離散最適化基礎論　第 10 回
幾何的被覆問題 (4)：局所探索法

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2018 年 1 月 5 日

最終更新：2018 年 1 月 8 日　11:42

概要

主題

離散最適化のトピックの 1 つとして幾何的被覆問題を取り上げ，
その数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

- 「離散最適化」と「計算幾何学」の接点として重要な役割を果たしているから
- 様々なアルゴリズム設計技法・解析技法を紹介できるから
- 応用が多いから

スケジュール 前半

1. 幾何的被覆問題とは？ (10/6)
- ⋆ 国内出張のため休み (10/13)
2. 最小包囲円問題 (1)：基本的な性質 (10/20)
3. 最小包囲円問題 (2)：乱択アルゴリズム (10/27)
- ⋆ 文化の日のため休み (11/3)
4. クラスタリング (1)：k-センター (11/10)
5. 幾何ハイパーグラフ (1)：VC 次元 (11/17)
- ⋆ 調布祭 のため 休み (11/24)
6. 幾何ハイパーグラフ (2)：ε ネット (12/1)

スケジュール 後半 (予定)

7. 幾何的被覆問題 (1)：線形計画法の利用 (12/8)
8. 幾何的被覆問題 (2)：シフト法 (12/15)
9. 幾何的被覆問題 (3)：局所探索法 (準備) (12/22)
10. 幾何的被覆問題 (4)：局所探索法 (1/5)
- ⋆ センター試験準備 のため 休み (1/12)
11. 幾何ハイパーグラフ (3)：ε ネット定理の証明 (1/19)
12. 幾何アレンジメント (1)：合併複雑度と ε ネット (1/26)
13. 幾何アレンジメント (2)：合併複雑度の例 (2/2)
14. 最近のトピック (2/9)
15. 期末試験 (2/16？)

注意：予定の変更もありうる

今日の内容

幾何的被覆問題に対する近似アルゴリズム

局所探索法 (local search) を利用したもの

- 前回の「平面的分離集合定理」を解析に用いる

今回紹介する内容は主に次の論文に基づく

- N. H. Mustafa and S. Ray: Improved results on geometric hitting set problems. Discrete & Computational Geometry **44** (2010) 883–895.

第 1 回講義にアナウンス：今後の予定

この講義では，いくつかの技法を見る (予定である)

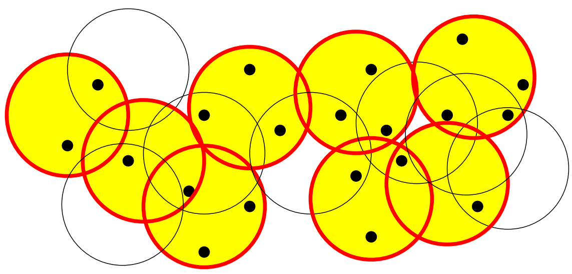
- $\boxed{\text{離散型単位円被覆問題：多項式時間 } O(1) \text{ 近似アルゴリズム}}$ (Brönnimann, Goodrich '95)
  ⇝ アルゴリズム：線形計画法の利用
  利点：他の図形にも広く応用可能
- $\boxed{\text{連続型単位円被覆問題：多項式時間 } 1+\varepsilon \text{ 近似アルゴリズム}}$ (Hochbaum, Maass '85)
  ⇝ アルゴリズム：シフト法
  利点：他の問題にも広く応用可能
- $\boxed{\text{離散型単位円被覆問題：多項式時間 } 1+\varepsilon \text{ 近似アルゴリズム}}$ (Mustafa, Ray '10)
  ⇝ アルゴリズム：局所探索法
  利点：単純

その他にも関連する話題に触れる

復習：幾何的被覆問題の例 (1)

離散型単位円被覆問題 (discrete unit disk cover problem)

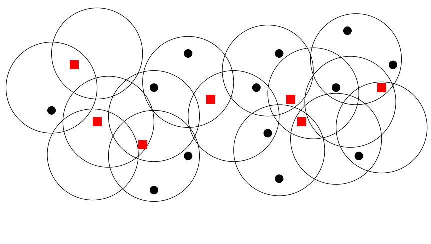
平面上にいくつかの点といくつかの単位円が与えられたとき
単位円を選んで，点をすべて覆いたい
選ばれる単位円の数を最も少なくするにはどうすればよいか？



復習：「横断問題」も「被覆問題」と見なすことができる

離散型単位円横断問題 (discrete unit disk transversal problem)

平面上にいくつかの点といくつかの単位円が与えられたとき
点を選んで，すべての単位円を横断したい
選ばれる点の数を最も少なくするにはどうすればよいか？



今日の目標

今日の目標

離散型円横断問題に対する近似アルゴリズム設計

- 局所探索法と平面的分離集合定理を用いる

補足

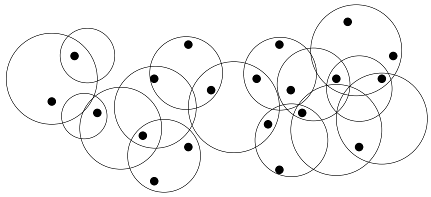
- 離散型単位円被覆問題と離散型単位円横断問題は同値 (第 1 回演習問題)
- 単位円横断問題ではなく，円横断問題を扱う方が説明しやすい
- 離散型円横断問題が解ければ，離散型単位円横断問題も解ける

離散型円横断問題

離散型円横断問題 (discrete disk transversal problem)

入力

- 平面上の点集合 $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$
- 平面上の円の集合 $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$



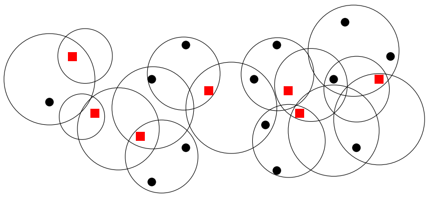
離散型円横断問題

離散型円横断問題 (discrete disk transversal problem)

出力

- 点集合 $P' \subseteq P$ で次を満たすもの (P' が $\mathcal{D}$ を横断する)

任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して，ある $p \in P'$ が存在して，$p \in D$



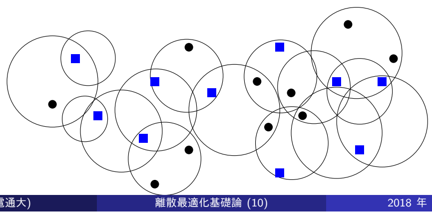
目次

局所探索法

局所探索法に基づく離散型円横断問題に対する近似アルゴリズム

自然数 k を予め定めておく

1. 横断 $S \subseteq P$ を 1 つ見つける (なければ終了)
2. 以下を繰り返し
   1. 要素数 k の集合 $S' \subseteq S$ と要素数 $k-1$ の集合 $S'' \subseteq P$ で，$(S - S') \cup S''$ が横断であるものを見つける
      なければ S を出力して終了
   2. S を $(S - S') \cup S''$ で置き換える



局所探索法：計算量

局所探索法に基づく離散型円横断問題に対する近似アルゴリズム

自然数 k を予め定めておく　$n = |P|, m = |\mathcal{D}|$

1. 横断 $S \subseteq P$ を 1 つ見つける (なければ終了)　$O(mn)$ 時間
2. 以下を繰り返し　$O(n)$ 回
   1. 要素数 k の集合 $S' \subseteq S$ と要素数 $k-1$ の集合 $S'' \subseteq P$ で，$(S - S') \cup S''$ が横断であるものを見つける
      なければ S を出力して終了
   2. S を $(S - S') \cup S''$ で置き換える

- ステップ 2 の 1 反復にかかる時間：$O(\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}mn)$
- $\therefore$ 全体の計算量 $= O(\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}mn^2)$
  (これは k が定数ならば，n, m に関する多項式)

ここからの流れ

次の定理の証明

$k = \Theta(1/\varepsilon^2)$ とすると，局所探索法は多項式時間 $1 + \varepsilon$ 近似アルゴリズムである (ただし，$\varepsilon > 0$ は定数である)

つまり，次を証明する

証明すること

ある定数 c が存在して，最適解の 1 つを R，局所探索法の出力を B とすると，

$$|B| \leq (1 + c/\sqrt{k})|R|$$

が成り立つ (ただし，k は十分大きい定数とする)

$k = (c/\varepsilon)^2$ とすると，$1 + c/\sqrt{k} = 1 + \varepsilon$ となる

目次

仮定

R は最適解，B は局所探索法の出力

仮定

$R \cap B = \emptyset$

$R = (R - B) \cup (R \cap B)$，$B = (B - R) \cup (R \cap B)$ と書ける

- ここで，$(R - B) \cap (B - R) = \emptyset$
- また，円の集合 $\tilde{\mathcal{D}}$ を次のように定義する

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{D \in \mathcal{D} \mid D \cap (R \cap B) = \emptyset\}$$

  つまり，$\tilde{\mathcal{D}}$ は $R \cap B$ が横断しない円の集合
- このとき，$R - B, B - R$ は $\tilde{\mathcal{D}}$ の横断である　(演習問題)
- また，$R - B$ は $P - (R \cap B)$ を点集合，$\tilde{\mathcal{D}}$ を円集合としたときの離散型円横断問題に対する最適解である　(演習問題)

仮定 (続)

R は最適解，B は局所探索法の出力

仮定

$R \cap B = \emptyset$

$R = (R - B) \cup (R \cap B)$，$B = (B - R) \cup (R \cap B)$ と書ける

- $|B - R| \leq (1 + c/\sqrt{k})|R - B|$ が証明できたとすると，

$$\begin{aligned} |B| &= |B - R| + |R \cap B| \\ &\leq (1 + c/\sqrt{k})(|R - B| + |R \cap B|) \\ &= (1 + c/\sqrt{k})|R| \end{aligned}$$

- つまり，$R - B, B - R$ を新たに R, B であると考えればよい

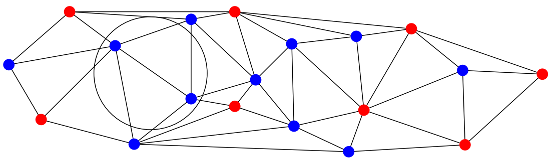
解析のための道具：Delaunay グラフ

Delaunay グラフとは？

平面上の点集合 $R \cup B$ に対する Delaunay グラフとは，
$R \cup B$ を頂点集合として，

$$p, q \in R \cup B \text{ が辺で結ばれる} \Leftrightarrow p, q \text{ のみを含む円が存在する}$$

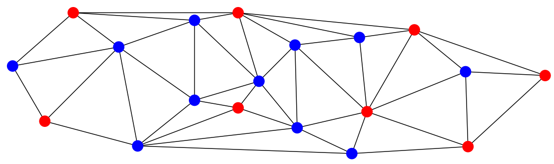
として作られるグラフのこと



解析のための道具：Delaunay グラフ — 重要な性質 (1)

Delaunay グラフの性質 (1)

Delaunay グラフは平面グラフ (辺の交差が存在しない)

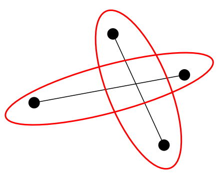


証明：辺の交差があるとして矛盾を導く (背理法)

解析のための道具：Delaunay グラフ — 重要な性質 (1) 続

Delaunay グラフの性質 (1)

Delaunay グラフは平面グラフ (辺の交差が存在しない)

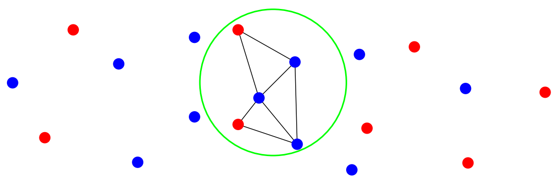


2 つの異なる円が 4 点以上で交わることはないので矛盾　□

解析のための道具：Delaunay グラフ — 重要な性質 (2)

Delaunay グラフの性質 (2)

任意の円に含まれる Delaunay グラフの部分グラフは連結である

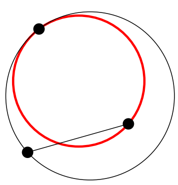


証明：その反例となるような最小半径の円を考える (背理法)

解析のための道具：Delaunay グラフ — 重要な性質 (2) 続

Delaunay グラフの性質 (2)

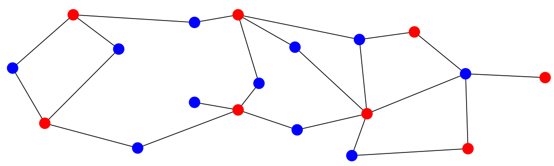
任意の円に含まれる Delaunay グラフの部分グラフは連結である



半径の最小性に矛盾　□

Delaunay グラフから二部グラフを作る

$R \cup B$ に対する Delaunay グラフから，
R の点と B の点を結ぶ辺だけを残してグラフを作り，それを G とする



性質 (3)

任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して，ある $p \in R \cap D$ とある $q \in B \cap D$ が存在して，$\{p, q\}$ は G の辺

「Delaunay グラフの性質 (2)」から導ける (演習問題)

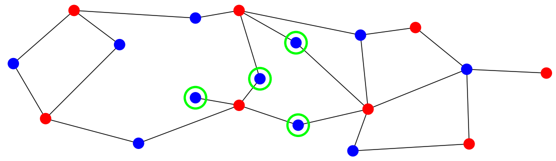
二部グラフ G の拡大性

R は最適解，B は局所探索法の出力

補題

G において，要素数 k 以下の任意の $B' \subseteq B$ に対して，$|N(B')| \geq |B'|$

$N(B')$ は B' の隣接頂点集合



つまり，$k = 3$ のとき，このグラフに対して補題は成立しない

二部グラフ G の拡大性：証明

R は最適解，B は局所探索法の出力

補題

G において，要素数 k 以下の任意の $B' \subseteq B$ に対して，$|N(B')| \geq |B'|$

証明：性質 (3) より，$(B - B') \cup N(B')$ は $\mathcal{D}$ の横断

- なぜならば，$D \in \mathcal{D}$ に対して $(B - B') \cap D = \emptyset$ が成り立つとしても，性質 (3) より，$N(B') \cap D \neq \emptyset$ なので，$((B - B') \cup N(B')) \cap D \neq \emptyset$ となるから
- B が局所探索法の出力なので，

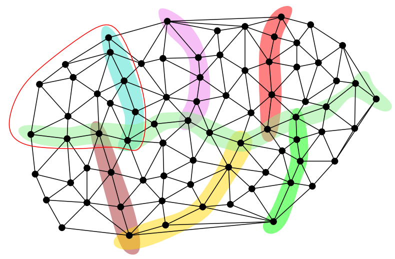
$$|B'| \leq k \quad \text{ならば，} \quad |(B - B') \cup N(B')| \geq |B|$$

- したがって，$|N(B')| \geq |B'|$ □

目次

平面的分離集合定理の再帰的適用：領域と境界

領域 (region) とその境界 (boundary)



領域 $R \subseteq V$ の境界とは，
$V - R$ に隣接頂点を持つ R の頂点の集合

(復習) 平面的分離集合定理の再帰的適用：定理

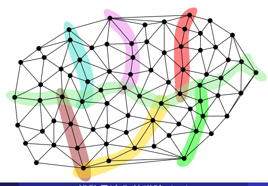
平面的グラフ $G = (V, E)$，自然数 $r \geq 1$

定理 (Frederickson '87)

次のように領域へ分解できる

- 各領域の頂点数 $\leq r$，領域の数 $= O(|V|/r)$
- $b(v)$ で頂点 v が含まれる境界の数を表すと

$$\sum_{v \in V} b(v) = O(|V|/\sqrt{r})$$



証明の完了に向けて

証明すること

ある定数 c が存在して，最適解の 1 つを R，局所探索法の出力を B とすると，

$$|B| \leq (1 + c/\sqrt{k})|R|$$

が成り立つ (ただし，k は十分大きい定数とする)

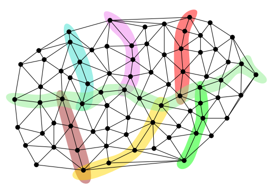
証明の着想：$r = k$ として，Frederickson の定理を利用する

- あとは頂点の数を数える

証明の完了に向けて (2)

証明：$r = k$ として，Frederickson の定理を利用する

- 領域の数は $O((|R| + |B|)/k)$
- 第 i 番目の領域に対して，
  - その中にある R, B の頂点の集合を R_i, B_i とする
  - その境界にある R, B の頂点の集合を $R_i^\partial, B_i^\partial$ とする
  - その境界にない R, B の頂点の集合を R_i°, B_i° とする
- 特に，$|B_i^\circ| \leq k$

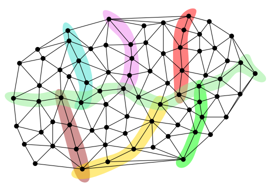


証明の完了に向けて (3)

証明 (続)：

- 補題より，$|B_i^\circ| \leq |N(B_i^\circ)| \leq |R_i| = |R_i^\circ| + |R_i^\partial|$
- したがって，$|B_i| = |B_i^\circ| + |B_i^\partial| \leq |R_i^\circ| + |R_i^\partial| + |B_i^\partial|$
- Frederickson の定理より，ある定数 γ が存在して，

$$\begin{aligned} |B| &\leq \sum_i |B_i| \leq \sum_i |R_i^\circ| + \sum_i (|R_i^\partial| + |B_i^\partial|) \\ &\leq |R| + \gamma \cdot (|R| + |B|)/\sqrt{k} \end{aligned}$$



証明の完了に向けて (4)

証明 (続)：

- 変形すると，

$$|B| \le \frac{1+\gamma/\sqrt{k}}{1-\gamma/\sqrt{k}}|R|$$

- $0 < k \ge 4\gamma^2$ とすると，$0 \le \gamma/\sqrt{k} \le 1/2$
- 実数 x が $0 \le x \le 1/2$ を満たすとき，$\frac{1+x}{1-x} \le 1+4x$ となるので，

$$|B| \le \frac{1+\gamma/\sqrt{k}}{1-\gamma/\sqrt{k}}|R| \le (1+4\gamma/\sqrt{k})|R|$$

- $c = 4\gamma$ と置くと，$|B| \le (1+c/\sqrt{k})|R|$ □

目次

今日の内容

幾何的被覆問題に対する近似アルゴリズム

局所探索法 (local search) を利用したもの

- 前回の「平面的分離集合定理」を解析に用いる

今回紹介する内容は主に次の論文に基づく

- N. H. Mustafa and S. Ray: Improved results on geometric hitting set problems. Discrete & Computational Geometry **44** (2010) 883–895.