離散最適化基礎論 (9) 2017 年 12 月 22 日
演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2018 年 1 月 5 日 講義終了時

復習問題 (発展) 9.1 平面的分離集合定理は，任意の平面的グラフ $G = (V, E)$ には，2/3-分離集合 S で，$|S| = O(\sqrt{|V|})$ を満たすものが存在することを述べている．平面的分離集合定理を以下の手順に従って証明してみよ．このとき，$|S|$ に対して得られる上界は $|S| \leq 2\sqrt{2|V|}$ となる．

1. 考える平面的グラフ G は極大平面的グラフであると仮定してよい．なぜか？
2. 都合上，$k = \lfloor \sqrt{2|V|} \rfloor$ とする．極大平面的グラフ $G = (V, E)$ の閉路 C に対して，その内側の頂点集合を $A(C)$，外側の頂点集合を $B(C)$ と書くことにする．ここで，次の性質を満たす閉路 C を考える．(1) $|V(C)| \leq 2k$，(2) $|B(C)| < \frac{2}{3}|V|$，(3) この 2 つの条件を満たす閉路 C の中で，$|A(C)| - |B(C)|$ を最小とする．そのような閉路 C は必ず存在する．なぜか？
3. 頂点集合 $V(C)$ が所望の分離集合であることを証明するために，背理法を用いる．すなわち，$|A(C)| \geq \frac{2}{3}|V|$ であると仮定する．任意の頂点 $u, v \in V(C)$ に対して，$d(u, v)$ で G における u, v 間の距離を表し，$c(u, v)$ で C における u, v 間の距離を表す．このとき，$c(u, v) = d(u, v)$ が成り立つことを証明せよ．
4. $|V(C)| = 2k$ となることを証明せよ．
5. 閉路 C の頂点を反時計回りに $v_0, v_1, \ldots, v_{2k-1}$ として，新たに頂点 s, t を考え，s と $v_0, v_1, \ldots, v_k$ を辺で結び，t と $v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{2k-1}, v_0$ を辺で結ぶ．このとき，C と C の内部，そして，s, t が誘導する部分グラフには，s と t を結ぶ内点素な道が $k + 1$ 本存在することを証明せよ．(ヒント：Menger の定理を利用せよ．G が極大平面的グラフであることに注意する．)
6. グラフの頂点数 $|V|$ が $\frac{1}{2}(k + 1)^2$ であることを示し，最終的に矛盾を導け．

補足問題 9.2 演習問題 9.1 にある平面的分離集合定理を再帰的に適用することで，次の定理を証明したい．ここで，領域とは，頂点部分集合のことで，領域 R の境界とは，R に属さない頂点と隣接する R の頂点全体の集合のことである．

> 任意の平面的グラフ $G = (V, E)$ と任意の自然数 r に対して，G の頂点集合 V を次のような領域へ分解できる．(1) 各領域の頂点数は r 以下であり，領域の総数は $O(|V|/r)$ である．(2) $b(v)$ で頂点 v が含まれる境界の数を表すと，
> $$\sum_{v \in V} b(v) = O(|V|/\sqrt{r}).$$

ただし，「領域へ分解」といったとき，領域同士が互いに素である必要はない．

再帰的に適用する方法は以下の通りとなる．アルゴリズムに対する入力は平面的グラフ $G = (V, E)$ である．

ステップ 1： $|V| \leq r$ ならば，V を 1 つの領域として出力して終了．

ステップ 2： G に対して平面的分離集合定理を適用して，分離集合 S と分離された集合 A, B を得る．

ステップ 3： $A \cup S$ が誘導する部分グラフ $G[A \cup S]$ と $B \cup S$ が誘導する部分グラフ $G[B \cup S]$ に対して，アルゴリズムを再帰的に呼び出す．

以下の問いに答えよ．

1. 領域の総数が $O(|V|/r)$ となることを証明せよ．

2. 頂点数が n であるときの再帰呼び出しに対して，そのときに入力されるグラフが $G = (V, E)$ であるとき，

$$B(n) = \sum_{v \in V} b(v)$$

とする．このとき，次の再帰式が成り立つことを証明せよ．すなわち，$n \leq r$ のとき，$B(n) = 0$ であり，$n > r$ のとき，

$$B(n) \leq 2\sqrt{2n} + \max_{1/3 \leq \alpha \leq 2/3} \{B(\alpha n + 2\sqrt{2n}) + B((1-\alpha)n + 2\sqrt{2n})\}.$$

3. 上の小問にある再帰式から，$B(n) = O(n/\sqrt{r})$ を導出せよ．(ヒント：定数 a, b をうまく定めて，

$$B(n) \leq \max\{0, a \cdot n/\sqrt{r} - b\sqrt{n}\}$$

となることを証明せよ．$1/3 \leq \alpha \leq 2/3$ の範囲で，$\sqrt{\alpha} + \sqrt{1-\alpha}$ が下から定数で抑えられることを観察せよ．)