離散数理工学　第 4 回
数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 11 月 7 日

最終更新：2017 年 11 月 6 日　08:16

スケジュール 前半 (予定)

1. 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/3)
2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/10)
- ⋆ 休講 (体育祭) (10/17)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/24)
- ⋆ 休講 (出張) (10/31)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/7)
5. 離散代数：対称群と置換群 (11/14)
6. 離散代数：有限群 (11/21)
7. 離散代数：有限群の応用 (11/28)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/5)
- ⋆ 中間試験 (12/12)
9. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/19)
10. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/9)
11. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/16)
12. 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/23)
13. 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (1/30)
- ⋆ 予備日 (2/6)
- ⋆ 期末試験 (2/13?)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる
- 線形漸化式の解法
- より複雑な漸化式の解法
- カタラン数

目次

数列の母関数

母関数とは？

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ の母関数とは冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

のこと (x は複素数)

仮定

この冪級数は収束する
- 特に，ある定数 $r > 0$ が存在して $|x| < r$ のとき収束するとする
- つまり，$|x| < r$ のとき，$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は well-defined

収束するので,『微分積分学』,『解析学』,『複素関数論』の知識が使える

代表的な数列の母関数

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$	一般項 a_n	母関数 $A(x)$
$1, 1, 1, 1, \ldots$	1	$\frac{1}{1-x}$
$1, 2, 4, 8, \ldots$	2^n	$\frac{1}{1-2x}$
$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$	α^n	$\frac{1}{1-\alpha x}$
$0, 1, 2, 3, \ldots$	n	$\frac{x}{(1-x)^2}$

目次

道 — まとめ　(第 2 回講義より)

$a_n =$ グラフ P_n における独立集合の総数　とする

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

- 特性方程式を用いた方法 (前回)
- 行列を用いた方法 (前回)
- 母関数を用いた方法 (今回)

母関数を用いた漸化式の解法

0 a_0 を便宜上定める

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする

- このとき，$a_2 = 3 = 2 + 1 = a_1 + a_0$
- つまり，上の漸化式は $n \geq 2$ において成立

書き換えた漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

母関数を用いた漸化式の解法

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ \therefore\quad a_n x^n &= a_{n-1}x^n + a_{n-2}x^n \end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - 2x \\ \text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0\right) + x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\ &= xA(x) - x + x^2 A(x) \end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 - 2x &= xA(x) - x + x^2 A(x) \\ \therefore\quad (x^2 + x - 1)A(x) &= -x - 1 \\ \therefore\quad A(x) &= -\frac{x+1}{x^2+x-1} \end{aligned}$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = -\frac{x+1}{x^2+x-1}$$

このとき，$-\frac{x+1}{x^2+x-1}$ の部分分数分解が必要

- 「分母 $= 0$」を x について解くと，$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ となる
- したがって，ある定数 a, b が存在して

$$-\frac{x+1}{x^2+x-1} = \frac{a}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

- この a, b を定める (次のページ)

母関数を用いた漸化式の解法

$$\begin{aligned} -\frac{x+1}{x^2+x-1} &= \frac{a}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\ \therefore\quad -(x+1) &= a\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ \therefore\quad -x-1 &= (a+b)x + \left(-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b\right) \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} -1 &= a + b \quad \text{かつ} \\ -1 &= -\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b \end{aligned}$$

これを a, b に関して解くと

$$a = \frac{-5-\sqrt{5}}{10}, \quad b = \frac{-5+\sqrt{5}}{10}$$

母関数を用いた漸化式の解法

したがって，

$$\begin{aligned} A(x) &= -\frac{x+1}{x^2+x-1} = -\frac{5+\sqrt{5}}{10}\frac{1}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{5-\sqrt{5}}{10}\frac{1}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\frac{1}{1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}x} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\frac{1}{1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}x} \\ &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n x^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right)x^n \end{aligned}$$

したがって，任意の $n \geq 0$ に対して，

$$a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \qquad \square$$

目次

例題 1

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

例題 1：直感を得る

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- $a_1 = 3$
- $a_2 = 4a_1 - 3^{2-1} = 4 \cdot 3 - 3^1 = 12 - 3 = 9$
- $a_3 = 4a_2 - 3^{3-1} = 4 \cdot 9 - 3^2 = 36 - 9 = 27$
- $a_4 = 4a_3 - 3^{4-1} = 4 \cdot 27 - 3^3 = 108 - 27 = 81$
- $\cdots$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 0

0. a_0 を便宜上定める

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする

- このとき，$a_1 = 3 = 4 \cdot 1 - 1 = 4a_0 - 3^0 = 4a_{1-1} - 3^{1-1}$

したがって，考えている漸化式は次のように書き換えられる

例題 1：書き換えた漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 1

1. 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 3^{n-1} \\ \therefore \quad a_n x^n &= 4a_{n-1}x^n - 3^{n-1}x^n \end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n = \sum_{n\geq 1} 4a_{n-1}x^n - \sum_{n\geq 1} 3^{n-1}x^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

例題 1：母関数を用いた解法 Step 2

2. 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} a_n x^n &= \sum_{n\geq 1} 4a_{n-1}x^n - \sum_{n\geq 1} 3^{n-1}x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1 \\ \text{右辺} &= \sum_{n\geq 0} 4a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} 3^n x^{n+1} \\ &= 4x\sum_{n\geq 0} a_n x^n - x\sum_{n\geq 0}(3x)^n \\ &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \end{aligned}$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 3

3. 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \\ \therefore \quad (1-4x)A(x) &= 1 - \frac{x}{1-3x} \\ \therefore \quad A(x) &= \frac{1}{1-4x} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\ &= \frac{1-3x}{(1-3x)(1-4x)} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\ &= \frac{1-4x}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{1}{1-3x} \end{aligned}$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

例題 1：母関数を用いた解法 Step 4

4. 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x}$$

したがって，

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

したがって，任意の $n \geq 0$ に対して

$$a_n = 3^n \qquad \square$$

例題 2

例題 2

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

例題 2：直感を得る

例題 2

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- $a_0 = 1$
- $a_1 = 3a_0 + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$
- $a_2 = 3a_1 + 2 \cdot 2 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 19$
- $a_3 = 3a_2 + 2 \cdot 3 = 3 \cdot 19 + 2 \cdot 3 = 63$
- $a_4 = 3a_3 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 63 + 2 \cdot 4 = 197$
- $\cdots$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2n \\ \therefore \quad a_n x^n &= 3a_{n-1}x^n + 2nx^n \end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1}x^n + \sum_{n\geq 1} 2nx^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

例題 2：母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} a_n x^n &= \sum_{n\geq 1} 3a_{n-1}x^n + \sum_{n \geq 1} 2nx^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1 \\ \text{右辺} &= \sum_{n\geq 0} 3a_n x^{n+1} + \sum_{n\geq 0}(2n+2)x^{n+1} \\ &= 3x \sum_{n\geq 0} a_n x^n + 2x \sum_{n\geq 0} nx^n + 2x \sum_{n\geq 0} x^n \end{aligned}$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 2 (続き)

右辺の整理 (続き)

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= 3x \sum_{n\geq 0} a_n x^n + 2x \sum_{n\geq 0} nx^n + 2x \sum_{n\geq 0} x^n \\ &= 3xA(x) + 2x\frac{x}{(1-x)^2} + 2x\frac{1}{1-x} \\ &= 3xA(x) + \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x(1-x)}{(1-x)^2} \\ &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore \quad (1-3x)A(x) &= 1 + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore \quad A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \end{aligned}$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)}$$

部分分数分解を試みる，つまり

$$\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x}$$

となる a, b, c が一意に存在するので，それを定める (次のページ)

例題 1：母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数分解

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} &= \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x} \\ \therefore \quad 2x &= a(1-x)(1-3x) + bx(1-3x) + c(1-x)^2 \\ &= a(1-4x+3x^2) + b(x-3x^2) + c(1-2x+x^2) \\ &= (3a-3b+c)x^2 + (-4a+b-2c)x + (a+c) \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} 0 &= 3a - 3b + c \quad \text{かつ，} \\ 2 &= -4a + b - 2c \quad \text{かつ，} \\ 0 &= a + c \end{aligned}$$

この方程式を解くと，次が得られる

$$a = -\frac{3}{2}, \quad b = -1, \quad c = \frac{3}{2}$$

例題2：母関数を用いた解法 Step 4 (続き)

したがって，

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\ &= \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-3x} \\ &= \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{5}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^n - \frac{3}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}nx^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\cdot 3^n - \frac{3}{2} - n\right)x^n \end{aligned}$$

したがって，任意の $n \geq 0$ に対して，$a_n = \frac{5}{2}\cdot 3^n - n - \frac{3}{2}$ □

目次

Eugène C. Catalan

カタラン
(1814–1894)

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Catalan.html

カタラン数

カタラン数とは？

次の漸化式で定められる数 C_n を第 n カタラン数と呼ぶ

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：

- $C_1 = C_0C_0 = 1\cdot 1 = 1$
- $C_2 = C_0C_1 + C_1C_0 = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2$
- $C_3 = C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0 = 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 5$
- $C_4 = C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0 = 1\cdot 5 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 5\cdot 1 = 14$

目標：第 n カタラン数を表す式を母関数による方法で導く

カタラン数：母関数による解法 Step 1

1. 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \\ C_n x^n &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}\right) x^n = x\sum_{i=0}^{n-1}(C_i C_{n-i-1}x^{n-1}) \end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}x^{n-1}\right)$$

母関数を $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ と書くことにする

カタラン数：母関数による解法 Step 2

2. 各辺を $C(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n - C_0 = C(x) - 1 \\ \text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(x\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}x^{n-1}\right) \\ &= x\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}x^{n-1} \\ &= x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}x^{n} \end{aligned}$$

カタラン数：母関数による解法 Step 2 (続き)

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}x^n \\ &= x\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i}x^n \\ &= x\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j} \\ &= x\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_i x^i C_j x^j \\ &= x\left(\sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j\right) = xC(x)^2 \end{aligned}$$

カタラン数：母関数による解法 Step 3

3. 得られた式を $C(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} C(x) - 1 &= xC(x)^2 \\ xC(x)^2 - C(x) + 1 &= 0 \\ C(x) &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \end{aligned}$$

どちらが正しいのか？

カタラン数：母関数による解法 Step 3 (続き)

ここで，$\lim_{x\to 0} C(x) = C_0 = 1$ なので，

- $C(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ だとすると，

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$$

となり，合わない

- $C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ だとすると，

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-4x)}{2x(1+\sqrt{1-4x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{1+\sqrt{1-4x}} = 1$$

となり，合う

したがって，$C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ である

母関数を用いた漸化式の解法 Step 3 (続き 2)

3 得られた $C(x)$ の級数展開を導く

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$
$$xC(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

ここで，$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ なので，

$$xC(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^n$$

つまり，$xC(x)$ は次の数列 $\{a_n\}$ の母関数

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n=0 \text{ のとき}) \\ C_{n-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

まずは，$xC(x)$ の級数展開を導く

母関数を用いた漸化式の解法

補題 (テイラー展開を使うことで証明できる (証明は省略))

任意の実数 α に対して，$|z| < 1$ であるとき，

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

ただし，

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

すなわち，$\alpha = 1/2$, $z = -4x$ とすれば，次が得られる

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n$$

母関数を用いた漸化式の解法

$$\begin{aligned}
\therefore\quad xC(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \binom{1/2}{n} (-4)^n\right) x^n
\end{aligned}$$

したがって，

$$\text{任意の } n \geq 1 \text{ に対して} \quad C_{n-1} = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^n$$

整理

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^n &= -\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-4)^n \\
&= -\frac{1}{2}\frac{-2(-2+4)(-2+8)\cdots(-2+4n-4)}{n!} \\
&= \frac{2\cdot 6\cdot\cdots\cdot(4n-6)}{n!} = \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}2^{n-1} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}2^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-1)!} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}2^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)}{(n-1)!} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}\frac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n-2)}{(n-1)!} \\
&= \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}
\end{aligned}$$

まとめ

以上の議論より，任意の $n \geq 1$ に対して，

$$C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

つまり，次の公式が得られる

カタラン数の公式

任意の $n \geq 0$ に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

カタラン数の上界と下界

カタラン数の公式

任意の $n \geq 0$ に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

二項係数：簡単な評価 (復習)

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}\,a}{b}\right)^b$$

したがって，カタラン数に対する以下の上界と下界が得られる

$$\frac{2^n}{n+1} \leq C_n \leq \frac{(2\mathrm{e})^n}{n+1}$$

$\therefore$ カタラン数は n に関して指数関数的に増加する

目次

カタラン数の組合せ的解釈

リチャード・スタンレイ
- MIT 数学科の教授
- 組合せ論の研究者 (大家)
- カタラン数の組合せ的解釈を 214 個収集した

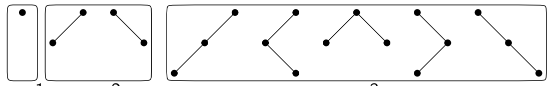
ここでは 2 つだけ紹介

http://en.wikipedia.org/wiki/Richard_P._Stanley

カタラン数の組合せ的解釈：二分木

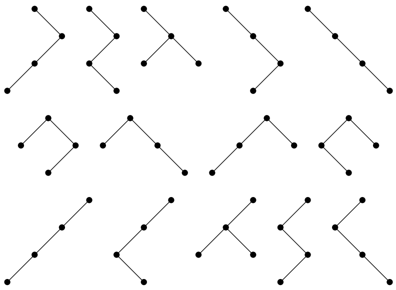
二分木とは？

頂点数 n の二分木とは，次のように再帰的に定義されるグラフ
- 頂点数 0 の二分木は空グラフ (頂点を持たないグラフ)
- 頂点数 1 の二分木は根と呼ばれる 1 頂点から成るグラフ
- 頂点数 $n \geq 2$ の二分木は，根 r と呼ばれる 1 頂点と，左部分木，右部分木と呼ばれる 2 つの二分木から成り，頂点数の総和は n であり，r と左部分木の根，r と右部分木の根を辺で結んだもの



カタラン数の組合せ的解釈：二分木

$n = 4$ のとき



目標

頂点数 n の二分木の総数 T_n の満たす漸化式を導く

カタラン数の組合せ的解釈：二分木の総数が満たす漸化式

T_n が満たす漸化式

$$T_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \sum_{i=0}^{n-1} T_i T_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

証明：$n \geq 1$ のとき，
- 左部分木の頂点数 ＋ 右部分木の頂点数 $= n-1$
- 左部分木の頂点数を i とすると，$i \in \{0, \ldots, n-1\}$ で，右部分木の頂点数は $n-i-1$
- このとき，左部分木は T_i 通り，右部分木は T_{n-i-1} 通りの可能性 □

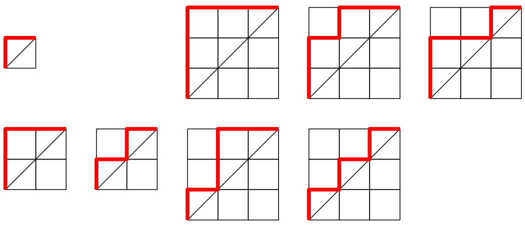
結論

頂点数 n の二分木の総数は第 n カタラン数 C_n と等しい

カタラン数の組合せ的解釈：ディック道

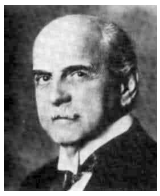
ディック道 (Dyck path) とは？

ディック道とは，$(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道で，直線 $y = x$ の下側を通らないもの



$D_n = (0,0)$ から (n,n) へ至るディック道の総数

Walther von Dyck



ディック
(1856–1934)

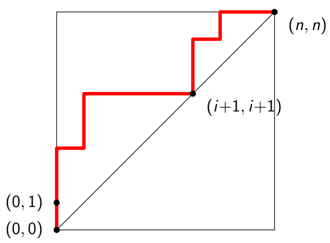
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Von_Dyck.html

カタラン数の組合せ的解釈：ディック道の総数が満たす漸化式

ディック道の総数が満たす漸化式

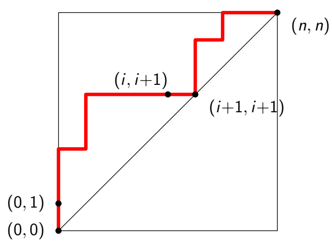
$$D_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \sum_{i=0}^{n-1} D_i D_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

証明：$n \geq 1$ のとき
- 「はじめの一歩」は必ず「上」
- $(0,0)$ の他に，はじめて直線 $y = x$ 上に来るときを考える
- その点を $(i+1, i+1)$ とする ($i \in \{0, \ldots, n-1\}$)



カタラン数の組合せ的解釈：ディック道の総数が満たす漸化式

証明 (続き)：
- $(i+1, i+1)$ に来る直前に，必ず $(i, i+1)$ にいる
- つまり，考えているディック道は以下の形をしている
  1. $(0,0)$ から $(0,1)$ に至る (← 1 通り)
  2. $(0,1)$ から $(i, i+1)$ に至る
  3. $(i, i+1)$ から $(i+1, i+1)$ に至る (← 1 通り)
  4. $(i+1, i+1)$ から (n,n) に至る



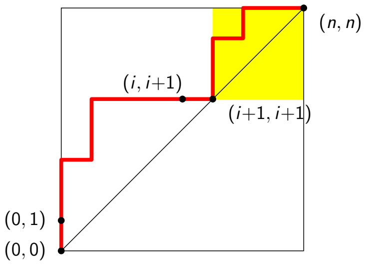
カタラン数の組合せ的解釈：ディック道の総数が満たす漸化式

証明 (続き)：

4 $(i+1, i+1)$ から (n, n) に至る

この間に $y = x$ より下に行かないので，

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{このような}\\\text{経路の総数}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{l}(0,0)\text{ から }(n-i-1, n-i-1)\text{ に至る}\\\text{ディック道の総数}\end{array}} = \boxed{D_{n-i-1}}$$



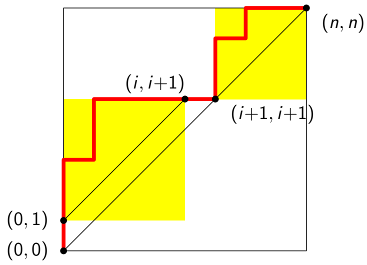
カタラン数の組合せ的解釈：ディック道の総数が満たす漸化式

証明 (続き)：

2 $(0, 1)$ から $(i, i+1)$ に至る

この間に $y = x$ 上に来ないので，

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{このような}\\\text{経路の総数}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{l}(0,0)\text{ から }(i, i)\text{ に至る}\\\text{ディック道の総数}\end{array}} = \boxed{D_i}$$



カタラン数の組合せ的解釈：ディック道の総数が満たす漸化式

証明 (続き)：

- $(i+1, i+1)$ に来る直前に，必ず $(i, i+1)$ にいる
- つまり，考えているディック道は以下の形をしている
  1. $(0, 0)$ から $(0, 1)$ に至る　($\leftarrow$ 1 通り)
  2. $(0, 1)$ から $(i, i+1)$ に至る　($\leftarrow D_i$ 通り)
  3. $(i, i+1)$ から $(i+1, i+1)$ に至る　($\leftarrow$ 1 通り)
  4. $(i+1, i+1)$ から (n, n) に至る　($\leftarrow D_{n-i-1}$ 通り)

したがって，$D_n = \sum_{i=0}^{n-1} D_i D_{n-i-1}$ □

結論

$(0, 0)$ から (n, n) へ至るディック道の総数は第 n カタラン数 C_n に等しい

目次

今日の目標

今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる

- 線形漸化式の解法
- カタラン数

注意

今日扱ったのは，母関数に関する初歩

- 母関数にまつわる理論は膨大
- 近年では「解析的組合せ論」という分野に成長

そこでは,『複素関数論』が重要な役割を果たす

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK