離散数学 第 11 回
証明法 (4)：数学的帰納法

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 7 月 13 日

最終更新：2017 年 7 月 12 日　11:05

スケジュール 前半

1. 集合と論理 (1)：命題論理 (4 月 13 日)
2. 集合と論理 (2)：集合と論理の対応 (4 月 20 日)
3. 集合と論理 (3)：述語論理 (4 月 27 日)

* 休講 (みどりの日) (5 月 4 日)

4. 証明法 (1)：∃ と ∀ を含む命題の証明 (5 月 11 日)
5. 証明法 (2)：含意を含む命題の証明 (5 月 18 日)
6. 証明法 (3)：集合に関する証明 (5 月 25 日)
7. 集合と論理 (4)：直積と冪集合 (6 月 1 日)

スケジュール 後半 (予定)

8. 写像 (1)：像と逆像 (6 月 8 日)
- 中間試験 (6 月 15 日)
9. 写像 (2)：全射と単射 (6 月 22 日)
10. 関係 (1)：関係 (6 月 29 日)
* 休講 (出張) (7 月 6 日)
11. 証明法 (4)：数学的帰納法 (7 月 13 日)
12. 集合と論理 (5)：集合の再帰的定義 (7 月 20 日)
* 休講 (出張) (7 月 27 日)
- 期末試験 (???)

注意：予定の変更もありうる

今日の概要

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 数学的帰納法で証明ができるようになる
- 再帰的定義によって無限を扱う方法を理解する

目次

例題 1

例題 1：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ．

確認

- $n = 1$ のとき：$8^n - 3^n = 8 - 3 = 5$
- $n = 2$ のとき：$8^n - 3^n = 64 - 9 = 55 = 5 \times 11$
- $n = 3$ のとき：$8^n - 3^n = 512 - 27 = 485 = 5 \times 97$
- …

注：これはただの確認であり，証明ではない

例題 1：数学的帰納法による証明

例題 1：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ．

数学的帰納法による証明：方針

1. $n = 1$ のときに正しいことを証明する
2. 任意の正の整数 $k \geq 1$ に対して，
   $n = k$ のときに正しいならば，$n = k + 1$ のときに正しいことを証明する

例題 1：数学的帰納法による証明 (1)

例題 1：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ．

証明：まず $n = 1$ のときに正しいことを証明する．

- $n = 1$ のとき，$8^n - 3^n = 8 - 3 = 5$.
- 5 は 5 で割り切れるので，このとき正しい．

例題 1：数学的帰納法による証明 (2)

例題 1：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ．

証明 (続)：次に，任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える．

- $8^k - 3^k$ が 5 で割り切れると仮定する．
  (注：帰納法の仮定と呼ばれる)
- 証明すべきことは，$8^{k+1} - 3^{k+1}$ が 5 で割り切れることである．

例題 1：数学的帰納法による証明 (2)

例題 1：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，

$$8^n - 3^n \text{ が 5 で割り切れる}$$

ことを証明せよ．

証明 (続)：次に，任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える．

- $8^k - 3^k$ が 5 で割り切れると仮定する．
  (注：帰納法の仮定と呼ばれる)
- 証明すべきことは，$8^{k+1} - 3^{k+1}$ が 5 で割り切れることである．
- 帰納法の仮定より，
  ある正の整数 m が存在して，$8^k - 3^k = 5m$ となる．

例題 1：数学的帰納法による証明 (2)

例題 1：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ．

証明 (続 2)：このとき，

$$8^{k+1} - 3^{k+1}$$

例題 1：数学的帰納法による証明 (2)

例題 1：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ.

<u>証明 (続 2)：</u>このとき,

$$8^{k+1} - 3^{k+1} = (5+3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k$$

例題 1：数学的帰納法による証明 (2)

例題 1：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ．

証明 (続 2)：このとき，

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 3^{k+1} &= (5+3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k \\ &= 5 \cdot 8^k + 3 \cdot (8^k - 3^k) \end{aligned}$$

例題 1：数学的帰納法による証明 (2)

例題 1：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ．

<u>証明 (続 2)：</u>このとき，

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 3^{k+1} &= (5+3)\cdot 8^k - 3\cdot 3^k \\ &= 5\cdot 8^k + 3\cdot(8^k - 3^k) \\ &= 5\cdot 8^k + 3\cdot 5m \qquad \text{(帰納法の仮定から)} \end{aligned}$$

例題 1：数学的帰納法による証明 (2)

例題 1：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ．

証明 (続 2)：このとき，

$$\begin{aligned}
8^{k+1} - 3^{k+1} &= (5+3)\cdot 8^k - 3\cdot 3^k \\
&= 5\cdot 8^k + 3\cdot(8^k - 3^k) \\
&= 5\cdot 8^k + 3\cdot 5m \qquad \text{(帰納法の仮定から)} \\
&= 5\cdot(8^k + 3m).
\end{aligned}$$

例題 1：数学的帰納法による証明 (2)

例題 1：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを証明せよ．

証明 (続 2)：このとき，

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 3^{k+1} &= (5+3)\cdot 8^k - 3\cdot 3^k \\ &= 5\cdot 8^k + 3\cdot(8^k - 3^k) \\ &= 5\cdot 8^k + 3\cdot 5m \qquad \text{(帰納法の仮定から)} \\ &= 5\cdot(8^k + 3m). \end{aligned}$$

$8^k + 3m$ は正の整数なので，$8^{k+1} - 3^{k+1}$ は 5 で割り切れる． $\square$

数学的帰納法とは？

数学的帰納法による証明法

「任意の正の整数 n に対して，$P(n)$」という形の命題の証明

1. $P(1)$ を証明　(基底段階)
2. 「任意の正の整数 k に対して『$P(k)$ ならば $P(k+1)$』」を証明　(帰納段階)

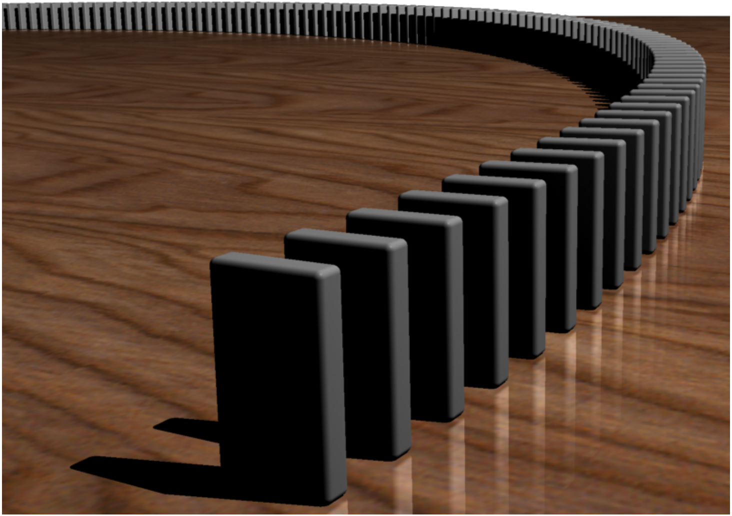
帰納段階での証明の書き方

1. 「任意の正の整数 k を考える」と書く
2. 「$P(k)$ であると仮定する」と書く
3. $P(k)$ を用いて，$P(k+1)$ が正しいことを導く (証明する)

例題 1 では，

$$P(n) = \text{「}8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる」}$$

数学的帰納法のイメージ



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Dominoeffect.png

数学的帰納法：論理に関する補足 (1)

数学的帰納法はなぜ正しいのか？

数学的帰納法による証明法

「任意の正の整数 n に対して，$P(n)$」という形の命題の証明

1. $P(1)$ を証明 (基底段階)
2. 「任意の正の整数 k に対して『$P(k)$ ならば $P(k+1)$』」を証明 (帰納段階)

つまり，正の整数を全部集めた集合を $\mathbb{Z}_+$ として，
証明したいことは

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}_+ \ (P(n))$$

数学的帰納法：論理に関する補足 (2)

数学的帰納法はなぜ正しいのか？

数学的帰納法による証明法

「任意の正の整数 n に対して，$P(n)$」という形の命題の証明

1. $P(1)$ を証明　　(基底段階)
2. 「任意の正の整数 k に対して『$P(k)$ ならば $P(k+1)$』」を証明　　(帰納段階)

数学的帰納法による証明が主張していることは

$$\underbrace{P(1)}_{\boxed{1}} \wedge \underbrace{(\forall\ k \in \mathbb{Z}_+\ (P(k) \to P(k+1)))}_{\boxed{2}} \quad \Rightarrow \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}_+\ (P(n))$$

数学的帰納法：論理に関する補足 (3)

数学的帰納法はなぜ正しいのか？

分かりにくいので，$\mathbb{Z}_+$ を $\{1,2,3\}$ に置きかえた場合を考える

$$P(1) \land (\forall\ k \in \{1,2,3\}\ (P(k) \to P(k+1))) \Rightarrow \forall\ n \in \{1,2,3\}\ (P(n))$$

書き換えると，

$$\begin{aligned} & P(1) \land (P(1) \to P(2)) \land (P(2) \to P(3)) \land (P(3) \to P(4)) \\ \Rightarrow\ & P(1) \land P(2) \land P(3) \end{aligned}$$

これを推論で証明してみる

数学的帰納法：論理に関する補足 (4)

証明すること

任意の命題 $P(1), P(2), P(3), P(4)$ に対して

$$\begin{aligned}(P(1) \wedge (P(1) \to P(2)) \wedge (P(2) \to P(3)) \wedge (P(3) \to P(4)))\\ \Rightarrow \quad (P(1) \wedge P(2) \wedge P(3))\end{aligned}$$

<u>証明</u>：$P(1)$, $P(1) \to P(2)$, $P(2) \to P(3)$, $P(3) \to P(4)$ を仮定する

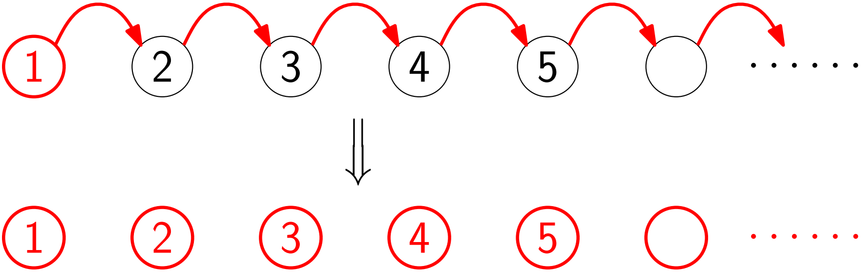
- $P(1)$ と $P(1) \to P(2)$ より，$P(2)$ は成り立つ．
- $P(2)$ が成り立つので，それと $P(2) \to P(3)$ より，$P(3)$ が成り立つ．
- したがって，$P(1), P(2), P(3)$ はすべて成り立つ． □

モードゥス・ポネンス (モーダス・ポネンス) (推論の類型：第 6 回講義)

任意の命題変数 P, Q に対して

$$P \wedge (P \to Q) \quad \Rightarrow \quad Q$$

数学的帰納法：論理に関する補足 — イメージ



例題 2

例題 2：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ．

確認

- $n = 1$ のとき：$2n = 2 \leq 2 = 2^n$
- $n = 2$ のとき：$2n = 4 \leq 4 = 2^n$
- $n = 3$ のとき：$2n = 6 \leq 8 = 2^n$
- $n = 4$ のとき：$2n = 8 \leq 16 = 2^n$
- $\ldots$

注：これはただの確認であり，証明ではない

例題 2：数学的帰納法 (基底段階)

例題 2：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ．

証明 (基底段階)：まず，$n = 1$ のときに正しいことを証明する．

例題 2：数学的帰納法 (基底段階)

例題 2：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ．

証明 (基底段階)：まず，$n = 1$ のときに正しいことを証明する．

- 左辺 $= 2n = 2$.

例題 2：数学的帰納法 (基底段階)

例題 2：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ．

証明 (基底段階)：まず，$n = 1$ のときに正しいことを証明する．

- 左辺 $= 2n = 2$.
- 右辺 $= 2^n = 2$.

例題 2：数学的帰納法 (基底段階)

例題 2：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ．

証明 (基底段階)：まず，$n = 1$ のときに正しいことを証明する．

- 左辺 $= 2n = 2$.
- 右辺 $= 2^n = 2$.
- したがって，$2n \leq 2^n$ であり，正しい．

例題 2：数学的帰納法 (帰納段階)

例題 2：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ．

証明 (帰納段階)：次に，任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える．

- $2k \leq 2^k$ であると仮定する．
- 証明すべきことは，$2(k+1) \leq 2^{k+1}$ である．

(コツ：↑これをしっかりと書くとよい)

例題 2：数学的帰納法 (帰納段階)

例題 2：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ．

証明 (帰納段階)：次に，任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える．

- $2k \leq 2^k$ であると仮定する．
- 証明すべきことは，$2(k+1) \leq 2^{k+1}$ である．
  (コツ：↑これをしっかりと書くとよい)
- $2(k+1) = 2k + 2$

例題２：数学的帰納法 (帰納段階)

例題２：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ．

証明 (帰納段階)：次に，任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える．

- $2k \leq 2^k$ であると仮定する．
- 証明すべきことは，$2(k+1) \leq 2^{k+1}$ である．
  (コツ：↑これをしっかりと書くとよい)
- $$\begin{aligned} 2(k+1) &= 2k + 2 \\ &\leq 2^k + 2 \qquad \text{(帰納法の仮定から)} \end{aligned}$$

例題 2：数学的帰納法 (帰納段階)

例題 2：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ．

証明 (帰納段階)：次に，任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える．

- $2k \leq 2^k$ であると仮定する．
- 証明すべきことは，$2(k+1) \leq 2^{k+1}$ である．
  (コツ：↑これをしっかりと書くとよい)
- $$\begin{aligned} 2(k+1) &= 2k+2 \\ &\leq 2^k + 2 && \text{(帰納法の仮定から)} \\ &\leq 2^k + 2^k && (k \geq 1 \text{ であるから}) \end{aligned}$$

例題 2：数学的帰納法 (帰納段階)

例題 2：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ．

証明 (帰納段階)：次に，任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える．

- $2k \leq 2^k$ であると仮定する．
- 証明すべきことは，$2(k+1) \leq 2^{k+1}$ である．
  (コツ：↑これをしっかりと書くとよい)
- $$\begin{aligned} 2(k+1) &= 2k + 2 \\ &\leq 2^k + 2 && \text{(帰納法の仮定から)} \\ &\leq 2^k + 2^k && (k \geq 1 \text{ であるから}) \\ &= 2 \cdot 2^k \end{aligned}$$

例題 2：数学的帰納法 (帰納段階)

例題 2：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ．

証明 (帰納段階)：次に，任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える．

- $2k \leq 2^k$ であると仮定する．
- 証明すべきことは，$2(k+1) \leq 2^{k+1}$ である．
  (コツ：↑これをしっかりと書くとよい)
- $$\begin{aligned} 2(k+1) &= 2k+2 \\ &\leq 2^k + 2 && \text{(帰納法の仮定から)} \\ &\leq 2^k + 2^k && (k \geq 1 \text{ であるから}) \\ &= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} \end{aligned}$$

□

目次

クイズ

次に来るのは何？

$$1, \quad 3, \quad 7, \quad 13, \quad 21,$$

クイズ

次に来るのは何？

$$1, \quad 3, \quad 7, \quad 13, \quad 21, \quad 31$$

$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \ldots$

クイズ

次に来るのは何？

$$1,\quad 3,\quad 7,\quad 13,\quad 21,\quad 31$$

$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \ldots$

次に来るのは何？

$$1,\quad 3,\quad 7,\quad 13,\quad 21,$$

クイズ

次に来るのは何？

$$1, \quad 3, \quad 7, \quad 13, \quad 21, \quad 31$$

$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \ldots$

次に来るのは何？

$$1, \quad 3, \quad 7, \quad 13, \quad 21, \quad 151$$

$n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 49n^2 + 25n + 1, n = 0, 1, 2, \ldots$

クイズ

次に来るのは何？

$$1, \quad 3, \quad 7, \quad 13, \quad 21, \quad 31$$

$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \ldots$

次に来るのは何？

$$1, \quad 3, \quad 7, \quad 13, \quad 21, \quad 151$$

$n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 49n^2 + 25n + 1, n = 0, 1, 2, \ldots$

- 「...」はあいまい

クイズ

次に来るのは何？

$$1, \quad 3, \quad 7, \quad 13, \quad 21, \quad 31$$

$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \ldots$

次に来るのは何？

$$1, \quad 3, \quad 7, \quad 13, \quad 21, \quad 151$$

$n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 49n^2 + 25n + 1, n = 0, 1, 2, \ldots$

- 「...」はあいまい

格言

情報科学の本質の１つは「『無意識』を意識すること」

階乗

階乗とは？ (常識に基づく定義)

正の整数 n に対して，n の階乗とは

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$$

のこと

この定義の問題点

- 「$\cdots$」はあいまい

あいまいさのないように定義するには？

階乗：再帰的定義

階乗とは？ (再帰的定義)

正の整数 n に対して，n の**階乗**とは

$$n! = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ n \cdot (n-1)! & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

のこと

実際の計算

- $n = 1$ のとき：$1! = 1$
- $n = 2$ のとき：$2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$
- $n = 3$ のとき：$3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$
- $n = 4$ のとき：$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$
- $\ldots$

例題 3：再帰的定義

例題 3：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，任意の正の整数 n に対して，

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

確認

- $n = 1$ のとき：$a_1 = 1$
- $n = 2$ のとき：$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$
- $n = 3$ のとき：$a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5$
- …

例題 3：再帰的定義

例題 3：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，任意の正の整数 n に対して，

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

確認

- $n = 1$ のとき：$a_1 = 1 = 2 \cdot 1 - 1$
- $n = 2$ のとき：$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3 = 2 \cdot 2 - 1$
- $n = 3$ のとき：$a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5 = 2 \cdot 3 - 1$
- ...

例題 3：数学的帰納法による証明 (基底段階)

例題 3：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，任意の正の整数 n に対して，

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (基底段階)：まず，$n = 1$ のときを証明する．

- 左辺 $= a_1 = 1$.
- 右辺 $= 2 \cdot 1 - 1 = 1$.
- したがって，$n = 1$ のとき $a_n = 2n - 1$ となる．

例題 3：数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 3：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，任意の正の整数 n に対して，

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階)：次に任意の正の整数 k を考える．

- $a_k = 2k - 1$ であると仮定する．
- 証明すべきことは，$a_{k+1} = 2(k+1) - 1$．

例題 3：数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 3：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，任意の正の整数 n に対して，

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階)：次に任意の正の整数 k を考える．

- $a_k = 2k - 1$ であると仮定する．
- 証明すべきことは，$a_{k+1} = 2(k + 1) - 1$.
- $a_{k+1} = a_k + 2 \qquad (k + 1 > 1 \text{ より})$

例題 3：数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 3：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，任意の正の整数 n に対して，

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階)：次に任意の正の整数 k を考える．

- $a_k = 2k - 1$ であると仮定する．
- 証明すべきことは，$a_{k+1} = 2(k+1) - 1$.
- $$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + 2 & (k+1 > 1 \text{ より}) \\ &= (2k-1) + 2 & (\text{帰納法の仮定から}) \end{aligned}$$

例題 3：数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 3：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して，a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，任意の正の整数 n に対して，

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階)：次に任意の正の整数 k を考える．

- $a_k = 2k - 1$ であると仮定する．
- 証明すべきことは，$a_{k+1} = 2(k+1) - 1$.
- $$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + 2 && (k + 1 > 1 \text{ より}) \\ &= (2k - 1) + 2 && (\text{帰納法の仮定から}) \\ &= 2(k+1) - 1. \end{aligned}$$

□

再帰的定義の例：フィボナッチ数

フィボナッチ数とは？

任意の正の整数 n に対して，第 n 番フィボナッチ数 F_n を

$$F_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ F_{n-1} + F_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する

確認

- $n = 1$ のとき：$F_1 = 1$
- $n = 2$ のとき：$F_2 = 1$
- $n = 3$ のとき：$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$
- $n = 4$ のとき：$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$
- $n = 5$ のとき：$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$
- ...

フィボナッチ数の公式

例題 4：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明の注意点

- F_n は F_{n-1}, F_{n-2} を使って定義される
- よって，(1 つ前だけ仮定する) 普通の帰納法では証明できない
- よって，もっと強い証明の仕方が必要となる
- 基底段階も $n = 1$ のときと $n = 2$ のときの 2 つが必要となる

数学的帰納法の強いバージョン

数学的帰納法の強いバージョン (累積帰納法とも呼ばれる)

[基底段階]

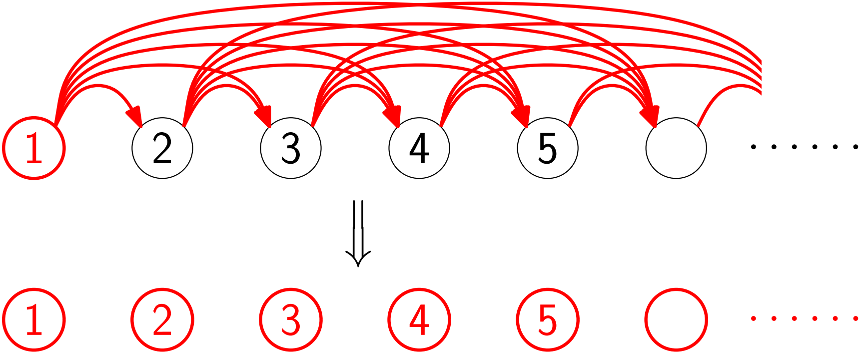
- $P(1)$ を証明する

[帰納段階] 任意の正の整数 k を考える

- 1 以上 k 以下の任意の正の整数 k' に対して $P(k')$ を仮定する
- $P(k+1)$ を証明する

- 前のバージョンでは帰納段階で「$P(k)$」のみを仮定した
- フィボナッチ数に関する証明では基底段階が $P(1)$ と $P(2)$ になる

数学的帰納法の強いバージョン：イメージ



フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (基底段階 1)

例題 4：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明：まず，$n = 1$ のときを証明する．

- 左辺 $= F_1 = 1$.
- 右辺 $= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$.
- したがって，$n = 1$ のときは正しい．

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (基底段階 2)

例題 4：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明：次に，$n = 2$ のときを証明する．

- 左辺 $= F_2 = 1$.
- 右辺 $= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)$
  $= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$.
- したがって，$n = 2$ のときは正しい．

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (帰納段階 1)

例題 4：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明：k を 2 以上の任意の整数とする.

- 1 以上 k 以下の任意の整数 k' に対して, $F_{k'} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k'} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k'}\right)$ と仮定する.
- 証明すべきことは, $F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)$ である.

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (帰納段階 2)

F_{k+1}

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (帰納段階 2)

$$
\begin{aligned}
& F_{k+1} \\
& \quad = F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2\text{)}
\end{aligned}
$$

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (帰納段階 2)

$$
\begin{aligned}
& F_{k+1} \\
&\quad = F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1>2\text{)} \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right) \\
&&& \text{(帰納法の仮定)}
\end{aligned}
$$

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (帰納段階 2)

$$
\begin{aligned}
&F_{k+1}\\
&= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1>2\text{)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right)\\
& && \text{(帰納法の仮定)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right)\\
& && \text{(式の整理)}
\end{aligned}
$$

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (帰納段階 2)

F_{k+1}

$$= F_k + F_{k-1} \qquad \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2\text{)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right)$$

(帰納法の仮定)

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right)$$

(式の整理)

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) \qquad \text{(式の整理)}$$

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (帰納段階 2)

$$
\begin{aligned}
&F_{k+1} \\
&= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1>2\text{)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right) && \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right) && \text{(式の整理)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) && \text{(式の整理)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right) && \text{(式の整理)}
\end{aligned}
$$

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法 (帰納段階 2)

$$
\begin{aligned}
&F_{k+1} \\
&= F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1>2\text{)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right) && \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right) && \text{(式の整理)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) && \text{(式の整理)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right) && \text{(式の整理)}
\end{aligned}
$$

したがって，$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)$ となる． □

どうしてこのような数学的帰納法になるのか？

疑問

どうして

- 累積帰納法を使うのか？
- $n = 1, 2$ の場合を基底段階にしないといけないのか？

証明を行う際の下書きを考えれば分かる

格言

数学的帰納法で証明するとき，下書きは帰納段階から始める

フィボナッチ数の公式：証明の下書き (1)

帰納段階で証明する目標

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)$$

$$\begin{aligned}
&F_{k+1} \\
&\quad = F_k + F_{k-1} && (\text{フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2) \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right) \\
& && (\text{帰納法の仮定}) \\
&\quad = \cdots
\end{aligned}$$

フィボナッチ数の公式：証明の下書き (1)

帰納段階で証明する目標

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)$$

F_{k+1}

$= F_k + F_{k-1}$ (フィボナッチ数の定義と $k+1 > 2$)

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right)$ (帰納法の仮定)

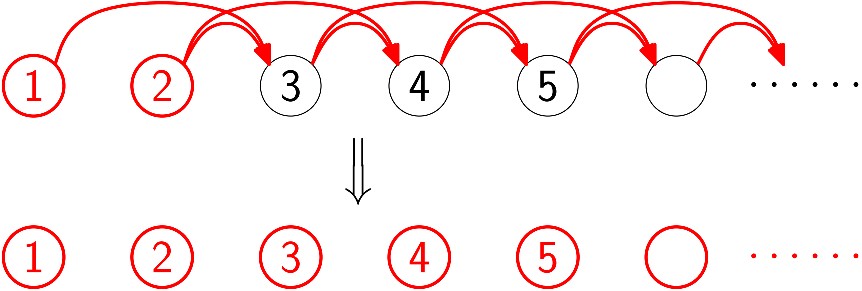
$= \cdots$

つまり，$n = k+1$ の場合の証明では，次の 2 つを仮定しないといけない

- $n = k$ の場合
- $n = k-1$ の場合

ここから，普通の数学的帰納法では足りないことが分かる

フィボナッチ数の公式：数学的帰納法のイメージ



フィボナッチ数の公式：証明の下書き (2)

$$
\begin{aligned}
&F_{k+1} \\
&\quad = F_k + F_{k-1} && \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1>2\text{)} \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right) \\
&&& \text{(帰納法の仮定)} \\
&\quad = \cdots
\end{aligned}
$$

フィボナッチ数の公式：証明の下書き (2)

$$
\begin{aligned}
&F_{k+1}\\
&= F_k + F_{k-1} \qquad \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1>2\text{)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right) \qquad \text{(帰納法の仮定)}\\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

仮に，$n = k+1 = 2$ の場合を考えると，次の 2 つを仮定することになる

- $n = k = 1$ の場合
- $n = k-1 = 0$ の場合

フィボナッチ数の公式：証明の下書き (2)

$$
\begin{aligned}
F_{k+1} \\
&= F_k + F_{k-1} \qquad \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1>2\text{)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right) \\
&\qquad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

仮に，$n = k + 1 = 2$ の場合を考えると，次の 2 つを仮定することになる

- $n = k = 1$ の場合
- $n = k - 1 = 0$ の場合

しかし，$n = 0$ の場合は考えないので，$n = k + 1 = 2$ にはできない

- つまり，帰納段階は $n = k + 1 \geq 3$ の場合であり，
- $n = k + 1 = 2$ のときは基底段階にしないといけない

フィボナッチ数の公式：証明の下書き (2)

$$
\begin{aligned}
&F_{k+1}\\
&= F_k + F_{k-1} \qquad \text{(フィボナッチ数の定義と } k+1>2\text{)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right)\\
&\qquad \text{(帰納法の仮定)}\\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

仮に，$n = k + 1 = 2$ の場合を考えると，次の 2 つを仮定することになる

- $n = k = 1$ の場合
- $n = k - 1 = 0$ の場合

しかし，$n = 0$ の場合は考えないので，$n = k + 1 = 2$ にはできない

- つまり，帰納段階は $n = k + 1 \geq 3$ の場合であり，
- $n = k + 1 = 2$ のときは基底段階にしないといけない

下書きから分かった行うべき数学的帰納法

- 基底段階：$n = 1, 2$ の場合
- 帰納段階：$k \geq 2$ として，累積帰納法

目次

今日のまとめ

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 数学的帰納法で証明ができるようになる
- 再帰的定義によって無限を扱う方法を理解する

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次