離散最適化基礎論	**2018 年 2 月 16 日**
期末試験	岡本 吉央

14:40–16:10．A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可．使用可能な解答用紙は 1 枚のみ．
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．
採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと (その文字列は控えておくように)．
採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

問題 1 次のように定義される離散型単位円被覆問題を考える．入力として平面上の有限点集合 P と平面上の有限個の単位円の集合 $\mathcal{D}$ が与えられる．出力すべきものは，単位円の集合 $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ で，P を被覆するものである．すなわち，任意の $p \in P$ に対して，ある $D \in \mathcal{D}'$ が存在して，$p \in D$ となる．目的は $|\mathcal{D}'|$ の最小化である．

また，次のように定義される離散型単位円横断問題を考える．入力として平面上の有限点集合 P と平面上の有限個の単位円の集合 $\mathcal{D}$ が与えられる．出力すべきものは，点の集合 $P' \subseteq P$ で，$\mathcal{D}$ を横断するものである．すなわち，任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して，ある $p \in P$ が存在して，$p \in D$ となる．目的は $|P'|$ の最小化である．

離散型単位円横断問題の任意の入力 $(P, \mathcal{D})$ に対して，離散型単位円被覆問題の入力 $(P^\circ, \mathcal{D}^\circ)$ で次の性質を満たすものを構成せよ (構成するための多項式時間アルゴリズムを与えよ．)

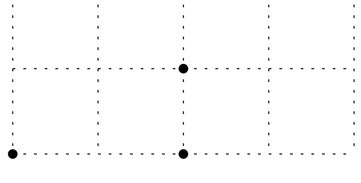
- $(P, \mathcal{D})$ を入力とする離散型単位円横断問題の最適値と $(P^\circ, \mathcal{D}^\circ)$ を入力とする離散型単位円被覆問題の最適値が一致する．
- $|P^\circ|$ と $|\mathcal{D}^\circ|$ が $|P|$ と $|\mathcal{D}|$ に関する多項式で上から抑えられる．

問題 2 直線上に与えられた有限点集合で，ユークリッド距離に関して連続型 1-センター問題，連続型 1-メディアン問題，連続型 1-ミーンズ問題の最適解がどれも異なるような例を与えよ．なぜ異なるのかも説明せよ．

問題 3 次のハイパーグラフ $H = (V, E)$ の VC 次元を定めよ．

- $V = \mathbb{R}^2$，E は平面 $\mathbb{R}^2$ 上の閉軸平行正方形全体の集合．なお，軸平行正方形とは，その辺が x 軸か y 軸に平行であるような正方形のことである．(長方形ではないので，注意する．)

問題 4 次の 5 点から成る集合に対する Delaunay グラフを描け．



$\boxed{\text{問題 5}}$ 離散型単位円横断問題を考える．定義は問題 1 を参照せよ．

点集合 P は n 個の要素を持ち，$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ と書けるとする．各点 $p_i \in P$ に対して，変数 $x_i \in \{0, 1\}$ を考え，離散型単位円横断問題を整数計画問題 (P) として以下のように定式化する．

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i:\, p_i \in D} x_i \geq 1 \quad \forall\, D \in \mathcal{D}, \\ & & x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}. \end{array}$$

問題 (P) の緩和問題 (R) は以下のものとなる．

$$\begin{array}{lll} \text{(R)} & \text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i:\, p_i \in D} x_i \geq 1 \quad \forall\, D \in \mathcal{D}, \\ & & x_i \in [0, 1] \qquad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}. \end{array}$$

以下の問いに答えよ．

1. 問題 (R) の最適値が問題 (P) の最適値以下であることを証明せよ．
2. 離散型単位円横断問題を近似的に解くため，次のアルゴリズムを考える．

   ステップ 1： 問題 (R) の最適解で，各成分が有理数であるものを $x^* \in [0, 1]^n$ とする．つまり，ある正整数 M が存在して，任意の $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，Mx_i^* は整数である．

   ステップ 2： 集合 P の各点 p_i に対して，そのコピーを Mx_i^* 個だけ作成し，それらのコピーをすべて集めてできる多重集合を $\tilde{P}$ とする．

   ステップ 3： $\varepsilon = 1/\sum_{i=1}^{n} x_i^*$ として，$\tilde{P}$ の ε ネットを構成する．それを N とする．

   ステップ 4： N を出力する．

   このアルゴリズムの出力 N が集合 $\mathcal{D}$ を横断することを証明せよ．

3. 単位円の集合に対して要素数が $O(1/\varepsilon)$ の ε ネットが存在することを利用して，このアルゴリズムが離散型単位円横断問題に対する $O(1)$ 近似アルゴリズムであることを証明せよ．

$\boxed{\text{問題 6}}$ 確率変数 X と正実数 $t > 0$ に対して，不等式

$$\Pr(|X - \mathsf{E}[X]| \geq t) \leq \frac{\mathsf{V}[X]}{t^2}$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，$\mathsf{V}[X] = \mathsf{E}[X^2] - \mathsf{E}[X]^2$ である．(ヒント：Markov の不等式を利用せよ．)

以上