考える

今から行うこと

設定

ハイパーグラフ  $H = (V, E)$ ,  $\text{vc-dim}(H) = d \geq 2$  は定数

- ▶ 任意の  $X \subseteq V$  と任意の  $k \in \{1, 2, \dots, d\}$  に対して,  $|E|_X^{\leq k} = O(|X|)$

H が円板から得られるとき,  $d = 3$  (演習問題 5.10.1)

目標

任意の  $X \subseteq V$  と任意の正整数  $k \geq d$  に対して, 次を証明

$$|E|_X^{\leq k} = O(k^{d-1}|X|)$$

以下, X は固定する

疑問

要素数が  $O\left(\frac{d}{\epsilon} \log \frac{d}{\epsilon}\right)$  よりも小さい ε ネットはどのような場合に存在するのか?

この問題に対して, 近年, 大きな進展があった

回答の1つ

ハイパーグラフの浅胞複雑性 (shallow-cell complexity) が関係している

浅胞複雑性

ハイパーグラフ  $H = (V, E)$

記法

任意の  $X \subseteq V$  と任意の正整数  $k$  に対して

$$|E|_X^{\leq k} = \{e' \mid e' \in E|_X, |e'| \leq k\} \\ = \{e \cap X \mid e \in E, |e \cap X| \leq k\}$$

浅胞複雑性 (shallow-cell complexity) とは?

H の浅胞複雑性とは, 関数  $\varphi_H: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  で, 次を満たすもの

ある定数  $\ell$  が存在して,  
任意の  $X \subseteq V$  と任意の正整数  $k$  に対して

$$|E|_X^{\leq k} \leq |X| \cdot \varphi_H(|X|) \cdot k^\ell$$

円板の浅胞複雑性：前回行ったこと

目標

次のハイパーグラフ  $H = (V, E)$  の浅胞複雑性が定数であることの証明

- ▶  $V \subseteq \mathbb{R}^2$
- ▶  $E = \{V \cap d \mid d \in \mathcal{D}\}$  ただし,  $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$  は閉円板の集合

より具体的な目標

任意の  $X \subseteq V$  と任意の正整数  $k$  に対して, 次を証明

$$|E|_X^{\leq k} = O(k^2|X|)$$

X は固定して,  $k = 1$  の場合,  $k = 2$  の場合,  $k = 3$  の場合,  $|E|_X^{\leq k} = O(|X|)$

目次

- 1 前回の復習
- 2 Sauer の補題の強化と個別代表系
- 3 Hall の結婚定理
- 4 Clarkson–Shor の技法を用いた証明

有限集合  $A$ , 自然数  $k$

記法: 要素数  $k$  の部分集合全体から成る集合族

$$\binom{A}{k} = \{B \mid B \subseteq A, |B| \leq k\}$$

例:  $A = \{a, b, c, d\}$  のとき,

$$\begin{aligned} \binom{A}{1} &= \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\} \\ \binom{A}{2} &= \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\} \\ \binom{A}{3} &= \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\} \end{aligned}$$

補題

ハイパーグラフ  $H = (V, E)$ ,  $\text{vc-dim}(H) \leq d$

補題 (Sauer の補題の強化)

$$|E| \leq \sum_{e \in E} \binom{e}{0} \cup \binom{e}{1} \cup \binom{e}{2} \cup \dots \cup \binom{e}{d}$$

任意の  $E' \subseteq E$  に対して,  $H' = (V, E')$  とすると,  
 $\text{vc-dim}(H') \leq \text{vc-dim}(H) = d$

補題の系

任意の  $E' \subseteq E$  に対して,

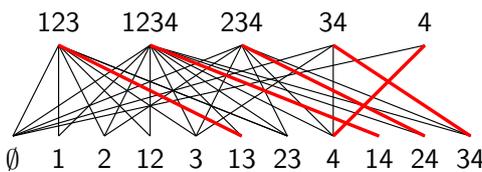
$$|E'| \leq \sum_{e \in E'} \binom{e}{0} \cup \binom{e}{1} \cup \binom{e}{2} \cup \dots \cup \binom{e}{d}$$

個別代表系

ハイパーグラフ  $H = (V, E)$ ,  $\text{vc-dim}(H) \leq d$

補題の系の系 (個別代表系)

各  $e \in E$  に対して,  
 要素数  $d$  以下の異なる集合  $B(e) \subseteq V$  を割り当てられる



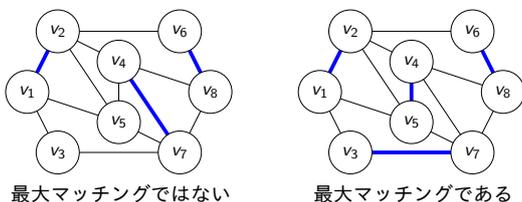
「補題の系」と「二部グラフに対する Hall の結婚定理」を組み合わせると証明できる

最大マッチング

無向グラフ  $G = (V, E)$

最大マッチングとは?

$G$  の最大マッチングとは  $G$  のマッチング  $M \subseteq E$  で,  
 $G$  の任意のマッチング  $M'$  に対して  $|M| \geq |M'|$  を満たすもの



補題

ハイパーグラフ  $H = (V, E)$ ,  $\text{vc-dim}(H) \leq d$

補題 (Sauer の補題の強化)

$$|E| \leq \sum_{e \in E} \left( \binom{e}{0} \cup \binom{e}{1} \cup \binom{e}{2} \cup \dots \cup \binom{e}{d} \right)$$

実際, 次のように, この補題から Sauer の補題が得られる

$$\begin{aligned} |E| &\leq \sum_{e \in E} \left( \binom{e}{0} \cup \binom{e}{1} \cup \binom{e}{2} \cup \dots \cup \binom{e}{d} \right) \\ &= \sum_{e \in E} \sum_{j=0}^d \binom{e}{j} = \sum_{j=0}^d \sum_{e \in E} \binom{e}{j} \leq \sum_{j=0}^d \sum_{j=0}^d \binom{V}{j} = \sum_{j=0}^d \binom{|V|}{j} \end{aligned}$$

補題の証明は Sauer の補題と同じように行なえる (演習問題)

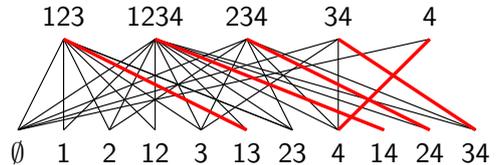
二部グラフを考える

補題の系

任意の  $E' \subseteq E$  に対して,

$$|E'| \leq \sum_{e \in E'} \left( \binom{e}{0} \cup \binom{e}{1} \cup \binom{e}{2} \cup \dots \cup \binom{e}{d} \right)$$

$E = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4\}, \{4\}\}$ , VC 次元 = 2

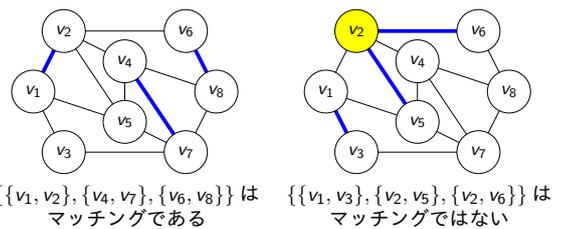


グラフにおけるマッチング

無向グラフ  $G = (V, E)$

マッチングとは?

$G$  のマッチングとは辺部分集合  $M \subseteq E$  で,  
 $M$  のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの



マッチングの辺  $e \in M$  は  $e$  の端点を飽和する

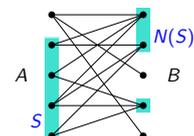
二部グラフに対する Hall の結婚定理

二部グラフ  $G = (V, E)$ , 部集合  $A, B$

Hall の結婚定理

任意の頂点集合  $S \subseteq A$  に対して,  $|S| \leq |N(S)| \Rightarrow$   
 $A$  の頂点をすべて飽和するマッチングを  $G$  が持つ

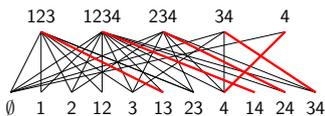
例:



ハイパーグラフ  $H = (V, E)$ ,  $\text{vc-dim}(H) \leq d$

補題の系の系 (個別代表系)

各  $e \in E$  に対して,  
要素数  $d$  以下の異なる集合  $B(e) \subseteq V$  を割り当てられる



補題の系

任意の  $E' \subseteq E$  に対して,

$$|E'| \leq \left| \bigcup_{e \in E'} \left( \binom{e}{0} \cup \binom{e}{1} \cup \binom{e}{2} \cup \dots \cup \binom{e}{d} \right) \right|$$

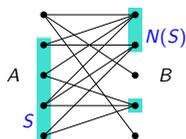
二部グラフに対する Hall の結婚定理

二部グラフ  $G = (V, E)$ , 部集合  $A, B$

Hall の結婚定理

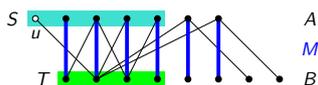
任意の頂点集合  $S \subseteq A$  に対して,  $|S| \leq |N(S)| \Rightarrow$   
 $A$  の頂点をすべて飽和する マッチングを  $G$  が持つ

例 :



Hall の結婚定理 : 証明 (2)

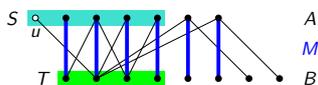
- ▶  $S = \{a \in A \mid u \text{ から始まるある交互道が } a \text{ で終わる}\}$  とする
- ▶  $T = \{b \in B \mid u \text{ から始まるある交互道が } b \text{ で終わる}\}$  とする



Hall の結婚定理 : 証明 (4)

観察 2 :  $T$  の頂点には  $M$  の辺が接続

- ▶ そうでないとすると増加道が存在し,  $M$  の最大性に矛盾



ここまでの結論 :  $|T| = |S - \{u\}| = |S| - 1 < |S|$

- 1 前回の復習
- 2 Sauer の補題の強化と個別代表系
- 3 Hall の結婚定理
- 4 Clarkson-Shor の技法を用いた証明

Hall の結婚定理 : 証明 (1)

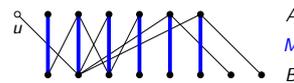
二部グラフ  $G = (V, E)$ , 部集合  $A, B$

Hall の結婚定理

任意の頂点集合  $S \subseteq A$  に対して,  $|S| \leq |N(S)| \Rightarrow$   
 $A$  の頂点をすべて飽和する マッチングを  $G$  が持つ

証明 : そのようなマッチングを持たないとする

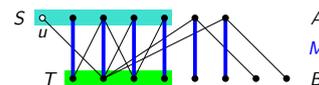
- ▶  $M$  を  $G$  の最大マッチングとする
- ▶ 仮定より,  $M$  が飽和しない  $A$  の頂点が存在. それを  $u \in A$  とする
- ▶ ... ← **今からここを埋める**
- ▶ したがって, そのような  $S$  に対して  $|S| > |N(S)|$



Hall の結婚定理 : 証明 (3)

観察 1 :  $S - \{u\}$  の頂点には  $M$  の辺が接続

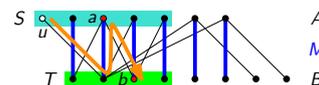
- ▶  $S$  の構成法からすぐに分かる



Hall の結婚定理 : 証明 (5)

観察 3 :  $N(S) \subseteq T$

- ▶  $b \in N(S)$  とする
- ▶ つまり, ある  $a \in S$  が存在して  $\{a, b\} \in E$
- ▶  $\{a, b\} \in M$  ならば,  $u$  から  $b$  を経由して  $a$  に至る交互道が存在
- ▶  $\{a, b\} \in E - M$  ならば,  $u$  から  $a$  を経由して  $b$  に至る交互道が存在
- ▶  $\therefore$  いずれにしても  $u$  から  $b$  へ至る交互道が存在
- ▶  $\therefore b \in T$



ここまでの結論 :  $|N(S)| \leq |T| < |S|$

二部グラフ  $G = (V, E)$ , 部集合  $A, B$

## Hall の結婚定理

任意の頂点集合  $S \subseteq A$  に対して,  $|S| \leq |N(S)| \Rightarrow A$  の頂点をすべて飽和するマッチングを  $G$  が持つ

証明：そのようなマッチングを持たないとする

- ▶  $M$  を  $G$  の最大マッチングとする
- ▶ 仮定より,  $M$  が飽和しない  $A$  の頂点が存在. それを  $u \in A$  とする
- ▶  $S = \{a \in A \mid u \text{ から始まるある交互道が } a \text{ で終わる}\}$  とする
- ▶  $T = \{b \in B \mid u \text{ から始まるある交互道が } b \text{ で終わる}\}$  とする
- ▶  $T$  の頂点と  $S - \{u\}$  の頂点には  $M$  の辺が接続 (観察 1 と 2)
- ▶ また,  $N(S) \subseteq T$  (観察 3)
- ▶ したがって, そのような  $S$  に対して  $|S| > |S| - 1 = |T| \geq |N(S)|$  □

## 今から行うこと (再掲)

## 設定

ハイパーグラフ  $H = (V, E)$ ,  $\text{vc-dim}(H) = d \geq 2$  は定数

- ▶ 任意の  $X \subseteq V$  と任意の  $k \in \{1, 2, \dots, d\}$  に対して,  $|E|_{X \leq k}^{\leq k} = O(|X|)$

$H$  が円板から得られるとき,  $d = 3$  (演習問題 5.10.1)

## 目標

任意の  $X \subseteq V$  と任意の正整数  $k \geq d$  に対して, 次を証明

$$|E|_{X \leq k}^{\leq k} = O(k^{d-1}|X|)$$

以下,  $X$  と  $k \geq d$  は固定する

## 証明の完結 (1)

## 核となるアイデア

$X$  の各要素を確率  $1/k$  で独立に選ぶ

- ▶ 選ばれた要素の集合を  $\tilde{X}$  とする
- ▶ 各  $e \in E|_{X \leq k}^{\leq k}$  に対して, 次の条件を満たす  $e$  をよい辺と呼ぶ
  - ▶  $B(e)$  の要素がすべて選ばれる
  - ▶ それ以外の要素がどれも選ばれない

## 考えるもの

- ▶  $E$  [よい辺の総数]

## 証明の完結 (3)

選ばれた要素の集合  $\tilde{X} \subseteq X$  に対して

- ▶  $e$  がよい辺  $\Leftrightarrow |e \cap \tilde{X}| = |B(e)| \leq d$
- ▶  $\therefore$  よい辺の総数  $\leq |E|_{\tilde{X} \leq d}^{\leq d} = O(|\tilde{X}|)$

したがって

- ▶  $E$  [よい辺の総数]  $= E[O(|\tilde{X}|)] = \frac{1}{k} O(|X|)$

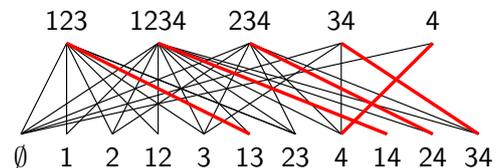
- 1 前回の復習
- 2 Sauer の補題の強化と個別代表系
- 3 Hall の結婚定理
- 4 Clarkson–Shor の技法を用いた証明

## 個別代表系 (再掲)

ハイパーグラフ  $H = (V, E)$ ,  $\text{vc-dim}(H) \leq d$

## 補題の系の系 (個別代表系)

各  $e \in E$  に対して, 要素数  $d$  以下の異なる集合  $B(e) \subseteq V$  を割り当てられる



「補題の系」と「二部グラフに対する Hall の結婚定理」を組み合わせると証明できる

## 証明の完結 (2)

- ▶ 任意の辺  $e \in E|_{X \leq k}^{\leq k}$  に対して

$$\begin{aligned} \Pr(e \text{ がよい辺}) &= \left(\frac{1}{k}\right)^{|B(e)|} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{|e - B(e)|} \\ &\geq \left(\frac{1}{k}\right)^{|B(e)|} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k - |B(e)|} \\ &\geq \left(\frac{1}{k}\right)^d \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-d} \end{aligned}$$

- ▶ したがって,  $B(e)$  は  $e$  によって異なるので,

$$E[\text{よい辺の総数}] = \sum_{e \in E|_{X \leq k}^{\leq k}} \Pr(e \text{ がよい辺}) \geq |E|_{X \leq k}^{\leq k} \left(\frac{1}{k}\right)^d \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-d}$$

## 証明の完結 (3)

総合すると,

$$\begin{aligned} |E|_{X \leq k}^{\leq k} \left(\frac{1}{k}\right)^d \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-d} &\leq \frac{1}{k} O(|X|) \\ \therefore |E|_{X \leq k}^{\leq k} &\leq k^{d-1} \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-d} O(|X|) \\ &= k^{d-1} \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-d} O(|X|) \\ &\leq k^{d-1} e^{(k-d)/(k-1)} O(|X|) \\ &= O(k^{d-1}|X|) \end{aligned}$$

これで証明終了