離散最適化基礎論 (10) 2018 年 1 月 5 日

演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2018 年 1 月 19 日 講義終了時

復習問題 10.1 平面上の点集合に対する Delaunay グラフは平面グラフである．これを証明せよ．

復習問題 10.2 平面上の点集合 P に対する Delaunay グラフ G を考える．任意の円 D に対して，$P \cap D$ が誘導する G の部分グラフが連結であることを証明せよ．

復習問題 10.3 次のように定義される離散型円横断問題を考える．入力として平面上の有限点集合 P と平面上の有限個の円の集合 $\mathcal{D}$ が与えられる．出力すべきものは，点の集合 $P' \subseteq P$ で，$\mathcal{D}$ を横断するものである．すなわち，任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して，ある $p \in P$ が存在して，$p \in D$ となる．目的は $|P'|$ の最小化である．

離散型円横断問題に対する，次のような局所探索法を考える．自然数 k を予め定めておく．

ステップ 1： $\mathcal{D}$ の横断 $S \subseteq P$ を見つける．

ステップ 2： 以下を繰り返す．

ステップ 2-1： 要素数 k の集合 $S' \subseteq S$ と要素数 $k-1$ の集合 $S'' \subseteq P$ で，$(S - S') \cup S''$ が $\mathcal{D}$ の横断となるものを見つける．なければ，S を出力して終了．

ステップ 2-2： S を $(S - S') \cup S''$ で置き換える．

以下の問いに答えよ．

1. k が定数であるとき，この局所探索法が多項式時間アルゴリズムであることを証明せよ．

2. 以下，$R \subseteq P$ を最適解，$B \subseteq P$ を局所探索法の出力として得られる横断とする．目標は，ある定数 c が存在して，k が十分大きいとき，$|B| \leq (1 + c/\sqrt{k})|R|$ が成り立つことを証明することである．その目標において，$R \cap B = \emptyset$ であると仮定してもよいことを証明せよ．(ヒント：演習問題 10.4 を用いてもよい．)

3. 以下，$R \cap B = \emptyset$ であると仮定する．$R \cup B$ に対する Delaunay グラフを考え，その中で，R の点と B の点を結ぶ辺のみで構成される部分グラフを G とする．演習問題 10.1 より，G は平面グラフである．このとき，G において，要素数 k 以下の任意の $B' \subseteq B$ に対して，$|N(B')| \geq |B'|$ が成り立つことを証明せよ．ただし，$N(B')$ は G において B' と隣接する頂点全体の集合である．(ヒント：演習問題 10.5 を用いてよい．)

4. 今までの考察を踏まえて，ある定数 c が存在して，k が十分大きいとき，$|B| \leq (1 + c/\sqrt{k})|R|$ が成り立つことを証明せよ．(ヒント：次の Frederickson の定理を用いよ．

   任意の平面的グラフ $G = (V, E)$ と任意の自然数 r に対して，G の頂点集合 V を次のような領域へ分解できる．(1) 各領域の頂点数は r 以下であり，領域の総数は $O(|V|/r)$ である．(2) $b(v)$ で頂点 v が含まれる境界の数を表すと，

   $$\sum_{v \in V} b(v) = O(|V|/\sqrt{r}).$$

   ここで，領域とは，頂点部分集合のことで，領域 R の境界とは，R に属さない頂点と隣接する R の頂点全体の集合のことである．また,「領域へ分解」といったとき，領域同士が互いに素である必要はない．)

補足問題 10.4 演習問題 10.3 に記述のある離散型円横断問題を考える．円の集合 $\mathcal{D}$ の横断 $R, B \subseteq P$ に対して，以下の問いに答えよ．

1. 円の集合 $\tilde{\mathcal{D}}$ を

   $$\tilde{\mathcal{D}} = \{D \in \mathcal{D} \mid D \cap (R \cap B) = \emptyset\}$$

   と定義する．つまり，$\tilde{\mathcal{D}}$ は $R \cap B$ が横断しない円の集合である．このとき，$R - B, B - R$ は $\tilde{\mathcal{D}}$ の横断であることを証明せよ．

2. R が P を点集合，$\mathcal{D}$ を円集合とした離散型円横断問題に対する最適解であるとき，$R - B$ は $P - (R \cap B)$ を点集合，$\tilde{\mathcal{D}}$ を円集合とした離散型円横断問題に対する最適解であることを証明せよ．

補足問題 10.5 平面上の互いに素な点集合 R と B を考える．$R \cup B$ に対する Delaunay グラフを考え，その中で，R の点と B の点を結ぶ辺のみで構成される部分グラフを G とする．任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して，ある $p \in R$ とある $q \in B$ が存在して，$\{p, q\}$ が G の辺であることを証明せよ．(ヒント：演習問題 10.2 を用いてよい．)

追加問題 10.6 次の 5 点から成る集合に対する Delaunay グラフを描け．