離散数理工学　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**2018 年 2 月 13 日**

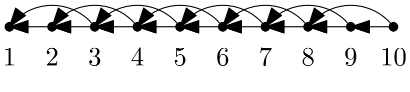
期末試験　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　岡本 吉央

9:00–10:30．A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可．使用可能な解答用紙は 1 枚のみ．
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．
採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと (その文字列は控えておくように)．
採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

問題 1　公平な硬貨を投げると，表が確率 1/2 で現れ，裏が確率 1/2 で現れる．公平な硬貨を独立に 100 回投げ，表が現れた回数が 90 回以上となる確率を見積もりたい．以下の問いに答えよ．

1. i 回目の硬貨投げで表が出たとき，$X_i = 1$，そうでないとき，$X_i = 0$ となる確率変数 X_i を考える．このとき，$\mathrm{E}[2^{X_i}]$ が何であるか，答えよ．
2. $\mathrm{E}[2^{X_1+\cdots+X_{100}}]$ が何であるか，答えよ．
3. マルコフの不等式を用いて，
$$\Pr(X_1 + \cdots + X_{100} \geq 90) \leq 10^{-8}$$
が成り立つことを証明せよ．

問題 2　次のような前進問題の変種を考える．考える有向グラフの頂点集合は $\{1, 2, \ldots, n\}$ であり，頂点 2 から出る辺は頂点 1 へ向かうものしか存在せず，頂点 1, 2 以外の頂点 i から出る辺は頂点 $i-1$ と頂点 $i-2$ へ向かうものしか存在しない．このグラフにおいて，頂点 n から始めて，辺をたどることで頂点 1 に到達したい．下図は $n = 10$ の場合のグラフを表している．



乱択アルゴリズムとして「たどる辺を一様分布に従って選び，移動する」ということを繰り返すアルゴリズムを考え，このアルゴリズムがたどる辺の数を確率変数 R_n で表す．以下の問いに答えよ．

1. $\mathrm{E}[R_1] = 0, \mathrm{E}[R_2] = 1$ であることを証明せよ．
2. 任意の $k \in \{3, \ldots, n\}$ に対して，次の式が成り立つことを証明せよ．
$$\mathrm{E}[R_k] = 1 + \frac{1}{2}(\mathrm{E}[R_{k-1}] + \mathrm{E}[R_{k-2}]).$$
3. 1 以上の任意の自然数 n に対して，
$$\mathrm{E}[R_n] \leq \frac{2}{3}n$$
が成り立つことを証明せよ．(注意：上の小問 1, 2 が解けていなくても，この小問に解答してよい．ヒント：数列 $\{\mathrm{E}[R_n]\}_{n\geq 1}$ の一般項を求めてもよいし，求めなくてもよい．)

問題 3　商品を買うと n 種類の景品の中の 1 つが当たる．その確率は商品の間で同一かつ独立であり，$\frac{1}{n}$ である．全種類の景品を集め切るまで商品を購入し続けるとする．

このとき，任意の定数 $c > 0$ に対して，商品購入回数が $n \ln n + cn$ を上回る確率が e^{-c} 以下になることを証明せよ．

問題 4　次の推移行列を持つマルコフ連鎖 $(X_t \mid t \in \mathbb{N})$ を考える．

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

以下の問いに答えよ．

1. このマルコフ連鎖の状態遷移図を描け．
2. このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか，すべて答えよ．
3. このマルコフ連鎖において，極限 $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P}^t$ が存在するかどうか答えよ．存在する場合，その極限が何であるか，答えよ．

以上