# 離散数学 第 7 回
# 集合と論理 (4)：直積と冪集合

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 6 月 1 日

最終更新：2017 年 5 月 31 日　11:03

## スケジュール 前半 (予定)

1. 集合と論理 (1)：命題論理 (4 月 13 日)
2. 集合と論理 (2)：集合と論理の対応 (4 月 20 日)
3. 集合と論理 (3)：述語論理 (4 月 27 日)

∗ 休講 (みどりの日) (5 月 4 日)

4. 証明法 (1)：$\exists$ と $\forall$ を含む命題の証明 (5 月 11 日)
5. 証明法 (2)：含意を含む命題の証明 (5 月 18 日)
6. 証明法 (3)：集合に関する証明 (5 月 25 日)
7. 集合と論理 (4)：直積と冪集合 (6 月 1 日)

注意：予定の変更もありうる

## スケジュール 後半 (予定)

9. 写像 (1)：像と逆像 (6 月 8 日)
- 中間試験 (6 月 15 日)
10. 写像 (2)：全射と単射 (6 月 22 日)
11. 関係 (1)：関係 (6 月 29 日)
- * 休講 (出張) (7 月 6 日)
12. 証明法 (4)：数学的帰納法 (7 月 13 日)
13. 集合と論理 (5)：集合の再帰的定義 (7 月 20 日)
- * 休講 (出張) (7 月 27 日)
- 期末試験 (8 月 3 日？)

注意：予定の変更もありうる

## 中間試験

- 日時：6 月 15 日 (木) 7 限
- 教室：A-201 (いつもの教室)
- 出題範囲：第 1 回講義の最初から第 6 回講義の最後まで
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 3 題は演習問題として提示されたものと同一
    - ただし，発展問題は出題しない
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 10 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

## 今日の概要

### 今日の目標

- 有限集合の要素数が計算できる
- 集合の直積と冪集合を理解し，正しく答えられる
- 集合の直積と冪集合に関する包含関係，等式を証明できる

# 目次

# 有限集合の要素数

## 要素数とは？

有限集合 $A$ の要素数とは，その集合の要素の数である

- 記法：$|A|$, $\#A$, $\#(A)$

例：

- $|\{a, c, t\}| = 3$
- $|\emptyset| = 0$

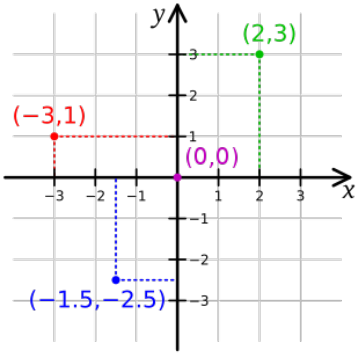
注意：

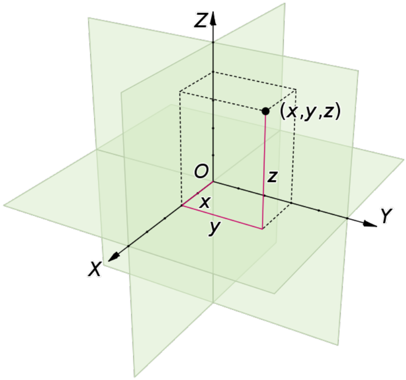
- 要素数は数なので，有限集合に対してのみ要素数が定義される
- 要素数のことを「大きさ」,「サイズ」と呼ぶことがある
- $|A|$ は,「$A$ の絶対値」ではない

# 目次

# 座標

- 2 次元平面の点の座標は 2 つの実数を「対」にして表現する
- このように，集合の要素を $\boxed{対}$ にすることは有用




http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

# 構造体

## プログラムにおける構造体

```
struct account {
  string name;
  int account_number;
  int balance;
};
```

数個のデータを $\boxed{\text{組}}$ にして，一つの構造を表現する

## 今から行うこと

数学において「対」や「組」を表現する方法を理解する

# 順序対 (2 個組)

### 順序対とは？ (常識に基づく定義)

順序対とは，ものを 2 つ並べたもののことである．

- $a$ と $a'$ をこの順で並べたものは「$(a, a')$」と表記する

「順序対」は単に「対」や「組」と呼ばれることもある

### 同じ順序対 (常識に基づく定義)

2 つの順序対 $(a, a')$ と $(b, b')$ が等しいことを $(a, a') = (b, b')$ と表記し，

$$a = b \text{ かつ } a' = b'$$

であることと定義する

注意：$(a, a')$ と $(a', a)$ は $a \neq a'$ ならば異なる

# 集合の直積 (1)

## 集合の直積

集合 $A$ と集合 $B$ の**直積**を $A \times B$ と表記して，

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in B\}$$

と定義する

「直積」は「デカルト積」とも呼ばれる

## 例

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ のとき，

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$

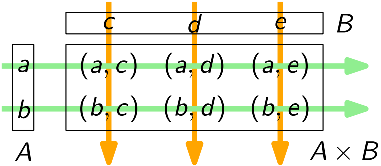
簡単な確認：有限集合 $A, B$ に対して，$|A \times B| = |A| \times |B|$

# 集合の直積：図示

## 例

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ のとき，

$$A \times B = \{(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e)\}$$




## 例 続き

$A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ のとき，

$$B \times A = \{(c,a),(c,b),(d,a),(d,b),(e,a),(e,b)\}$$

# $n$ 個組

$n$ は自然数

**$n$ 個組とは？ (常識に基づく定義)**

$n$ 個組とは，ものを $n$ 個並べたもののことである．

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ をこの順で並べたものは「$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$」と表記する

**同じ $n$ 個組 (常識に基づく定義)**

2 つの $n$ 個組 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が等しいことを $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ と表記し，

$$\text{すべての } i \text{ に対して } a_i = b_i$$

であることと定義する

# 集合の直積 (2)

## 集合の直積

集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の直積を $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ と表記して，

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{すべての } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{に対して } x_i \in A_i \end{array} \right\}$$

と定義する

「$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$」を「$\displaystyle\prod_{i=1}^{n} A_i$」と書くこともある

## 例

$A = \{a, b\}$，$B = \{c, d, e\}$，$C = \{f, g\}$ のとき，

$$\begin{aligned} A \times B \times C \quad = \quad & \{(a, c, f), (a, c, g), (a, d, f), (a, d, g), (a, e, f), (a, e, g), \\ & (b, c, f), (b, c, g), (b, d, f), (b, d, g), (b, e, f), (b, e, g)\} \end{aligned}$$

簡単な確認：有限集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対して，

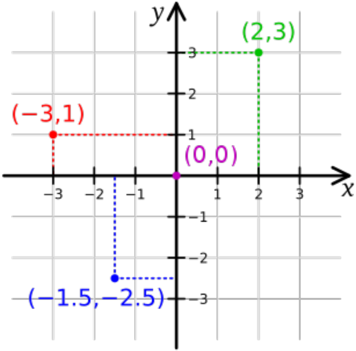
$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$$

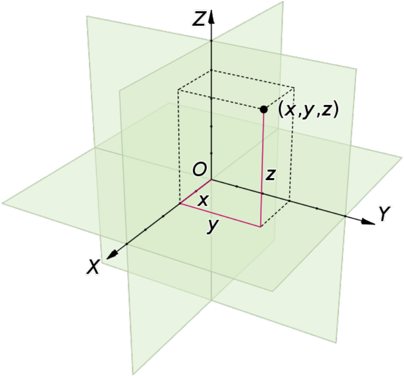
## 集合の直積 (関係する記法)

- $A \times A$ を $A^2$ と書く
- $A \times A \times A$ を $A^3$ と書く
- $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ 個}}$ を $A^n$ と書く

# 集合の直積：例 1 (デカルト座標系)

- $\mathbb{R}^2$ = 2 次元平面
- $\mathbb{R}^3$ = 3 次元空間
- …




http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

## 集合の直積：例 2 (IP アドレス)

(IPv4 における) IP アドレスは 1 バイトの数 4 つで表現される

- www.uec.ac.jp: 130.153.9.10
- www.kantei.go.jp: 202.32.211.139

つまり,

- 可能な IP アドレス全体の集合 $= \{0, \ldots, 255\}^4$
- 可能な IP アドレスの総数 $= |\{0, \ldots, 255\}^4| = 256^4 = 4294967296$ (約 43 億)

$\rightsquigarrow$ IP アドレス枯渇問題

# 集合の直積：例 3 (DNA (デオキシリボ核酸))

DNA は生物の遺伝情報を担う物質

- アデニン (A)，チミン (T)，シトシン (C)，グアニン (G) という塩基の並び方で遺伝情報はだいたい決められている

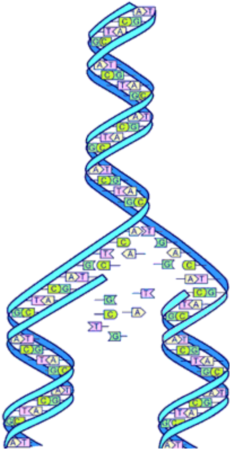
つまり，

- DNA が持つ遺伝情報全体の集合 $= \{A, T, C, G\}^n$

$n$ は生物種などによって異なる自然数

- 大腸菌：$n \approx 4.6 \times 10^6$
- ヒト：$n \approx 3.2 \times 10^9$

http://en.wikipedia.org/wiki/Genome



http://en.wikipedia.org/wiki/DNA_replication

# 集合の直積：補足

$A = \{1, 2\}, B = \{3\}, C = \{4, 5\}$ のとき

$$A \times B \quad = \quad \{(1, 3), (2, 3)\},$$

# 集合の直積：補足

$A = \{1, 2\}, B = \{3\}, C = \{4, 5\}$ のとき

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, 3), (2, 3)\}, \\ B \times C &= \{(3, 4), (3, 5)\}, \end{aligned}$$

## 集合の直積：補足

$A = \{1, 2\}, B = \{3\}, C = \{4, 5\}$ のとき

$$
\begin{aligned}
A \times B &= \{(1,3), (2,3)\}, \\
B \times C &= \{(3,4), (3,5)\}, \\
A \times B \times C &= \{(1,3,4), (1,3,5), (2,3,4), (2,3,5)\},
\end{aligned}
$$

# 集合の直積：補足

$A = \{1, 2\}, B = \{3\}, C = \{4, 5\}$ のとき

$$
\begin{aligned}
A \times B &= \{(1,3),(2,3)\}, \\
B \times C &= \{(3,4),(3,5)\}, \\
A \times B \times C &= \{(1,3,4),(1,3,5),(2,3,4),(2,3,5)\}, \\
(A \times B) \times C &= \{((1,3),4),((1,3),5),((2,3),4),((2,3),5)\},
\end{aligned}
$$

## 集合の直積：補足

$A = \{1, 2\}, B = \{3\}, C = \{4, 5\}$ のとき

$$
\begin{aligned}
A \times B &= \{(1,3), (2,3)\}, \\
B \times C &= \{(3,4), (3,5)\}, \\
A \times B \times C &= \{(1,3,4), (1,3,5), (2,3,4), (2,3,5)\}, \\
(A \times B) \times C &= \{((1,3),4), ((1,3),5), ((2,3),4), ((2,3),5)\}, \\
A \times (B \times C) &= \{(1,(3,4)), (1,(3,5)), (2,(3,4)), (2,(3,5))\}
\end{aligned}
$$

## 集合の直積：補足

$A = \{1, 2\}, B = \{3\}, C = \{4, 5\}$ のとき

$$\begin{aligned}
A \times B &= \{(1,3),(2,3)\}, \\
B \times C &= \{(3,4),(3,5)\}, \\
A \times B \times C &= \{(1,3,4),(1,3,5),(2,3,4),(2,3,5)\}, \\
(A \times B) \times C &= \{((1,3),4),((1,3),5),((2,3),4),((2,3),5)\}, \\
A \times (B \times C) &= \{(1,(3,4)),(1,(3,5)),(2,(3,4)),(2,(3,5))\}
\end{aligned}$$

特に，$A \times B \times C$ と $(A \times B) \times C$ と $A \times (B \times C)$ はすべて異なる

# 目次

# 冪集合

## 冪集合

集合 $A$ の冪集合とは $A$ の部分集合全体から成る集合であり，
$2^A$ と表記する．

$$2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$$

## 例

$A = \{a, b, c\}$ のとき

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

簡単な確認：有限集合 $A$ に対して，$|2^A| = 2^{|A|}$

# 冪集合

## 冪集合

集合 $A$ の冪集合とは $A$ の部分集合全体から成る集合であり，
$2^A$ と表記する．

$$2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$$

## 例

$A = \{a, b, c\}$ のとき

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

簡単な確認：有限集合 $A$ に対して，$|2^A| = 2^{|A|}$

- 「冪集合」の他に「巾集合」,「べき集合」,「ベキ集合」とも書く
- 「$2^A$」の他に「$\mathcal{P}(A)$」,「$\mathscr{P}(A)$」とも書く
- 冪集合の要素は集合 (冪集合は集合の集合)

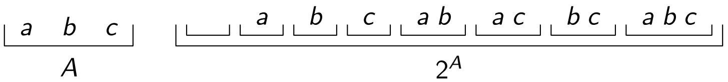
# 冪集合：例とイメージ

## 例

$A = \{a, b, c\}$ のとき

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

イメージ (箱による)



# 冪集合：他の例

## 冪集合 (再掲)

集合 $A$ の冪集合とは $A$ の部分集合全体から成る集合であり，
$2^A$ と表記する．

$$2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$$

- $2^{\{a\}} = \{\emptyset, \{a\}\}$
- $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$
- $2^{\{\emptyset\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

## 冪集合の定義より

$$X \in 2^A \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq A$$

# 目次

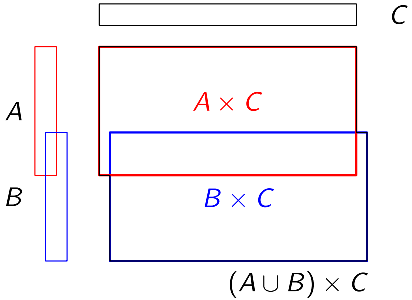
## 直積に関する等式：例題

**例題：次を証明せよ**

任意の集合 $A, B, C$ に対して

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

図による直感



## 直積に関する等式：例題

**例題：次を証明せよ**

任意の集合 $A, B, C$ に対して

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

**格言 (再掲)**

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

証明すべきことは

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$$

同値変形によって証明する

## 直積に関する等式：例題 — 証明

証明：

任意の集合 $A, B, C$ を考える

$(x, y) \in (A \cup B) \times C$

$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$ ←目標

したがって，$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ が成り立つ． $\square$

# 直積に関する等式：例題 — 証明

証明：

任意の集合 $A, B, C$ を考える

$(x, y) \in (A \cup B) \times C$

$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \land (y \in C)$ (直積の定義)

$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$

したがって，$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ が成り立つ． □

## 直積の定義

$$(x, y) \in A \times B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ かつ } y \in B$$

## 直積に関する等式：例題 — 証明

証明：

任意の集合 $A, B, C$ を考える

$$
\begin{aligned}
&(x, y) \in (A \cup B) \times C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C) && \text{(直積の定義)} \\
&\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in C) && \text{(合併の定義)} \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)
\end{aligned}
$$

したがって，$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ が成り立つ． □

### 合併の定義

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ または } x \in B$$

# 直積に関する等式：例題 — 証明

証明：

任意の集合 $A, B, C$ を考える

$(x, y) \in (A \cup B) \times C$

$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C)$ (直積の定義)

$\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in C)$ (合併の定義)

$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in C)) \vee ((x \in B) \wedge (y \in C))$ (分配法則)

$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$

したがって，$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ が成り立つ． □

## 分配法則

$$(P \vee Q) \wedge R \quad \Leftrightarrow \quad (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$$

# 直積に関する等式：例題 — 証明

証明：

任意の集合 $A, B, C$ を考える

$$
\begin{aligned}
& (x, y) \in (A \cup B) \times C \\
\Leftrightarrow\ & (x \in A \cup B) \wedge (y \in C) && \text{(直積の定義)} \\
\Leftrightarrow\ & ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in C) && \text{(合併の定義)} \\
\Leftrightarrow\ & ((x \in A) \wedge (y \in C)) \vee ((x \in B) \wedge (y \in C)) && \text{(分配法則)} \\
\Leftrightarrow\ & ((x, y) \in A \times C) \vee ((x, y) \in B \times C) && \text{(直積の定義)} \\
\Leftrightarrow\ & (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)
\end{aligned}
$$

したがって，$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ が成り立つ． □

**直積の定義**

$$(x, y) \in A \times B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ かつ } y \in B$$

## 直積に関する等式：例題 — 証明

証明：

任意の集合 $A, B, C$ を考える

$$
\begin{aligned}
&(x, y) \in (A \cup B) \times C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C) && \text{(直積の定義)} \\
&\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in C) && \text{(合併の定義)} \\
&\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in C)) \vee ((x \in B) \wedge (y \in C)) && \text{(分配法則)} \\
&\Leftrightarrow ((x, y) \in A \times C) \vee ((x, y) \in B \times C) && \text{(直積の定義)} \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)
\end{aligned}
$$

したがって，$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ が成り立つ． $\square$

**直積の定義**

$$(x, y) \in A \times B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ かつ } y \in B$$

## 直積に関する等式：例題 — 証明

証明：

任意の集合 $A, B, C$ を考える

$$
\begin{aligned}
&(x, y) \in (A \cup B) \times C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (y \in C) && \text{(直積の定義)} \\
&\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y \in C) && \text{(合併の定義)} \\
&\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in C)) \vee ((x \in B) \wedge (y \in C)) && \text{(分配法則)} \\
&\Leftrightarrow ((x, y) \in A \times C) \vee ((x, y) \in B \times C) && \text{(直積の定義)} \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C) && \text{(合併の定義)}
\end{aligned}
$$

したがって，$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ が成り立つ． $\square$

### 合併の定義

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ または } x \in B$$

## 冪集合に関する証明：例題

**次の命題は正しいか，正しくないか**

任意の集合 $A, B$ に対して

$$A \subseteq B \quad \text{ならば，} \quad 2^A \subseteq 2^B$$

が成り立つ．

例：$A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$ のとき

- $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $2^B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

この例においては正しい

## 冪集合に関する証明：例題 (解答例)

解答例：正しい．理由は以下の通りである．

任意の集合 $A, B$ を考え，$A \subseteq B$ であると仮定する．. . . . . . . . . . . . . (1)

したがって，$2^A \subseteq 2^B$ が成り立つ． $\square$

## 冪集合に関する証明：例題 (解答例)

解答例：正しい．理由は以下の通りである．

任意の集合 $A, B$ を考え，$A \subseteq B$ であると仮定する． . . . . . . . . . . . . . (1)

$X \in 2^A$ であると仮定する． . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (2)

$X \in 2^B$ が成り立つ．

したがって，$2^A \subseteq 2^B$ が成り立つ． $\square$

**部分集合とは？ (論理を使った定義)**

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A) \to (x \in B)$$

## 冪集合に関する証明：例題 (解答例)

解答例：正しい．理由は以下の通りである．

任意の集合 $A, B$ を考え，$A \subseteq B$ であると仮定する． ……………(1)

$X \in 2^A$ であると仮定する． ……………………………………(2)

(2) と冪集合の定義より，$X \subseteq A$ が成り立つ． ……………………(3)

$X \in 2^B$ が成り立つ．

したがって，$2^A \subseteq 2^B$ が成り立つ． $\square$

### 冪集合の定義

$$X \in 2^A \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq A$$

## 冪集合に関する証明：例題 (解答例)

解答例：正しい．理由は以下の通りである．

任意の集合 $A, B$ を考え，$A \subseteq B$ であると仮定する．............(1)

$X \in 2^A$ であると仮定する．............................(2)

(2) と冪集合の定義より，$X \subseteq A$ が成り立つ．...............(3)

(1) と (3) より，$X \subseteq B$ が成り立つ．.........................(4)

$X \in 2^B$ が成り立つ．

したがって，$2^A \subseteq 2^B$ が成り立つ．$\square$

### 部分集合の性質

$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば，$A \subseteq C$

## 冪集合に関する証明：例題 (解答例)

解答例：正しい．理由は以下の通りである．

任意の集合 $A, B$ を考え，$A \subseteq B$ であると仮定する． ..........(1)

$X \in 2^A$ であると仮定する． ..........(2)
(2) と冪集合の定義より，$X \subseteq A$ が成り立つ． ..........(3)
(1) と (3) より，$X \subseteq B$ が成り立つ． ..........(4)
(4) と冪集合の定義より，$X \in 2^B$ が成り立つ．

したがって，$2^A \subseteq 2^B$ が成り立つ． □

### 冪集合の定義

$$X \in 2^A \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq A$$

## 目次

# 今日の概要

## 今日の目標

- 有限集合の要素数が計算できる
- 集合の直積と冪集合を理解し，正しく答えられる
- 集合の直積と冪集合に関する包含関係，等式を証明できる

## 残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

# 目次