

提出締切：2017年11月17日 講義終了時

**復習問題 4.1** 距離  $d$  を有する距離空間  $X$  に対して，離散型  $k$ -センター問題を考える．次のアルゴリズムは，その問題に対する近似アルゴリズムである．

入力：有限点集合  $S \subseteq X$ ，正整数  $k$ ．

ステップ 1：  $S$  の任意の点を選び，  $c_1$  とする．

ステップ 2：  $i = 2, \dots, k$  に対して，以下を繰り返す．

ステップ 2-1：  $\min_{j=1, \dots, i-1} d(x, c_j)$  を最大化する点  $x \in S$  を  $c_i$  とする．

ステップ 3：  $r = \max_{x \in S} \min_{i=1, \dots, k} d(x, c_i)$  とする．

ステップ 4： クラスタの中心を  $c_1, c_2, \dots, c_k$ ，各クラスタの半径を  $r$  として，出力し，終了．

このアルゴリズムの出力が 2 近似解であることを証明せよ．

**復習問題 4.2** 問題 4.1 に記載されているアルゴリズムが， $k = 1$  のときに 2 よりもよい近似比を持つ解を出力しないような例を構成せよ．

**復習問題 4.3** 問題 4.1 に記載されているアルゴリズムが， $k = 2$  のときに 2 よりもよい近似比を持つ解を出力しないような例を構成せよ．

**補足問題 4.4** 平面上に与えられた 3 点が鋭角三角形を成すとする．このとき，ユークリッド距離の下で連続型 1-センター問題を解くと，最適解がその鋭角三角形の外接円の中心となることを証明せよ．

**補足問題 4.5** 問題 4.1 に記載されているアルゴリズムは  $O(k|S|)$  時間で動作するように実装できる．その実装法を説明せよ．

**補足問題 4.6** 問題 4.1 に記載されているアルゴリズムが， $k = 3$  のときに 2 よりもよい近似比を持つ解を出力しないような例を構成せよ．

**補足問題 4.7** 任意の  $k \geq 4$  に対して，問題 4.1 に記載されているアルゴリズムが 2 よりもよい近似比を持つ解を出力しないような例を構成せよ．

**追加問題 4.8** 平面上に与えられた 3 個の点に対して，ユークリッド距離の下で連続型 1-メディアン問題を考える．その最適解の位置を特定せよ．

**追加問題 4.9** 平面上に与えられた有限点集合に対して，ユークリッド距離の下で連続型 1-ミーンズ問題を解くための線形時間アルゴリズムを設計せよ．(ヒント：重心が最適解となることを証明せよ．)

**追加問題 4.10** 数直線上に与えられた有限点集合に対して，直線距離の下で離散型  $k$ -センター問題を解くための多項式時間アルゴリズムを設計せよ．計算量を  $O(kn^2)$  にすることはできるだろうか？(ただし， $n$  は与えられる点の総数であるとする．)