

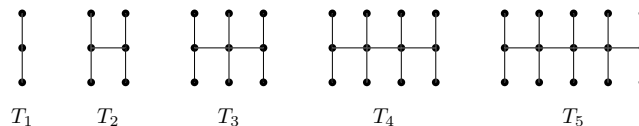
9:00–10:30. A4用紙(両面自筆書き込み)のみ持ち込み可. 使用可能な解答用紙は1枚のみ.
携帯電話, タブレット等は電源を切ってカバンの中にする.

採点終了次第, 講義 web ページにて, 得点分布, 講評などを掲載する.

採点結果を知りたい場合は, 解答用紙右上「評点」欄の中に5文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと(その文字列は控えておくように).

採点終了後, そのランダム文字列と得点の対応表を公開する.

問題 1 自然数 $n \geq 1$ に対して, 次の図で表されるグラフ T_n を考える.



グラフ T_n における独立集合の総数を t_n とするとき, 次の漸化式が成り立つことを証明せよ.

$$t_n = \begin{cases} 5 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 24 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 4t_{n-1} + 4t_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

問題 2 次の漸化式を考える.

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} - 3n - 1 & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって, 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ. (注: 母関数を用いる方法によらない解答であっても, 部分点を与える.)

問題 3 集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の置換群 G で, 次に挙げる S が生成するものを考える.

$$S = \{(1\ 2\ 3), (2\ 3\ 4)\}.$$

以下の問いに答えよ.

1. G の要素をすべて挙げよ.
2. G の要素の中で奇置換であるものの総数が何であるか, 答えよ.

問題 4 群 (G, \circ) は $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ であり, 任意の $x, y \in G$ に対して

$$x \circ y = (x + y) \bmod 6$$

として定義されるものである. また, 群 (H, \star) は $H = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ であり, 任意の $x, y \in H$ に対して

$$x \star y = xy \bmod 9$$

として定義されるものである. 以下の問いに答えよ.

1. (G, \circ) と (H, \star) の群表を書き, (G, \circ) と (H, \star) が確かに群であることを確かめよ.
2. 群 (G, \circ) と (H, \star) が同型であることを証明せよ.

以上