

提出締切：2017年12月8日 講義終了時

復習問題 6.1 次のように定義されるハイパーグラフ $H = (V, E)$ を考える. すなわち, $V \subseteq \mathbb{R}$ は有限集合であり, $E = \{V \cap [a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ とする. また, $\varepsilon > 0$ を実数とする. このとき, H に対する ε ネットで, その要素数が $O(1/\varepsilon)$ であるものを構成せよ. それが ε ネットであり, その要素数が $O(1/\varepsilon)$ になる理由も議論せよ.

復習問題 6.2 (離散) 確率空間 (Ω, \Pr) を考える. 事象 A, B に対して $\Pr(A \cup B) \leq \Pr(A) + \Pr(B)$ が成り立つことを証明せよ.

復習問題 6.3 (離散) 確率空間 (Ω, \Pr) を考える. 非負自然数値確率変数 $X \geq 0$ と正実数 $t > 0$ に対して, $E[X]$ が存在するとき,

$$\Pr(X \geq t) \leq \frac{E[X]}{t}$$

が成り立つことを証明せよ.

復習問題 6.4 与えられた有限ハイパーグラフ $H = (V, E)$ に対する ε ネットを構成するため, 以下の乱択アルゴリズムを考える. ただし, $\varepsilon > 0$ は実数である.

ステップ 1: $|e| < \varepsilon \cdot |V|$ を満たす辺 e を E から除去する. 残った辺の集合を E' とする.

ステップ 2: c を大きな定数として, $p = \frac{c \ln |E'|}{\varepsilon \cdot |V|}$ とする.

ステップ 3: V の各要素を確率 p で独立に N へ入れる.

ステップ 4: N を出力する.

このアルゴリズムの動きについて, 以下の問いに答えよ.

- 出力 N が ε ネットではない確率が小さいこと, 例えば, $1/5$ 以下であることを証明せよ.
- 出力 N の要素数 $|N|$ が $O(\frac{1}{\varepsilon} \log |E|)$ を上回る確率が小さいこと, 例えば, $1/5$ 以下であることを証明せよ.
- 以上を踏まえて, 出力 N が ε ネットであり, 同時に, $|N| = O(\frac{1}{\varepsilon} \log |E|)$ を満たす確率が大きいこと, 例えば, $3/5$ 以上であることを証明せよ.

追加問題 6.5 3以上の自然数 n に対して, 正 n 角形の頂点を構成する n 個の点の集合 V を考える. 集合 E を $E = \{V \cap h \mid h \text{ は閉半平面}\}$ と定義したとき, ハイパーグラフ $H = (V, E)$ に対する ε ネットで, その要素数が $O(1/\varepsilon)$ であるものを構成せよ. ただし, $\varepsilon > 0$ は実数である. それが ε ネットであり, その要素数が $O(1/\varepsilon)$ になる理由も議論せよ.

追加問題 6.6 2以上の自然数 k に対して, 平面上に置かれた $k \times k$ の正方格子の点集合 V を考える. ($|V| = k^2$ であることに注意する.) 集合 E を $E = \{V \cap \ell \mid \ell \text{ は直線}\}$ と定義したとき, ハイパーグラフ $H = (V, E)$ に対する ε ネットで, その要素数が $O(1/\varepsilon)$ であるものを構成せよ. ただし, $\varepsilon > 0$ は実数である. それが ε ネットであり, その要素数が $O(1/\varepsilon)$ になる理由も議論せよ.

追加問題 6.7 与えられた有限ハイパーグラフ $H = (V, E)$ に対する ε ネットを構成するため, 以下の貪欲アルゴリズムを考える. ただし, $\varepsilon > 0$ は実数である.

ステップ 1: $|e| < \varepsilon \cdot |V|$ を満たす辺 e を E から除去する. 残った辺の集合を E' とする.

ステップ 2: N を空集合として初期化する. i を 1 として初期化する.

ステップ 3: E' が空集合となるまで, 以下を繰り返す.

ステップ 3-1: E' の最も多くの辺に含まれる V の要素を v_i として, N に v_i を加える.

ステップ 3-2: V から v_i を取り除く. E' から v_i を含む辺をすべて取り除く. i を $i+1$ に置き直す. ステップ 3 の冒頭に戻る.

ステップ 4: N を出力する.

このアルゴリズムの動きについて, 以下の問いに答えよ.

- 出力 N が H に対する ε ネットであることを証明せよ.
- ステップ 3-1 において, v_i が選ばれ, ステップ 3-2 において, E' から v_i を含む辺をすべて取り除いた後, E' に残された辺の総数を m_i で表すことにする. このとき,

$$m_i \leq (1 - \varepsilon)m_{i-1}$$

が成り立つことを証明せよ. ただし, $m_0 = |E'|$ とする.

- 前の小問を用いて, $|N| = O(\frac{1}{\varepsilon} \log |E|)$ が成り立つことを証明せよ.