離散数理工学　第 6 回
離散代数：有限群

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 11 月 21 日

最終更新：2017 年 11 月 20 日　11:19



## スケジュール 前半 (予定)

1. 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/3)
2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/10)
- ⋆ 休講 (体育祭) (10/17)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/24)
- ⋆ 休講 (出張) (10/31)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/7)
5. 離散代数：対称群と置換群 (11/14)
6. 離散代数：有限群 (11/21)
7. 離散代数：有限群の応用 (11/28)

注意：予定の変更もありうる



## スケジュール 後半 (予定)

8. 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/5)
- ⋆ 中間試験 (12/12)
9. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/19)
10. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/9)
11. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/16)
12. 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/23)
13. 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (1/30)
- ⋆ 予備日 (2/6)
- ⋆ 期末試験 (2/13?)

注意：予定の変更もありうる



## 今日の目標

**今日の目標**

有限群に関する基礎的な用語が使えるようになる
- 群の定義，単位元，逆元
- 群の表示
- 群の同型性，準同型性





## 目次







## 群の例 (1)：整数と加法

整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は加法 $+$ に関して群となり，その群を $(\mathbb{Z}, +)$ と表す

群表 (ケーリー表とも呼ばれる)

| $+$ | $\cdots$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\vdots$ | | | | | | | | | | | |
| $-4$ | $\cdots$ | $-8$ | $-7$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | $\cdots$ |
| $-3$ | $\cdots$ | $-7$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | $\cdots$ |
| $-2$ | $\cdots$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | $\cdots$ |
| $-1$ | $\cdots$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $\cdots$ |
| 0 | $\cdots$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\cdots$ |
| 1 | $\cdots$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ |
| 2 | $\cdots$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\cdots$ |
| 3 | $\cdots$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $\cdots$ |
| 4 | $\cdots$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $\cdots$ |
| $\vdots$ | | | | | | | | | | | |





## 群の構成要素

**群は 2 つのものから定義される**
- 集合 $G$
- $G$ 上の演算 $\circ$
  - $x, y \in G$ に対する演算結果が $x \circ y$
  - 演算は他の記号 (例えば，$*$，$\cdot$，$\times$，$+$ など) で表すことも多い
  - $x \circ y$ を単に $xy$ と書くことも多い　← 今後これを用いることが多い

ただし，この $G$ と $\circ$ は次の条件を満たす必要がある

この 2 つを組にして，$(G, \circ)$ と群を表記する
(「$\circ$」を省略して,「$G$」だけで表記する場合も多い)





## 群の定義

**群とは？**

集合 $G$ と $G$ 上の演算 $\circ$ の組 $(G, \circ)$ が群であるとは，次を満たすこと

1. ある要素 $e \in G$ が存在して，任意の $x \in G$ に対して
$$x \circ e = e \circ x = x$$
2. 任意の要素 $x \in G$ に対して，ある要素 $y \in G$ が存在して
$$x \circ y = y \circ x = e$$
3. 演算 $\circ$ は次の結合性を満たす：任意の $x, y, z \in G$ に対して
$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

## 群の例 (1)：整数と加法 — 1 つ目の条件

整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は加法 $+$ に関して群となり，その群を $(\mathbb{Z}, +)$ と表す

群表

| $+$ | $\cdots$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\vdots$ | | | | | | | | | | | |
| $-4$ | $\cdots$ | $-8$ | $-7$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $\cdots$ |
| $-3$ | $\cdots$ | $-7$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $\cdots$ |
| $-2$ | $\cdots$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $\cdots$ |
| $-1$ | $\cdots$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $\cdots$ |
| $0$ | $\cdots$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $\cdots$ |
| $1$ | $\cdots$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $\cdots$ |
| $2$ | $\cdots$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $\cdots$ |
| $3$ | $\cdots$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ | $\cdots$ |
| $4$ | $\cdots$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ | $8$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | | | | | | | | | | | |





## 群の例 (1)：整数と加法 — 2 つ目の条件

整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は加法 $+$ に関して群となり，その群を $(\mathbb{Z}, +)$ と表す

群表

| $+$ | $\cdots$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\vdots$ | | | | | | | | | | | |
| $-4$ | $\cdots$ | $-8$ | $-7$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $\cdots$ |
| $-3$ | $\cdots$ | $-7$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $\cdots$ |
| $-2$ | $\cdots$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $\cdots$ |
| $-1$ | $\cdots$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $\cdots$ |
| $0$ | $\cdots$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $\cdots$ |
| $1$ | $\cdots$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $\cdots$ |
| $2$ | $\cdots$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $\cdots$ |
| $3$ | $\cdots$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ | $\cdots$ |
| $4$ | $\cdots$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ | $8$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | | | | | | | | | | | |





## 群の定義：単位元と逆元

**群とは？**

集合 $G$ と $G$ 上の演算 $\circ$ の組 $(G, \circ)$ が群であるとは，次を満たすこと

1. ある要素 $e \in G$ が存在して，任意の $x \in G$ に対して
$$x \circ e = e \circ x = x$$
このの $e$ を $G$ の単位元と呼ぶ
2. 任意の要素 $x \in G$ に対して，ある要素 $y \in G$ が存在して
$$x \circ y = y \circ x = e$$
この $y$ を $G$ における $x$ の逆元と呼び，$x^{-1}$ で表すことが多い
3. 演算 $\circ$ は次の結合性を満たす：任意の $x, y, z \in G$ に対して
$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$





## 群ではない例

1. 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は乗法 $\times$ に関して群になる？
   - ならない (なぜ？)
2. 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は乗法 $\times$ に関して群になる？
   - ならない (なぜ？)
3. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は減算 $-$ に関して群になる？
   - ならない (なぜ？)





## 群の例 (2)

$G = \{x, y, z, w\}$

群表

| $\circ$ | $x$ | $y$ | $z$ | $w$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $y$ | $z$ | $w$ |
| $y$ | $y$ | $z$ | $w$ | $x$ |
| $z$ | $z$ | $w$ | $x$ | $y$ |
| $w$ | $w$ | $x$ | $y$ | $z$ |

この表は次の関係を表している

$$\begin{array}{llll} x \circ x = x, & x \circ y = y, & x \circ z = z, & x \circ w = w, \\ y \circ x = y, & y \circ y = z, & y \circ z = w, & y \circ w = x, \\ z \circ x = z, & z \circ y = w, & z \circ z = x, & z \circ w = y, \\ w \circ x = w, & w \circ y = x, & w \circ z = y, & w \circ w = z \end{array}$$





## 群の例 (2)

$G = \{x, y, z, w\}$

群表

| $\circ$ | $x$ | $y$ | $z$ | $w$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $y$ | $z$ | $w$ |
| $y$ | $y$ | $z$ | $w$ | $x$ |
| $z$ | $z$ | $w$ | $x$ | $y$ |
| $w$ | $w$ | $x$ | $y$ | $z$ |

これが群であるための条件を満たしていることを確認

- 単位元は？
- $x$ の逆元は？ $y$ の逆元は？ $z$ の逆元は？ $w$ の逆元は？
- 結合性は？ (例えば，$(y \circ w) \circ z \stackrel{?}{=} y \circ (w \circ z)$)





## 群の例 (3)

$G = \{x, y, z, w\}$

群表

| $\circ$ | $x$ | $y$ | $z$ | $w$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $y$ | $z$ | $w$ |
| $y$ | $y$ | $x$ | $w$ | $z$ |
| $z$ | $z$ | $w$ | $x$ | $y$ |
| $w$ | $w$ | $z$ | $y$ | $x$ |

この表は次の関係を表している

$$\begin{array}{llll} x \circ x = x, & x \circ y = y, & x \circ z = z, & x \circ w = w, \\ y \circ x = y, & y \circ y = x, & y \circ z = w, & y \circ w = z, \\ z \circ x = z, & z \circ y = w, & z \circ z = x, & z \circ w = y, \\ w \circ x = w, & w \circ y = z, & w \circ z = y, & w \circ w = x \end{array}$$





## 群の例 (3)

$G = \{x, y, z, w\}$

群表

| $\circ$ | $x$ | $y$ | $z$ | $w$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $y$ | $z$ | $w$ |
| $y$ | $y$ | $x$ | $w$ | $z$ |
| $z$ | $z$ | $w$ | $x$ | $y$ |
| $w$ | $w$ | $z$ | $y$ | $x$ |

これが群であるための条件を満たしていることを確認

- 単位元は？
- $x$ の逆元は？ $y$ の逆元は？ $z$ の逆元は？ $w$ の逆元は？
- 結合性は？ (例えば，$(y \circ w) \circ z \stackrel{?}{=} y \circ (w \circ z)$)

## 群の例 (4)

$G = \{e, a, b, x, y, z\}$

群表

| $\circ$ | $e$ | $a$ | $b$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $x$ | $y$ | $z$ |
| $a$ | $a$ | $x$ | $y$ | $e$ | $z$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $z$ | $e$ | $y$ | $x$ | $a$ |
| $x$ | $x$ | $e$ | $z$ | $a$ | $b$ | $y$ |
| $y$ | $y$ | $b$ | $a$ | $z$ | $e$ | $x$ |
| $z$ | $z$ | $y$ | $x$ | $b$ | $a$ | $e$ |

この表は次の関係を表している

$$
\begin{array}{llllll}
e \circ e = e, & e \circ a = a, & e \circ b = b, & e \circ x = x, & e \circ y = y, & e \circ z = z, \\
a \circ e = a, & a \circ a = x, & a \circ b = y, & a \circ x = e, & a \circ y = z, & a \circ z = b, \\
b \circ e = b, & b \circ a = z, & b \circ b = e, & b \circ x = y, & b \circ y = x, & b \circ z = a, \\
x \circ e = x, & x \circ a = e, & x \circ b = z, & x \circ x = a, & x \circ y = b, & x \circ z = y, \\
y \circ e = y, & y \circ a = b, & y \circ b = a, & y \circ x = z, & y \circ y = e, & y \circ z = x, \\
z \circ e = z, & z \circ a = y, & z \circ b = x, & z \circ x = b, & z \circ y = a, & z \circ z = e
\end{array}
$$





## 群の例 (4)

$G = \{e, a, b, x, y, z\}$

群表

| $\circ$ | $e$ | $a$ | $b$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $x$ | $y$ | $z$ |
| $a$ | $a$ | $x$ | $y$ | $e$ | $z$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $z$ | $e$ | $y$ | $x$ | $a$ |
| $x$ | $x$ | $e$ | $z$ | $a$ | $b$ | $y$ |
| $y$ | $y$ | $b$ | $a$ | $z$ | $e$ | $x$ |
| $z$ | $z$ | $y$ | $x$ | $b$ | $a$ | $e$ |

これが群であるための条件を満たしていることを確認

- 単位元は？
- $G$ の各要素の逆元は？
- 結合性は？ (例えば，$(x \circ y) \circ z \stackrel{?}{=} x \circ (y \circ z)$)

注意：$a \circ y \neq y \circ a$ (可換性を満たさない)





## アーベル群

**アーベル群とは？**

群 $(G, \circ)$ がアーベル群であるとは，次の性質を満たすこと

$$\text{任意の } x, y \in G \text{ に対して，} \quad x \circ y = y \circ x$$

この性質を可換性 (交換性) と呼ぶ

- アーベル群は可換群とも呼ばれる
- アーベル群ではない場合，群は非可換群と呼ばれる





## 有限群と位数

**有限群とは？**

群 $(G, \circ)$ が有限群であるとは，$G$ の要素数が $|G|$ が有限であること

**有限群の位数とは？**

有限群 $(G, \circ)$ の位数とは，$|G|$ のこと

今までの例

- 例 (1)：有限群ではない (アーベル群)
- 例 (2)：有限群であり，位数は 4 (アーベル群)
- 例 (3)：有限群であり，位数は 4 (アーベル群)
- 例 (4)：有限群であり，位数は 6 (非可換群)

この講義の焦点は有限群





## 群の要素の表記法

群 $(G, \circ)$

- $x \circ y$ とは書かずに，$xy$ と書くことが多い
- $x \circ x$ とは書かずに，$x^2$ と書くことが多い
- $(x \circ y) \circ z$ と $x \circ (y \circ z)$ は同じなので，
  これらを $x \circ y \circ z$ と書き，もっと省略して $xyz$ と書くことが多い
- $xxx$ とは書かずに，$x^3$ と書くことが多い
- $x$ を $n$ 個並べたものは $x^n$ と書くことが多い
- $x$ の逆元は $x^{-1}$ と書くことが多い
- $x^{-1}$ を $n$ 個並べたものは $x^{-n}$ と書くことが多い
- $x^0$ は単位元 $e$ を表す

このとき，次の指数法則が成り立つ

**観察**

任意の $x \in G$ と任意の整数 $n, m$ に対して，$x^n x^m = x^{n+m}$





## 練習問題

群 $G$

**例題**

任意の $x, y \in G$ に対して，$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$

証明：

- 逆元の定義より，$(xy)(xy)^{-1} = e$ (ただし，$e$ は $G$ の単位元)
- この式の両辺に左から $x^{-1}$ をかけると

$$
\begin{aligned}
x^{-1}(xy)(xy)^{-1} &= x^{-1}e \\
(x^{-1}x)y(xy)^{-1} &= x^{-1} \\
y(xy)^{-1} &= x^{-1}
\end{aligned}
$$

- 今得られた式の両辺に左から $y^{-1}$ をかけると

$$
\begin{aligned}
y^{-1}y(xy)^{-1} &= y^{-1}x^{-1} \\
\therefore \quad (xy)^{-1} &= y^{-1}x^{-1}
\end{aligned}
$$

□





## 目次







## 復習：置換群とは？

有限集合 $X$

**置換群とは？**

$X$ 上の置換群とは，$X$ 上の置換の集合 $S$ で以下を満たすもの

1. $e \in S$ (恒等置換を持つ)
2. $\pi, \sigma \in S$ ならば $\pi\sigma \in S$ (積で閉じている)
3. $\pi \in S$ ならば $\pi^{-1} \in S$ (逆置換も持つ)

## 置換群は群

**観察**

置換群は写像の合成に関して群である

用語の対応

| 群 | 置換群 |
|---|---|
| 単位元 | 恒等置換 |
| 逆元 | 逆置換 |





## 置換群の群表 (1)

対称群 $S_3$ の群表

| $\circ$ | $e$ | (1 2) | (1 3) | (2 3) | (1 2 3) | (1 3 2) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | (1 2) | (1 3) | (2 3) | (1 2 3) | (1 3 2) |
| (1 2) | (1 2) | $e$ | (1 3 2) | (1 2 3) | (2 3) | (1 3) |
| (1 3) | (1 3) | (1 2 3) | $e$ | (1 3 2) | (1 2) | (2 3) |
| (2 3) | (2 3) | (1 3 2) | (1 2 3) | $e$ | (1 3) | (1 2) |
| (1 2 3) | (1 2 3) | (1 3) | (2 3) | (1 2) | (1 3 2) | $e$ |
| (1 3 2) | (1 3 2) | (2 3) | (1 2) | (1 3) | $e$ | (1 2 3) |





## 置換群の群表 (2)

交代群 $A_3$ の群表

| $\circ$ | $e$ | (1 2 3) | (1 3 2) |
|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | (1 2 3) | (1 3 2) |
| (1 2 3) | (1 2 3) | (1 3 2) | $e$ |
| (1 3 2) | (1 3 2) | $e$ | (1 2 3) |





## 目次







## 群の要素を作る

群 $G$

- $a \in G$ のとき，$a^2 \in G$，$a^3 \in G$，$a^4 \in G$，...
- $a, b \in G$ のとき，$ab \in G$，$a^2b \in G$，$aba \in G$，...

このように，要素を並べることで，$G$ の要素がどんどん作れる





## 群の表示：例 (3) を見て

$G = \{x, y, z, w\}$

群表

| $\circ$ | $x$ | $y$ | $z$ | $w$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $y$ | $z$ | $w$ |
| $y$ | $y$ | $x$ | $w$ | $z$ |
| $z$ | $z$ | $w$ | $x$ | $y$ |
| $w$ | $w$ | $z$ | $y$ | $x$ |

- $yz = w$ が成り立つ
- つまり，$y$ と $z$ があれば，$w$ は復元できる ($w$ はある意味で不要)
- $x$ は単位元 ($e$ と書く)
- $y$ は $y^2 = e$ を満たす
- $z$ は $z^2 = e$ を満たす
- $y$ と $z$ は $yz = zy$ を満たす (書き換えると $z^{-1}yzy^{-1} = e$)





## 群の表示：例 (3) を見て

$G = \{e, a, b, ab\}$

群表

| $\circ$ | $e$ | $a$ | $b$ | $ab$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $ab$ |
| $a$ | $a$ | $e$ | $ab$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $ab$ | $e$ | $a$ |
| $ab$ | $ab$ | $b$ | $a$ | $e$ |

別の書き方 (群の**表示**と呼ばれる)：

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = e, ab = ba \rangle$$

読み方

- 「$a, b$」を並べることで $G$ の要素はすべて表現できる
- 並べたとき,「$a^2 = b^2 = e$, $ab = ba$」と置き換えてよい
- 置き換える規則は，これら (から導かれるもの) 以外にない

用語

- $\{a, b\}$ は $G$ の**生成系**,「$a^2 = b^2 = e$, $ab = ba$」は**関係式**





## 群の表示：例 (3) を見て

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = e, ab = ba \rangle$$

簡約の例

$$\begin{aligned} ab^3a^3b &= abbbaaab \\ &= a(bb)b(aa)ab \\ &= aebeab \\ &= abab \\ &= a(ba)b \\ &= a(ab)b \\ &= aabb \\ &= ee \\ &= e \end{aligned}$$

## 群の表示：群の例 (2)

$G = \{x, y, z, w\}$

群表

| $\circ$ | $x$ | $y$ | $z$ | $w$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $y$ | $z$ | $w$ |
| $y$ | $y$ | $z$ | $w$ | $x$ |
| $z$ | $z$ | $w$ | $x$ | $y$ |
| $w$ | $w$ | $x$ | $y$ | $z$ |

関係式

- 単位元は $x$ ($e$ と書くことにする)
- $y^2 = z$，$y^3 = zy = w$ ($y$ があれば，$z$ と $w$ は表現できる)
- $y^4 = wy = e$





## 群の表示：群の例 (2)

$G = \{e, a, a^2, a^3\}$

群表

| $\circ$ | $e$ | $a$ | $a^2$ | $a^3$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $a^2$ | $a^3$ |
| $a$ | $a$ | $a^2$ | $a^3$ | $e$ |
| $a^2$ | $a^2$ | $a^3$ | $e$ | $a$ |
| $a^3$ | $a^3$ | $e$ | $a$ | $a^2$ |

群の表示

$$\langle a \mid a^4 = e \rangle$$





## 巡回群

**(有限) 巡回群とは？**

位数 $n$ の巡回群とは，次の表示を持つ群　　($n \geq 0$ は自然数)

$$C_n = \langle a \mid a^n = e \rangle$$

例 (2) は位数 4 の巡回群

**注意**

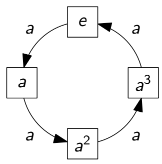
- $C_n = \{e, a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}\}$
- すなわち，$C_n$ の位数は $n$
- $C_n$ はアーベル群 (演習問題)
  - ヒント：$C_n$ の任意の要素はある自然数 $k$ を用いて $a^k$ と書ける





## ケーリー・グラフ：巡回群

$C_4 = \langle a \mid a^4 = e \rangle$







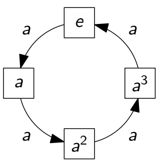

## ケーリー・グラフ

群 $G$ とその生成系 $S$

**ケーリー・グラフとは？**

$(G, S)$ のケーリー・グラフとは，次で定義される有向グラフ

- 頂点集合は $G$
- 弧 $(x, y) \in G \times G$ がある $\Leftrightarrow$ ある $z \in S$ が存在して，$y = xz$








## 群の表示：群の例 (4)

$G = \{e, a, b, x, y, z\}$

群表

| $\circ$ | $e$ | $a$ | $b$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $x$ | $y$ | $z$ |
| $a$ | $a$ | $x$ | $y$ | $e$ | $z$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $z$ | $e$ | $y$ | $x$ | $a$ |
| $x$ | $x$ | $e$ | $z$ | $a$ | $b$ | $y$ |
| $y$ | $y$ | $b$ | $a$ | $z$ | $e$ | $x$ |
| $z$ | $z$ | $y$ | $x$ | $b$ | $a$ | $e$ |

関係式

- $a^2 = x$，$ab = y$，$ba = z$ ($a, b$ があれば，$x, y, z$ は表現できる)
- $a^3 = e$，$b^2 = e$，$abab = e$





## 群の表示：群の例 (4)

$G = \{e, a, b, a^2, ab, ba\}$

群表

| $\circ$ | $e$ | $a$ | $b$ | $a^2$ | $ab$ | $ba$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $a^2$ | $ab$ | $ba$ |
| $a$ | $a$ | $a^2$ | $ab$ | $e$ | $ba$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $ba$ | $e$ | $ab$ | $a^2$ | $a$ |
| $a^2$ | $a^2$ | $e$ | $ba$ | $a$ | $b$ | $ab$ |
| $ab$ | $ab$ | $b$ | $a$ | $ba$ | $e$ | $a^2$ |
| $ba$ | $ba$ | $ab$ | $a^2$ | $b$ | $a$ | $e$ |

群の表示

$$G = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = abab = e \rangle$$





## 群の表示：群の例 (4)

群の表示

$$G = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = abab = e \rangle$$

簡約の例

$$\begin{aligned} aba &= ababb \\ &= (abab)b \\ &= eb \\ &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2ba^2b &= aabaab \\ &= aabaeab \\ &= aabab bab \\ &= a(abab)bab \\ &= aebab \\ &= abab \\ &= e \end{aligned}$$

## 二面体群

### (有限) 二面体群とは？

位数 $2n$ の二面体群とは，次の表示を持つ群　　$(n \geq 0$ は自然数$)$

$$D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = abab = e \rangle$$

例 (4) は位数 6 の二面体群

### 注意

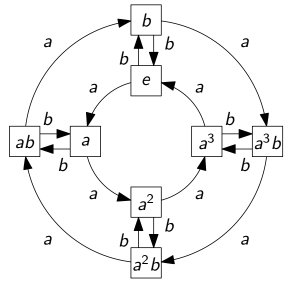
- $D_n = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$
- すなわち，$D_n$ の位数は $2n$
- $n \geq 3$ のとき $D_n$ は非可換群 (演習問題)
  - ヒント：$ab$ と $ba$ を考える





## ケーリー・グラフ：二面体群

$D_4 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = abab = e \rangle$








## 目次







## 対称群の表示 (1)

対称群 $S_3$ の群表

| $\circ$ | $e$ | $(1\ 2)$ | $(1\ 3)$ | $(2\ 3)$ | $(1\ 2\ 3)$ | $(1\ 3\ 2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $(1\ 2)$ | $(1\ 3)$ | $(2\ 3)$ | $(1\ 2\ 3)$ | $(1\ 3\ 2)$ |
| $(1\ 2)$ | $(1\ 2)$ | $e$ | $(1\ 3\ 2)$ | $(1\ 2\ 3)$ | $(2\ 3)$ | $(1\ 3)$ |
| $(1\ 3)$ | $(1\ 3)$ | $(1\ 2\ 3)$ | $e$ | $(1\ 3\ 2)$ | $(1\ 2)$ | $(2\ 3)$ |
| $(2\ 3)$ | $(2\ 3)$ | $(1\ 3\ 2)$ | $(1\ 2\ 3)$ | $e$ | $(1\ 3)$ | $(1\ 2)$ |
| $(1\ 2\ 3)$ | $(1\ 2\ 3)$ | $(1\ 3)$ | $(2\ 3)$ | $(1\ 2)$ | $(1\ 3\ 2)$ | $e$ |
| $(1\ 3\ 2)$ | $(1\ 3\ 2)$ | $(2\ 3)$ | $(1\ 2)$ | $(1\ 3)$ | $e$ | $(1\ 2\ 3)$ |

$S_3$ の表示は？





## 対称群の表示 (続き)

1 つの表示法

| $\circ$ | $e$ | $a$ | $b$ | $bab$ | $ba$ | $ab$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $bab$ | $ba$ | $ab$ |
| $a$ | $a$ | $e$ | $ab$ | $ba$ | $bab$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $ba$ | $e$ | $ab$ | $a$ | $bab$ |
| $bab$ | $bab$ | $ab$ | $ba$ | $e$ | $b$ | $a$ |
| $ba$ | $ba$ | $b$ | $bab$ | $a$ | $ab$ | $e$ |
| $ab$ | $ab$ | $bab$ | $a$ | $b$ | $e$ | $ba$ |

つまり，

$$\langle a, b \mid a^2 = b^2 = ababab = e \rangle$$





## 対称群の表示 (続き)

別の表示法

| $\circ$ | $e$ | $x$ | $yx$ | $xy$ | $y$ | $y^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $x$ | $yx$ | $xy$ | $y$ | $y^2$ |
| $x$ | $x$ | $e$ | $y^2$ | $y$ | $xy$ | $yx$ |
| $yx$ | $yx$ | $y$ | $e$ | $y^2$ | $x$ | $xy$ |
| $xy$ | $xy$ | $y^2$ | $y$ | $e$ | $yx$ | $x$ |
| $y$ | $y$ | $yx$ | $xy$ | $x$ | $y^2$ | $e$ |
| $y^2$ | $y^2$ | $xy$ | $x$ | $yx$ | $e$ | $y$ |

つまり，

$$\langle x, y \mid x^2 = y^3 = xyxy = yxyx = xy^2xy^2 = e \rangle$$





## 対称群の表示：ここまでのまとめ

3 次の対称群 $S_3$ に対して，2 つの表示が得られた

- $\langle a, b \mid a^2 = b^2 = ababab = e \rangle$
- $\langle x, y \mid x^2 = y^3 = xyxy = yxyx = xy^2xy^2 = e \rangle$

別の言い方をすると

- この 2 つの有限群は 3 次の対称群と 同型 である

同型な群は，本質的に「同じ」である





## 群の準同型性と同型性

群 $(G, \circ)$ と群 $(H, \star)$

### 群準同型写像とは？

$(G, \circ)$ から $(H, \star)$ への群準同型写像とは，
写像 $\phi \colon G \to H$ で，次を満たすもの

任意の $x, y \in G$ に対して，　$\phi(x \circ y) = \phi(x) \star \phi(y)$

### 群同型写像とは？

$(G, \circ)$ から $(H, \star)$ への群同型写像とは，
$(G, \circ)$ から $(H, \star)$ への群準同型写像で，全単射であるもの

$(G, \circ)$ から $(H, \star)$ への群同型写像が存在するとき，
$(G, \circ)$ と $(H, \star)$ は同型であるという

## 対称群の表示：同型写像 (1)

3 次の対称群 $S_3 = \{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ に対して，
2 つの表示が得られた

- $G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = ababab = e \rangle$
- $H = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = xyxy = yxyx = xy^2xy^2 = e \rangle$

写像 $\phi\colon S_3 \to G$ として次を考える

$$\phi(e) = e, \quad \phi((1\ 2)) = a, \quad \phi((1\ 3)) = b,$$
$$\phi((2\ 3)) = bab, \quad \phi((1\ 2\ 3)) = ba, \quad \phi((1\ 3\ 2)) = ab$$

この $\phi$ は同型写像である．例えば

$$\phi((1\ 2)(1\ 3)) = \phi((1\ 3\ 2)) = ab = \phi((1\ 2))\phi((1\ 3))$$





## 対称群の表示：同型写像であることの確認 (1)

$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = ababab = e \rangle$

**同型写像であることを確認するためには**

関係式を満たすことが確認できればよい

写像 $\phi\colon S_3 \to G$ として次を考える

$$\phi(e) = e, \quad \phi((1\ 2)) = a, \quad \phi((1\ 3)) = b,$$
$$\phi((2\ 3)) = bab, \quad \phi((1\ 2\ 3)) = ba, \quad \phi((1\ 3\ 2)) = ab$$

このとき，

$$\begin{aligned}
a^2 &= \phi((1\ 2))\phi((1\ 2)) = \phi((1\ 2)(1\ 2)) = \phi(e) = e,\\
b^2 &= \phi((1\ 3))\phi((1\ 3)) = \phi((1\ 3)(1\ 3)) = \phi(e) = e,\\
ababab &= \phi((1\ 2))\phi((1\ 3))\phi((1\ 2))\phi((1\ 3))\phi((1\ 2))\phi((1\ 3))\\
&= \phi((1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3))\\
&= \phi((1\ 3\ 2)(1\ 3\ 2)(1\ 3\ 2)) = \phi(e) = e
\end{aligned}$$

ゆえに，$\phi$ は $S_3$ から $G$ への群同型写像である





## 対称群の表示：同型写像 (2)

3 次の対称群 $S_3 = \{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ に対して，
2 つの表示が得られた

- $G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = ababab = e \rangle$
- $H = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = xyxy = yxyx = xy^2xy^2 = e \rangle$

写像 $\psi\colon S_3 \to H$ として次を考える

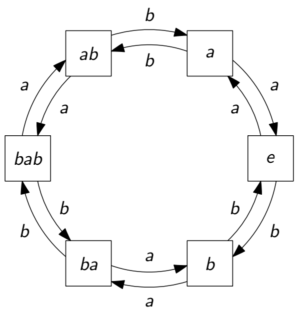
$$\psi(e) = e, \quad \psi((1\ 2)) = x, \quad \psi((1\ 3)) = yx,$$
$$\psi((2\ 3)) = xy, \quad \psi((1\ 2\ 3)) = y, \quad \psi((1\ 3\ 2)) = y^2$$

この $\psi$ は同型写像である．(証明は演習問題)

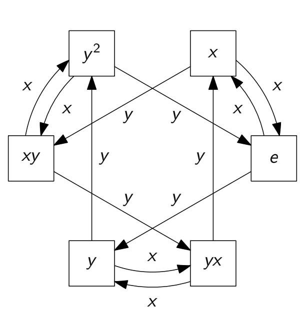




## 対称群の表示：ケーリー・グラフ



$G$ のケーリー・グラフ



$H$ のケーリー・グラフ





## 群準同型の性質：単位元

群 $(G, \circ)$ と群 $(H, \star)$，群準同型 $\phi\colon G \to H$

**群準同型の性質 (1)**

$G$ の単位元 $e_G$，$H$ の単位元 $e_H$ に対して，

$$\phi(e_G) = e_H$$

証明：群準同型の定義より

$$\begin{aligned}
\phi(e_G) &= \phi(e_G \circ e_G) = \phi(e_G) \star \phi(e_G)\\
\therefore\quad \phi(e_G) \star \phi(e_G)^{-1} &= \phi(e_G) \star \phi(e_G) \star \phi(e_G)^{-1}\\
\therefore\quad e_H &= \phi(e_G)
\end{aligned}$$

□





## 群準同型の性質：逆元

群 $(G, \circ)$ と群 $(H, \star)$，群準同型 $\phi\colon G \to H$

**群準同型の性質 (2)**

任意の $x \in G$ に対して

$$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$$

証明：演習問題





## 目次







## 今日の目標

**今日の目標**

有限群に関する基礎的な用語が使えるようになる

- 群の定義，単位元，逆元
- 群の表示
- 群の同型性，準同型性

**次回の予告**

有限群の応用として，次を扱う

- 15 パズル
- タイリング

## 残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK