

提出締切：2017年10月10日 講義終了時

復習問題 1.1 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して、

$$n! \leq e n \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

が成り立つことを証明せよ。

復習問題 1.2 任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して、 $a \geq b$ であるとき、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b}$$

が成り立つことを証明せよ。

復習問題 1.3 任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して、

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

が成り立つことを証明せよ。また、この等式の組合せ的解釈を与えよ。

復習問題 1.4 任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して、 $a-1 \geq b$ ならば

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

が成り立つことを証明せよ。また、この等式の組合せ的解釈を与えよ。

復習問題 1.5 任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して、

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b} \binom{a-1}{b-1}$$

が成り立つことを証明せよ。また、この等式の組合せ的解釈を与えよ。

復習問題 1.6 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して、

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

が成り立つことを証明せよ。二項定理を用いてもよい。また、この等式の組合せ的解釈を与えよ。

復習問題 1.7 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して、

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

が成り立つことを証明せよ。二項定理を用いてもよい。

復習問題 1.8 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して、

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

が成り立つことを証明せよ。二項定理を用いてもよい。また、この等式の組合せ的解釈を与えよ。

補足問題 1.9 任意の実数 x に対して、 $1+x \leq e^x$ が成り立つことを証明せよ。

補足問題 1.10 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して、

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!$$

が成り立つことを証明せよ。

補足問題 1.11 自然数 a と b が $a \geq 1$, $b \geq 1$, $a \geq b$ を満たすとする。

1. 不等式 $\binom{a}{b} \leq \frac{a^b}{b!}$ が成り立つことを証明せよ。
2. 不等式 $\frac{a^b}{b!} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$ が成り立つことを証明せよ。
3. 上の2つの小問より、 $\binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$ が成り立つことを証明せよ。

補足問題 1.12 自然数 a, b, k が $a \geq b \geq k \geq 0$ を満たすとき、 $(a-k)b \geq a(b-k)$ が成り立つことを証明せよ。

補足問題 1.13 [二項定理] 任意の複素数 x, y と任意の自然数 $n \geq 0$ に対して、

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

が成り立つことを証明せよ。

追加問題 1.14 次を証明せよ。

1. 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して、 $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e$ 。
2. 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して、 $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \geq e$ 。(ヒント： $1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}$ と変形してみよ。)
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ 。(ヒント：上の2つの小問を用いよ。)

追加問題 1.15 任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して、

$$\sum_{k=b}^a \binom{k}{b} = \binom{a+1}{b+1}$$

が成り立つことを証明せよ。(ヒント： b を固定して、 a に関する帰納法を用いよ。) また、この等式の組合せ的解釈を与えよ。

追加問題 1.16 問題 1.7 にある等式の組合せ的解釈を与えよ.

追加問題 1.17

1. 任意の自然数 $a \geq b \geq c \geq 0$ に対して,

$$\binom{a}{b} \binom{b}{c} = \binom{a}{c} \binom{a-c}{b-c}$$

が成り立つことを証明せよ. また, この等式の組合せ的解釈を与えよ.

2. 任意の自然数 $a \geq c \geq 0$ に対して,

$$\sum_{b=c}^a \binom{a}{b} \binom{b}{c} = \binom{a}{c} 2^{a-c}$$

が成り立つことを証明せよ. (今まで出てきた等式を用いてもよい.) また, この等式の組合せ的解釈を与えよ.

追加問題 1.18 任意の自然数 $a, b, c \geq 0$ に対して, $a \geq c$, $b \geq c$ であるとき,

$$\sum_{k=0}^c \binom{a}{k} \binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c}$$

が成り立つことを証明せよ. (今まで出てきた等式を用いてもよい.) また, この等式の組合せ的解釈を与えよ.