

離散数理工学 第7回
離散代数：有限群の応用

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017年11月28日

最終更新：2017年11月27日 14:07

スケジュール 後半 (予定)

- 8 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/5)
- ★ 中間試験 (12/12)
- 9 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/19)
- 10 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/9)
- 11 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/16)
- 12 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/23)
- 13 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (1/30)
- ★ 予備日 (2/6)
- ★ 期末試験 (2/13?)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

今日の目標

有限群の応用として、以下の対象の考察ができる

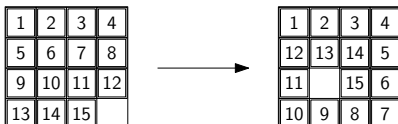
- ▶ 15 パズル
- ▶ タイリング

15 パズル

15 パズル

15 パズルとは？

4 × 4 の盤面に、1 から 15 の書かれた正方形のコマが置かれ、1 か所の空きを利用してコマを動かし、目的的配置を作成するパズル



スケジュール 前半 (予定)

- 1 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/3)
- 2 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/10)
- ★ 休講 (体育祭) (10/17)
- 3 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/24)
- ★ 休講 (出張) (10/31)
- 4 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/7)
- 5 離散代数：対称群と置換群 (11/14)
- 6 離散代数：有限群 (11/21)
- 7 離散代数：有限群の応用 (11/28)

注意：予定の変更もありうる

中間試験

- ▶ 日時：12月12日 (火) 1限
- ▶ 教室：西9号館115教室 (いつもの教室)
- ▶ 出題範囲：第1回講義の最初から第7回講義の最後まで
- ▶ 出題形式
 - ▶ 演習問題と同じ形式の問題を4題出題する
 - ▶ その中の2題は講義の演習問題として提示されたものと同じ
 - ただし、発展問題は出題しない
 - ▶ 全問に解答する
- ▶ 配点：1題10点満点、計60点満点
- ▶ 時間：90分
- ▶ 持ち込み：A4用紙1枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

15 パズル

目次

1 15 パズル

2 タイリング

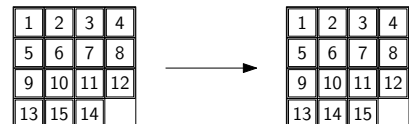
3 今日のまとめ

15 パズル

15 パズル — サム・ロイドの問題

15 パズルに関するサム・ロイドの問題

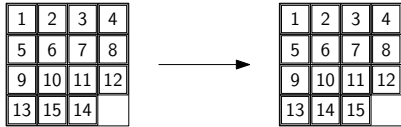
次は解けるか？



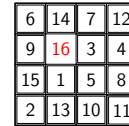
- ▶ 解けることを証明するためには、手順を示せばよい
- ▶ 解けないことを証明するためには、どうすれば??

15 パズルに関するサム・ロイドの問題

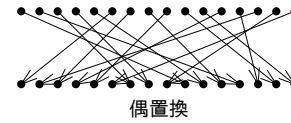
次は解けるか？
 解答：解けない



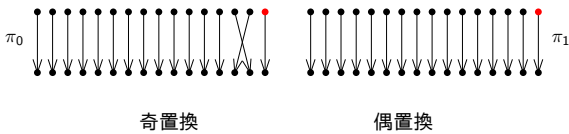
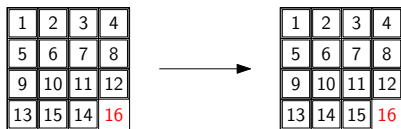
- ▶ 解けることを証明するためには、手順を示せばよい
- ▶ 解けないことを証明するためには、どうすれば?? → 置換を使う



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 10 & 13 & 7 & 8 & 11 & 1 & 3 & 12 & 5 & 15 & 16 & 4 & 14 & 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

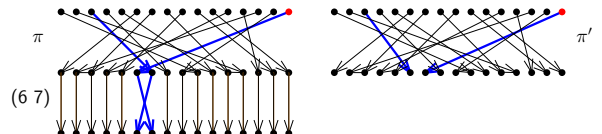
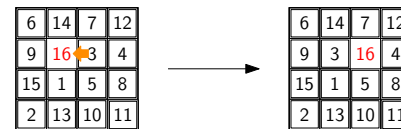


15 パズルから置換を得る (2) — サム・ロイドの問題



サム・ロイドの問題： π_0 を π_1 にできるか？

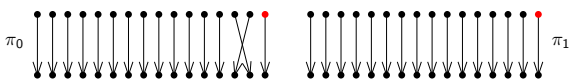
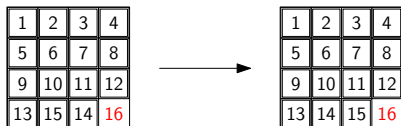
15 パズル：1つの移動



$$(6\ 7) \circ \pi = \pi'$$

つまり、コマを1回移動させることは1つの互換で表せる

サム・ロイドの問題：別の見方 (モデル化)

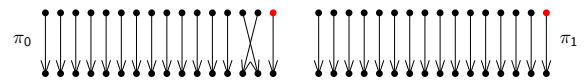
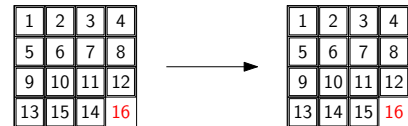


サム・ロイドの問題

$\sigma_1 \cdots \sigma_k \pi_0 = \pi_1$ とするような互換 $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ が存在するか？

π_0 は奇置換, π_1 は偶置換なので、互換の数 k は奇数でなければならない

サム・ロイドの問題：着眼点

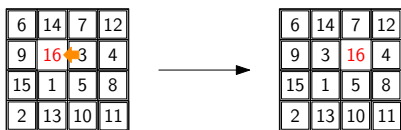


π_0 は奇置換, π_1 は偶置換なので、互換の数 k は奇数でなければならない

着眼点

- ▶ 互換によって、必ず「16」が動く
- ▶ 「16」は π_0 と π_1 のどちらでも右下にある
- ▶ \therefore 「16」を奇数回だけ動かして、元の位置に戻せるか、考える

サム・ロイドの問題：証明の完了



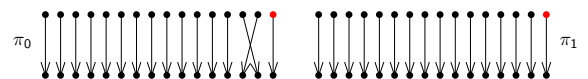
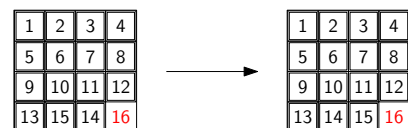
- ▶ 16 個のマスを市松模様 (白黒) で塗ってみる (cf. 二部グラフ)
- ▶ 1 回の互換により、16 のあるマスの白黒が変わる
- ▶ 右下のマスは白
- ▶ つまり、白から白に行くための互換の数は偶数でないといけない
- ▶ これは、互換の数が奇数でなければならないことに矛盾 \square

サム・ロイドの問題：まとめ

定理

(Johnson, Story 1879)

サム・ロイドの問題に対する解答は「解けない」である



- ▶ Wm. W. Johnson, W. E. Story, Notes on the "15" Puzzle, AJM 2 (1879) 397-404.

いまの考察から次が分かる

初期配置から、奇置換を与えるような配置は作れない

では、偶置換を与えるような配置は必ず作れるのか？

- ▶ 実は作れる (Johnson, Story 1879)

いまの考察から次が分かる

考えるグラフは 4×4 の二部グラフでなくてもよい

他のグラフに対する研究は次の論文で行われている

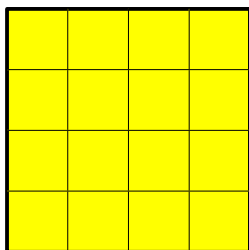
- ▶ R. M. Wilson, Graph puzzles, homotopy, and the alternating group. JCTB 16 (1974) 86–96.

- 15 パズル
- タイリング
- 今日のまとめ

例 1：タイルを使って盤面を敷き詰められるか

盤面

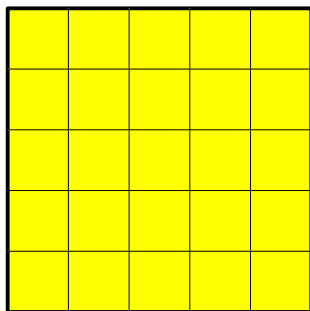
タイル
(回転させてもよい)



例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか

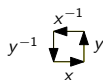
盤面

タイル
(回転させてもよい)



例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 説明 パート 2

図形の境界語 (boundary word) を考える

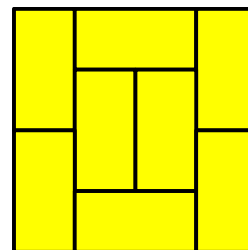


$$\begin{aligned} & xxyxy^{-1}xxxxyx^{-1}xyyx^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}y^{-1} \\ & = x^2yxy^{-1}x^3yx^{-2}y^2x^{-4}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}y^{-1} \end{aligned}$$

例 1：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 解答例

盤面

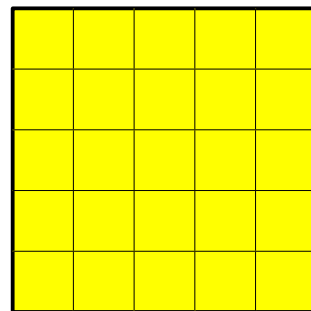
タイル
(回転させてもよい)



例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 解答例??

盤面

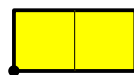
タイル
(回転させてもよい)



できないが、なぜ??

例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 説明 パート 2：境界語

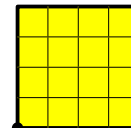
タイル



境界語

$$x^2yx^{-2}y^{-1}$$

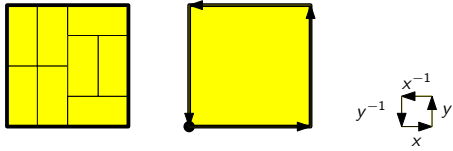
盤面



境界語

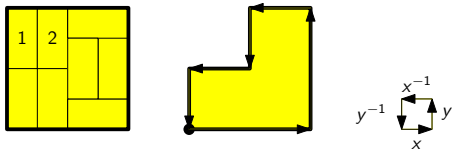
$$x^4y^4x^{-4}y^{-4}$$

▶ 次の群を考える $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$



$$x^4y^4x^{-4}y^{-4}$$

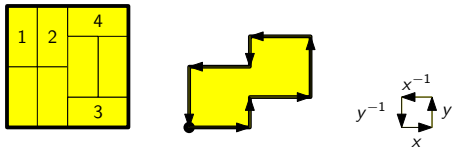
▶ 次の群を考える $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$



▶ $xy^2x^{-1}y^{-2} = e$ より, $x^{-1}y^{-2} = (xy^2)^{-1} = y^{-2}x^{-1}$
▶ したがって,

$$\begin{aligned} x^4y^4x^{-3}y^{-2}x^{-1}y^{-2} &= x^4y^4x^{-2}x^{-1}y^{-2}x^{-1}y^{-2} \\ &= x^4y^4x^{-2}y^{-2}x^{-1}x^{-1}y^{-2} \\ &= x^4y^4x^{-2}y^{-2}x^{-2}y^{-2} \end{aligned}$$

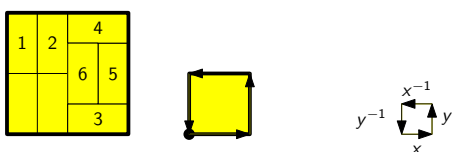
▶ 次の群を考える $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$



▶ $x^2yx^{-2}y^{-1} = e$ より, $yx^{-2}y^{-1} = x^{-2}$
▶ したがって,

$$\begin{aligned} x^2yx^2y^3x^{-2}y^{-2}x^{-2}y^{-2} &= x^2yx^2y^2yx^{-2}y^{-1}y^{-1}x^{-2}y^{-2} \\ &= x^2yx^2y^2x^{-2}y^{-1}x^{-2}y^{-2} \\ &= x^2yx^2y^2x^{-2}y^{-1}x^{-2}y^{-2} \end{aligned}$$

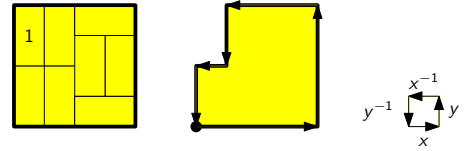
▶ 次の群を考える $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$



▶ $xy^2x^{-1}y^{-2} = e$ より, $xy^2x^{-1}y^{-1} = y$
▶ したがって,

$$\begin{aligned} x^2yxy^2x^{-1}y^{-1}x^{-2}y^{-2} &= x^2yxyx^{-2}y^{-2} \\ &= x^2y^2x^{-2}y^{-2} \end{aligned}$$

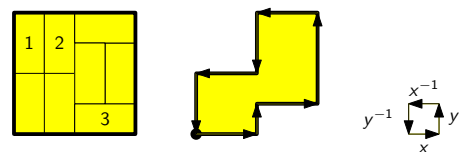
▶ 次の群を考える $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$



▶ $xy^2x^{-1}y^{-2} = e$ より, $x^{-1}y^{-2} = (xy^2)^{-1} = y^{-2}x^{-1}$
▶ したがって,

$$x^4y^4x^{-4}y^{-4} = x^4y^4x^{-3}x^{-1}y^{-2}y^{-2} = x^4y^4x^{-3}y^{-2}x^{-1}y^{-2}$$

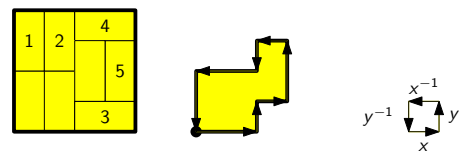
▶ 次の群を考える $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$



▶ $x^2yx^{-2}y^{-1} = e$ より, $x^2y = yx^2$
▶ したがって,

$$\begin{aligned} x^4y^4x^{-2}y^{-2}x^{-2}y^{-2} &= x^2x^2yy^3x^{-2}y^{-2}x^{-2}y^{-2} \\ &= x^2yx^2y^3x^{-2}y^{-2}x^{-2}y^{-2} \end{aligned}$$

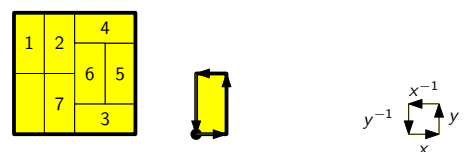
▶ 次の群を考える $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$



▶ $xy^2x^{-1}y^{-2} = e$ より, $xy^2x^{-1} = y^2$
▶ したがって,

$$\begin{aligned} x^2yx^2y^2x^{-2}y^{-1}x^{-2}y^{-2} &= x^2yxxy^2x^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-2}y^{-2} \\ &= x^2yx^2y^2x^{-1}y^{-1}x^{-2}y^{-2} \end{aligned}$$

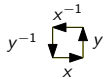
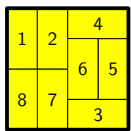
▶ 次の群を考える $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$



▶ $xy^2x^{-1}y^{-2} = e$ より, $xy^2x^{-1} = y^2$
▶ したがって,

$$\begin{aligned} x^2y^2x^{-2}y^{-2} &= xxy^2x^{-1}x^{-1}y^{-2} \\ &= xy^2x^{-1}y^{-2} \end{aligned}$$

- ▶ 次の群を考える $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$



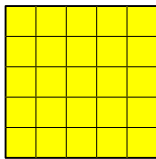
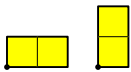
- ▶ 最終的に,

$$xy^2x^{-1}y^{-2} = e$$

結論: G において, $x^4y^4x^{-4}y^{-4} = e$

タイル

盤面



境界語

境界語

$$x^2yx^{-2}y^{-1} \quad xy^2x^{-1}y^{-2}$$

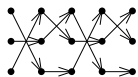
$$x^5y^5x^{-5}y^{-5}$$

考える問題

群 $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$ において, 盤面の境界語 $x^5y^5x^{-5}y^{-5}$ が単位元でないことを証明する

- ▶ このとき,

$$\begin{aligned} \phi(x^5y^5x^{-5}y^{-5}) &= (1\ 2)^5(1\ 3)^5(1\ 2)^{-5}(1\ 3)^{-5} \\ &= (1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3) \\ &= (1\ 2\ 3) \neq e \end{aligned}$$



- ▶ つまり, $x^5y^5x^{-5}y^{-5}$ は G の単位元ではない
- ▶ つまり, 1×2 のタイルで, 5×5 の盤面は敷き詰められない \square

- ▶ 次の置換群 H を考える

$$H = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 3\ 5) \rangle$$

- ▶ 次で定義される群準同型写像 $\phi: G \rightarrow H$ を考える

$$\begin{aligned} \phi(x) &= (1\ 2\ 3\ 4), \\ \phi(y) &= (1\ 2\ 3\ 5) \end{aligned}$$

- ▶ **確認**: 本当に群準同型写像なのか?

$$\begin{aligned} \phi(x^4yx^{-4}y^{-1}) &= (1\ 2\ 3\ 4)^4(1\ 2\ 3\ 5)(1\ 2\ 3\ 4)^{-4}(1\ 2\ 3\ 5)^{-1} = e \\ \phi(xy^4x^{-1}y^{-4}) &= (1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3\ 5)^4(1\ 2\ 3\ 4)^{-1}(1\ 2\ 3\ 5)^{-4} = e \end{aligned}$$

確かに群準同型写像である

- ▶ x, y を生成元として, タイルの境界語が単位元であるという関係式を持つ群 G を考える
- ▶ 盤面がタイルで敷き詰められると仮定する
- ▶ このとき, 盤面の境界語は G の単位元になる

結論

(上の考察の対偶)

盤面の境界語が G の単位元でない
 \Rightarrow タイルで盤面を敷き詰めることは不可能

典型的な場合において, G が有限群ではないので, G から有限群 (置換群) への群準同型を考えて, 証明の助けとする

性質

(前回の講義参照)

$\phi: G \rightarrow H$ 群準同型写像, $x \in G$, $\phi(x)$ が H の単位元ではない
 $\Rightarrow x$ は G の単位元ではない

- ▶ 次の置換群 H を考える

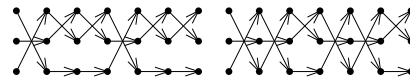
$$H = \langle (1\ 2), (1\ 3) \rangle$$

- ▶ 次で定義される群準同型写像 $\phi: G \rightarrow H$ を考える

$$\begin{aligned} \phi(x) &= (1\ 2), \\ \phi(y) &= (1\ 3) \end{aligned}$$

- ▶ **確認**: 本当に群準同型写像なのか?

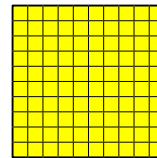
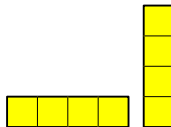
$$\begin{aligned} \phi(x^2yx^{-2}y^{-1}) &= (1\ 2)^2(1\ 3)(1\ 2)^{-2}(1\ 3)^{-1} = e \\ \phi(xy^2x^{-1}y^{-2}) &= (1\ 2)(1\ 3)^2(1\ 2)^{-1}(1\ 3)^{-2} = e \end{aligned}$$



確かに群準同型写像である

タイル

盤面: 10×10



境界語

境界語

$$x^4yx^{-4}y^{-1} \quad xy^4x^{-1}y^{-4}$$

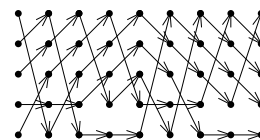
$$x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10}$$

考える問題

群 $G = \langle x, y \mid x^4yx^{-4}y^{-1} = xy^4x^{-1}y^{-4} = e \rangle$ において, 盤面の境界語 $x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10}$ が単位元でないことを証明する

- ▶ このとき,

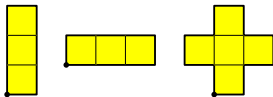
$$\begin{aligned} \phi(x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10}) &= (1\ 2\ 3\ 4)^{10}(1\ 2\ 3\ 5)^{10}(1\ 2\ 3\ 4)^{-10}(1\ 2\ 3\ 5)^{-10} \\ &= (1\ 2\ 3\ 4)^2(1\ 2\ 3\ 5)^2(1\ 2\ 3\ 4)^{-2}(1\ 2\ 3\ 5)^{-2} \\ &= (2\ 4\ 5) \neq e \end{aligned}$$



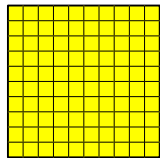
- ▶ つまり, $x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10}$ は G の単位元ではない
- ▶ つまり, 1×4 のタイルで, 10×10 の盤面は敷き詰められない \square

例 4 : 難しい例

タイル



盤面 : 10 × 10



境界語

- ▶ $xy^3x^{-1}y^{-3}$
- ▶ $x^3yx^{-3}y^{-1}$
- ▶ $xyxyx^{-1}yx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-1}$

境界語

$$x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10}$$

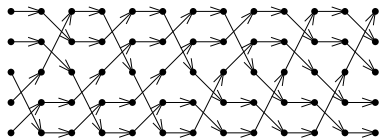
考える問題

群 $G = \langle x, y \mid xy^3x^{-1}y^{-3} = x^3yx^{-3}y^{-1} = xyxyx^{-1}yx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-1} = e \rangle$ において
盤面の境界語 $x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10}$ が単位元ではないことを証明する

例 4 : 群準同型 (続き)

- ▶ **確認** : 本当に群準同型写像なのか? (続き)

$$\begin{aligned} \phi(xyxyx^{-1}yx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-1}) &= (1\ 2\ 3)(3\ 4\ 5)(1\ 2\ 3)(3\ 4\ 5) \\ &\quad (1\ 2\ 3)^{-1}(3\ 4\ 5)(1\ 2\ 3)^{-1} \\ &\quad (3\ 4\ 5)^{-1}(1\ 2\ 3)^{-1}(3\ 4\ 5)^{-1} \\ &\quad (1\ 2\ 3)(3\ 4\ 5)^{-1} \\ &= e \end{aligned}$$



確かに, 群準同型写像である

タイリング : 補足

境界語によるタイリング不可能性の証明

- ▶ 発明したのは, Conway & Lagarias ('90) と Thurston ('90)
- ▶ 発展させたのは, Pak ('00), Reid ('03) ら

注意点

- ▶ タイリング不可能な場合をこの手法で必ず特定できるわけではない
- ▶ 上手に置換群を見つけるには, 群についてより深く勉強する必要有

- ▶ J. H. Conway, J. C. Lagarias, Tilings with polyominoes and combinatorial group theory, JCTA 53 (1990) 183–208.
- ▶ W. Thurston, Conway's tiling group, AMM 97 (1990) 757–773.
- ▶ I. Pak, Ribbon tile invariants, TAMS 352 (2000) 5525–5561.
- ▶ M. Reid, Tile homotopy groups, LEM 49 (2003) 123–155.

今日の目標

今日の目標

有限群の応用として, 以下の対象の考察ができる

- ▶ 15 パズル
- ▶ タイリング

例 4 : 群準同型

- ▶ 次の置換群 H を考える

$$H = \langle (1\ 2\ 3), (3\ 4\ 5) \rangle$$

- ▶ 次で定義される群準同型写像 $\phi: G \rightarrow H$ を考える

$$\begin{aligned} \phi(x) &= (1\ 2\ 3), \\ \phi(y) &= (3\ 4\ 5) \end{aligned}$$

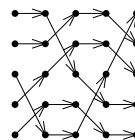
- ▶ **確認** : 本当に群準同型写像なのか?

$$\begin{aligned} \phi(xy^3x^{-1}y^{-3}) &= (1\ 2\ 3)(3\ 4\ 5)^3(1\ 2\ 3)^{-1}(3\ 4\ 5)^{-3} = e \\ \phi(x^3yx^{-3}y^{-1}) &= (1\ 2\ 3)^3(3\ 4\ 5)(1\ 2\ 3)^{-3}(3\ 4\ 5)^{-1} = e \end{aligned}$$

例 4 : 証明の完了

- ▶ このとき,

$$\begin{aligned} \phi(x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10}) &= (1\ 2\ 3)^{10}(3\ 4\ 5)^{10}(1\ 2\ 3)^{-10}(3\ 4\ 5)^{-10} \\ &= (1\ 2\ 3)(3\ 4\ 5)(1\ 2\ 3)^{-1}(3\ 4\ 5)^{-1} \\ &= (1\ 4\ 3) \neq e \end{aligned}$$



- ▶ つまり, $x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10}$ は G の単位元ではない
- ▶ つまり, 1×3 のタイルと十字のペントミノで, 10×10 の盤面は敷き詰められない □

目次

- 15 パズル
- タイリング
- 今日のまとめ

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりではやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員と TA は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK