離散数理工学　第 3 回
数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 10 月 24 日

最終更新：2017 年 10 月 23 日　08:39

スケジュール 前半 (予定)

1. 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/3)
2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/10)
★ 休講 (体育祭) (10/17)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/24)
★ 休講 (出張) (10/31)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/7)
5. 離散代数：対称群と置換群 (11/14)
6. 離散代数：有限群 (11/21)
7. 離散代数：有限群の応用 (11/28)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 離散確率論：確率の復習と確率不等式 (12/5)
★ 中間試験 (12/12)
9. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (12/19)
10. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/9)
11. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/16)
12. 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/23)
13. 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (1/30)
★ 予備日 (2/6)
★ 期末試験 (2/13?)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

今日の目標

1. 漸化式を解けるようになる
   - 線形漸化式の解法
   - 上界の導出法
2. 数列の母関数が導出できる

目次

道 — まとめ (第 2 回講義より)

$a_n =$ グラフ P_n における独立集合の総数　とする

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

線形漸化式の解き方 (1)

1. a_n を λ^n で置き換えた式を考える

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$
$$\downarrow$$
$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$$

すなわち，

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

これを考えている漸化式の**特性方程式**と呼ぶ

線形漸化式の解き方 (1)

2. 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

すなわち，

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda - 1 &= 0 \\ \therefore\ \lambda &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

この 2 つの解を λ_1, λ_2 と書くとする

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

線形漸化式の解き方 (1)

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- つまり，$a_1 = 2$ と $a_2 = 3$ であることを忘れれば，$a_n = \lambda_1^n$ と $a_n = \lambda_2^n$ はこの漸化式の解である
- このとき，線形結合 $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ もこの漸化式の解である

$$\begin{aligned} \text{なぜならば，} \quad a_n &= c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \\ a_{n-1} + a_{n-2} &= (c_1\lambda_1^{n-1} + c_2\lambda_2^{n-1}) + (c_1\lambda_1^{n-2} + c_2\lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1(\lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2}) + c_2(\lambda_2^{n-1} + \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \end{aligned}$$

- $a_1 = 2$ と $a_2 = 3$ を思い出すと，c_1, c_2 が定まる

線形漸化式の解き方 (1)

3 λ_1^n と λ_2^n の線形結合を作る

- $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ とする
- $a_1 = 2,\ a_2 = 3$ なので，

$$\begin{aligned} 2 &= c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2, \\ 3 &= c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2 \end{aligned}$$

- c_1, c_2 を変数として，これを解くと

$$c_1 = \frac{2\lambda_2 - 3}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}, c_2 = \frac{-2\lambda_1 + 3}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

線形漸化式の解き方 (1)

4 整理する

- $c_1 = \dfrac{2\lambda_2 - 3}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} = \dfrac{2\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 3}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2})} = \dfrac{5 - 3\sqrt{5}}{10}$
- $c_2 = \dfrac{-2\lambda_1 + 3}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \dfrac{-2\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 3}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2})} = \dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{10}$

したがって，任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$a_n = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

となる

道 — まとめ (第 2 回講義より)

$a_n =$ グラフ P_n における独立集合の総数　とする

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを別の方法を用いて解いてみる

線形漸化式の解き方 (2)

1 行列を用いて書き換える

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \quad (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

線形漸化式の解き方 (2)：一般論

次のように線形漸化式を書けたとする

$$x_1 = c, \quad x_n = Ax_{n-1} \quad (n \geq 2 \text{ のとき})$$

A は正方行列，$x_1, x_2, x_3, \ldots$ と c はベクトル

- このとき，
$$x_n = A^{n-1}x_1 = A^{n-1}c$$
- したがって，A^{n-1} が計算できればよい

線形漸化式の解き方 (2)

2 行列の累乗を計算する

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする

- A の固有値と固有ベクトルを計算する
- A の特性方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\lambda - 1 = 0$$

- これを解くと，$\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- これが A の固有値で，λ_1, λ_2 と書くことにする

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

線形漸化式の解き方 (2)

λ_1 に対する A の固有ベクトルを $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x + y \\ x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_1 y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって，$v_1 = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$ は λ_1 に対する A の固有ベクトル

線形漸化式の解き方 (2)

λ_2 に対する A の固有ベクトルを $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned} Av_2 &= \lambda_2 v_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_2 x \\ \lambda_2 y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって，$v_2 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$ は λ_2 に対する A の固有ベクトル

線形漸化式の解き方 (2)

これによって対角化：$U = (v_1\ v_2), \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$AU = U\Lambda, \quad \text{すなわち，} \quad A = U\Lambda U^{-1}$$

- $A^n = (U\Lambda U^{-1})^n = U\Lambda^n U^{-1} = U \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} U^{-1}$
- $U = (v_1\ v_2) = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ なので，$U^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5+\sqrt{5}}{20} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5-\sqrt{5}}{20} \end{pmatrix}$

線形漸化式の解き方 (2)

したがって

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5+\sqrt{5}}{20} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{5-\sqrt{5}}{20} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(5-\sqrt{5})\lambda_1^n+(5+\sqrt{5})\lambda_2^n}{10} & \frac{-\sqrt{5}\lambda_1^n+\sqrt{5}\lambda_2^n}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}\lambda_1^n+\sqrt{5}\lambda_2^n}{5} & \frac{(5+\sqrt{5})\lambda_1^n+(5-\sqrt{5})\lambda_2^n}{10} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

線形漸化式の解き方 (2)

3. まとめる

$n \geq 3$ のとき，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-2}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(5-\sqrt{5})\lambda_1^{n-2}+(5+\sqrt{5})\lambda_2^{n-2}}{10} & \frac{-\sqrt{5}\lambda_1^{n-2}+\sqrt{5}\lambda_2^{n-2}}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}\lambda_1^{n-2}+\sqrt{5}\lambda_2^{n-2}}{5} & \frac{(5+\sqrt{5})\lambda_1^{n-2}+(5-\sqrt{5})\lambda_2^{n-2}}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{15-7\sqrt{5}}{10}\lambda_1^{n-2} + \frac{15+7\sqrt{5}}{10}\lambda_2^{n-2} \\ \frac{5-2\sqrt{5}}{5}\lambda_1^{n-2} + \frac{5+2\sqrt{5}}{5}\lambda_2^{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\lambda_1^{n} + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\lambda_2^{n} \\ \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\lambda_1^{n-1} + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

線形漸化式の解き方 (2)

したがって，$n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\lambda_1^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\lambda_2^n \\ &= \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

となる ($n = 1, 2$ のときも，この式は正しい) □

例：$P_n \times P_2$ から得られたグラフ — まとめ (第 2 回講義より)

次のように定義

- b_n = グラフ G_n における独立集合の総数
- c_n = グラフ H_n における独立集合の総数

漸化式

$$\begin{aligned} b_n &= \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ c_n + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases} \\ c_n &= \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

これを解いてみる

線形漸化式の解き方 (2)

1. 行列を用いて書き換える

$$\begin{aligned} b_n &= \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ c_n + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases} \\ c_n &= \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

後は同様に，計算する

線形漸化式の解き方 (2)

計算すると，次が得られる (はずである)：自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1-\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})^n + \frac{1+\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})^n \\ c_n &= \frac{2-\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n + \frac{2+\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n \end{aligned}$$

目次

単純な再帰アルゴリズム

アルゴリズム A

```
def fnct(n)
  print "a"
  if n > 2
    fnct(n-1)
    fnct(n-2)
  end
end
```

出力される a の数に対する漸化式

$$f_n = \begin{cases} 1 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ 1 + f_{n-1} + f_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここでは，簡単な上界を求めてみる
(計算量の解析において，欲しいものは上界 (で十分なこと) が多い)

線形漸化式から上界を導く

1. 定数項を取り除く

- 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$

- ここで，$f'_n = f_n + 1$ と置くと

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- 帰結：f_n と f'_n のオーダーは同じ
- 注意：ここから f'_n を厳密に求めて，f_n を求めてもよい
  が，ここではそうしない

線形漸化式から上界を導く

2. 特性方程式を解く

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- 特性方程式：$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$
- この方程式はただ 1 つ正の解を持ち，それは

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

  である

ただ 1 つ正の解を持つことは，
例えば「デカルトの符号規則」から分かる

線形漸化式から上界を導く

3. 数学的帰納法で不等式を証明

ここで，次を証明する

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，$f'_n \leq 2\lambda^n$

証明：$n = 1$ のとき
- $f'_1 = 2$
- $2\lambda^1 = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$
- したがって，$f'_1 < 2\lambda^1$ となる

$n = 2$ のとき
- $f'_2 = 2$
- $2\lambda^2 > 2\lambda = 1 + \sqrt{5}$
- したがって，$f'_2 < 2\lambda^2$ となる

線形漸化式から上界を導く

証明の続き：自然数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\ &\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) && (\text{整理}) \\ &= 2\lambda^{k-1}\lambda^2 && (\lambda \text{ が特性方程式の解であるから}) \\ &= 2\lambda^{k+1} && (\text{整理}) \end{aligned}$$

帰結

$$f_n = O\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

オーダー記法：復習

O 記法の定義

非負の値を取る数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ と $\{b_n\}_{n\geq 1}$ に対して，

$$a_n = O(b_n)$$

であるとは，
ある自然数 n_0 と正の実数 C が存在して，
任意の自然数 $n \geq n_0$ に対して

$$a_n \leq Cb_n$$

が成り立つこと

$a_n = O(b_n)$ であることの直感的な意味

数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の増加率は数列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ の増加率以下である

ユークリッドのアルゴリズムの計算量

漸化式

$$g_n \begin{cases} = 1 & n = 0 \text{ のとき} \\ \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor} & n \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

まずは g_n がどのように増加するか知る必要があるので，それを探る
- 「$\leq$」を「$=$」に置き換える
- $n = 2^k$ の場合だけを考える ($n = 2^k$ のとき，$\lfloor n/2 \rfloor = 2^{k-1}$)

注：$g_1 \leq 2 + g_{\lfloor 1/2 \rfloor} = 2 + g_0 = 2 + 1 = 3$

ユークリッドのアルゴリズムの計算量：探る

$g'_k = g_{2^k}$ と置き，「$\leq$」を「$=$」に置き換えると，次の漸化式が得られる

$$g'_k = \begin{cases} 3 & k = 0 \text{ のとき} \\ 2 + g'_{k-1} & k \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

- これは等差数列
- 任意の自然数 $k \geq 0$ に対して，$g'_k = 2k + 3$

つまり，g_n はだいたい $2\log_2 n$

証明すること

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，$g_n \leq 3 + 2\log_2 n$

帰結

$g_n = O(\log n)$

証明：$n = 1$ のとき

- 漸化式より，$g_1 \leq 2 + g_{\lfloor 1/2 \rfloor} = 2 + g_0 = 2 + 1 = 3$
- $3 + 2\log_2 n = 3 + 2\log_2 1 = 3 + 0 = 3$
- したがって，左辺 $\leq$ 右辺

証明すること

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，$g_n \leq 3 + 2\log_2 n$

証明の続き：任意の自然数 $k \geq 1$ を考え，
任意の自然数 $\ell \leq k$ に対して $g_\ell \leq 3 + 2\log_2 \ell$ が成り立つと仮定

証明すべきこと

$g_{k+1} \leq 3 + 2\log_2(k+1)$

$$\begin{aligned} g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\ &\leq 2 + 3 + 2\log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \\ &\leq 2 + 3 + 2\log_2((k+1)/2) && (\lfloor \cdot \rfloor \text{ を外す}) \\ &= 5 + 2(\log_2(k+1) - \log_2 2) && (\text{整理}) \\ &= 3 + 2\log_2(k+1) && (\text{整理}) \end{aligned}$$

□

目次

数列の母関数

母関数とは？

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ の母関数とは冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

のこと (x は複素数)

ディジタル信号処理で「z 変換」と呼んでいるものと同じ

仮定

この冪級数は収束する

- 特に，ある定数 $r > 0$ が存在して $|x| < r$ のとき収束するとする
- つまり，$|x| < r$ のとき，$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は well-defined

収束するので，『微分積分学』，『解析学』，『複素関数論』の知識が使える

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 1$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 2^n$ とすると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$

一般に，$a_n = \alpha^n$ で定められる数列の母関数は $\dfrac{1}{1-\alpha x}$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = n$ とすると，

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n \\ &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

例 3

数列 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 3n + 1$ とすると，

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (3n+1) x^n = 3\sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1-x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2x+1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

目次

1. 線形漸化式の厳密解法
2. 漸化式より上界を導出する方法
3. 母関数
4. 今日のまとめ

今日の目標

今日の目標

1. 漸化式を解けるようになる
   - 線形漸化式の解法
   - 上界の導出法
2. 数列の母関数が導出できる

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員と TA は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK