

離散数学 第 11 回
証明法 (4) : 数学的帰納法

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2017 年 7 月 13 日

最終更新 : 2017 年 7 月 12 日 11:05

岡本 吉央 (電通大)

離散数学 (11)

2017 年 7 月 13 日

1 / 43

スケジュール 後半 (予定)

- 8 写像 (1) : 像と逆像 (6月8日)
 - 中間試験 (6月15日)
- 9 写像 (2) : 全射と単射 (6月22日)
- 10 関係 (1) : 関係 (6月29日)
 - * 休講 (出張) (7月6日)
- 11 証明法 (4) : 数学的帰納法 (7月13日)
- 12 集合と論理 (5) : 集合の再帰的定義 (7月20日)
 - * 休講 (出張) (7月27日)
 - 期末試験 (???)

注意 : 予定の変更もありうる

岡本 吉央 (電通大)

離散数学 (11)

2017 年 7 月 13 日

3 / 43

数学的帰納法

目次

- 1 数学的帰納法
- 2 再帰的定義
- 3 今日のまとめ

岡本 吉央 (電通大)

離散数学 (11)

2017 年 7 月 13 日

5 / 43

数学的帰納法

例題 1 : 数学的帰納法による証明

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,
 $8^n - 3^n$ が 5 で割り切れる
ことを証明せよ.

数学的帰納法による証明 : 方針

- 1 $n = 1$ のときに正しいことを証明する
- 2 任意の正の整数 $k \geq 1$ に対して,
 $n = k$ のときに正しいならば, $n = k + 1$ のときに正しいことを証明する

岡本 吉央 (電通大)

離散数学 (11)

2017 年 7 月 13 日

7 / 43

スケジュール 前半

- 1 集合と論理 (1) : 命題論理 (4月13日)
- 2 集合と論理 (2) : 集合と論理の対応 (4月20日)
- 3 集合と論理 (3) : 述語論理 (4月27日)
 - * 休講 (みどりの日) (5月4日)
- 4 証明法 (1) : \exists と \forall を含む命題の証明 (5月11日)
- 5 証明法 (2) : 含意を含む命題の証明 (5月18日)
- 6 証明法 (3) : 集合に関する証明 (5月25日)
- 7 集合と論理 (4) : 直積と冪集合 (6月1日)

岡本 吉央 (電通大)

離散数学 (11)

2017 年 7 月 13 日

2 / 43

今日の概要

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 数学的帰納法で証明ができるようになる
- ▶ 再帰的定義によって無限を扱う方法を理解する

岡本 吉央 (電通大)

離散数学 (11)

2017 年 7 月 13 日

4 / 43

数学的帰納法

例題 1

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,
 $8^n - 3^n$ が 5 で割り切れる
ことを証明せよ.

確認

- ▶ $n = 1$ のとき : $8^n - 3^n = 8 - 3 = 5$
- ▶ $n = 2$ のとき : $8^n - 3^n = 64 - 9 = 55 = 5 \times 11$
- ▶ $n = 3$ のとき : $8^n - 3^n = 512 - 27 = 485 = 5 \times 97$
- ▶ ...

注 : これはただの確認であり, 証明ではない

岡本 吉央 (電通大)

離散数学 (11)

2017 年 7 月 13 日

6 / 43

数学的帰納法

例題 1 : 数学的帰納法による証明 (1)

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して,
 $8^n - 3^n$ が 5 で割り切れる
ことを証明せよ.

証明 : まず $n = 1$ のときに正しいことを証明する.

- ▶ $n = 1$ のとき, $8^n - 3^n = 8 - 3 = 5$.
- ▶ 5 は 5 で割り切れるので, このとき正しい.

岡本 吉央 (電通大)

離散数学 (11)

2017 年 7 月 13 日

8 / 43

例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して、
 $8^n - 3^n$ が 5 で割り切れる
 ことを証明せよ。

証明 (続) : 次に、任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える。

- ▶ $8^k - 3^k$ が 5 で割り切れると仮定する。
 (注 : 帰納法の仮定と呼ばれる)
- ▶ 証明すべきことは、 $8^{k+1} - 3^{k+1}$ が 5 で割り切れることである。
- ▶ 帰納法の仮定より、ある正の整数 m が存在して、 $8^k - 3^k = 5m$ となる。

数学的帰納法による証明法

「任意の正の整数 n に対して、 $P(n)$ 」という形の命題の証明

- 1 $P(1)$ を証明 (基底段階)
- 2 「任意の正の整数 k に対して『 $P(k)$ ならば $P(k+1)$ 』」を証明 (帰納段階)

帰納段階での証明の書き方

- 1 「任意の正の整数 k を考える」と書く
- 2 「 $P(k)$ であると仮定する」と書く
- 3 $P(k)$ を用いて、 $P(k+1)$ が正しいことを導く (証明する)

例題 1 では、

$$P(n) = 「8^n - 3^n が 5 で割り切れる」$$

数学的帰納法はなぜ正しいのか？

数学的帰納法による証明法

「任意の正の整数 n に対して、 $P(n)$ 」という形の命題の証明

- 1 $P(1)$ を証明 (基底段階)
- 2 「任意の正の整数 k に対して『 $P(k)$ ならば $P(k+1)$ 』」を証明 (帰納段階)

つまり、正の整数を全部集めた集合を \mathbb{Z}_+ として、
 証明したいことは

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+ (P(n))$$

数学的帰納法はなぜ正しいのか？

分かりにくいので、 \mathbb{Z}_+ を $\{1, 2, 3\}$ に置きかえた場合を考える

$$P(1) \wedge (\forall k \in \{1, 2, 3\} (P(k) \rightarrow P(k+1))) \Rightarrow \forall n \in \{1, 2, 3\} (P(n))$$

書き換えると、

$$P(1) \wedge (P(1) \rightarrow P(2)) \wedge (P(2) \rightarrow P(3)) \wedge (P(3) \rightarrow P(4)) \\ \Rightarrow P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$$

これを推論で証明してみる

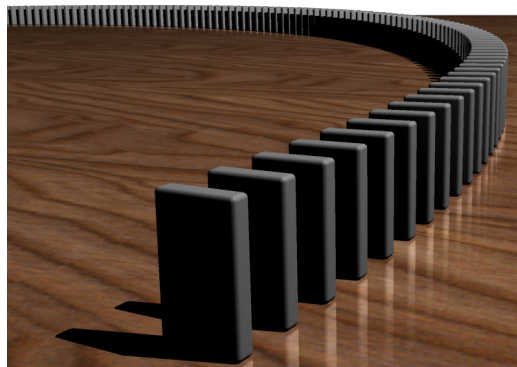
例題 1 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して、
 $8^n - 3^n$ が 5 で割り切れる
 ことを証明せよ。

証明 (続 2) : このとき、

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 3^{k+1} &= (5+3) \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k \\ &= 5 \cdot 8^k + 3 \cdot (8^k - 3^k) \\ &= 5 \cdot 8^k + 3 \cdot 5m \quad (\text{帰納法の仮定から}) \\ &= 5 \cdot (8^k + 3m). \end{aligned}$$

$8^k + 3m$ は正の整数なので、 $8^{k+1} - 3^{k+1}$ は 5 で割り切れる。 □



<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Dominoeffect.png>

数学的帰納法はなぜ正しいのか？

数学的帰納法による証明法

「任意の正の整数 n に対して、 $P(n)$ 」という形の命題の証明

- 1 $P(1)$ を証明 (基底段階)
- 2 「任意の正の整数 k に対して『 $P(k)$ ならば $P(k+1)$ 』」を証明 (帰納段階)

数学的帰納法による証明が主張していることは

$$\underbrace{P(1)}_1 \wedge \underbrace{(\forall k \in \mathbb{Z}_+ (P(k) \rightarrow P(k+1)))}_2 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}_+ (P(n))$$

証明すること

任意の命題 $P(1), P(2), P(3), P(4)$ に対して

$$(P(1) \wedge (P(1) \rightarrow P(2)) \wedge (P(2) \rightarrow P(3)) \wedge (P(3) \rightarrow P(4))) \\ \Rightarrow (P(1) \wedge P(2) \wedge P(3))$$

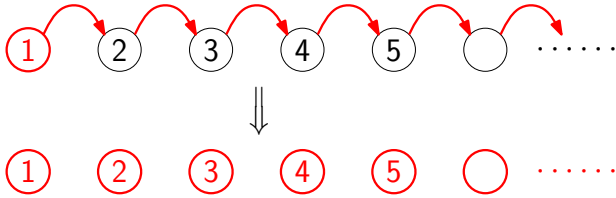
証明 : $P(1), P(1) \rightarrow P(2), P(2) \rightarrow P(3), P(3) \rightarrow P(4)$ を仮定する

- ▶ $P(1)$ と $P(1) \rightarrow P(2)$ より、 $P(2)$ は成り立つ。
- ▶ $P(2)$ が成り立つので、それと $P(2) \rightarrow P(3)$ より、 $P(3)$ が成り立つ。
- ▶ したがって、 $P(1), P(2), P(3)$ はすべて成り立つ。 □

モードゥス・ポネンス (モーダス・ポネンス) (推論の類型 : 第 6 回講義)

任意の命題変数 P, Q に対して

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$$



例題 2：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ。

証明 (基底段階)：まず、 $n = 1$ のときに正しいことを証明する。

- ▶ 左辺 = $2n = 2$.
- ▶ 右辺 = $2^n = 2$.
- ▶ したがって、 $2n \leq 2^n$ であり、正しい。

① 数学的帰納法

② 再帰的定義

③ 今日のまとめ

階乗とは？ (常識に基づく定義)

正の整数 n に対して、 n の階乗とは

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

のこと

この定義の問題点

- ▶ 「…」はあいまい

あいまいさのないように定義するには？

例題 2：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ。

確認

- ▶ $n = 1$ のとき： $2n = 2 \leq 2 = 2^n$
- ▶ $n = 2$ のとき： $2n = 4 \leq 4 = 2^n$
- ▶ $n = 3$ のとき： $2n = 6 \leq 8 = 2^n$
- ▶ $n = 4$ のとき： $2n = 8 \leq 16 = 2^n$
- ▶ ...

注：これはただの確認であり、証明ではない

例題 2：証明したいこと

任意の正の整数 n に対して

$$2n \leq 2^n$$

となることを証明せよ。

証明 (帰納段階)：次に、任意の正の整数 $k \geq 1$ を考える。

- ▶ $2k \leq 2^k$ であると仮定する。
- ▶ 証明すべきことは、 $2(k+1) \leq 2^{k+1}$ である。
(コツ：↑これをしっかりと書くとよい)
- ▶ $2(k+1) = 2k + 2$
 $\leq 2^k + 2$ (帰納法の仮定から)
 $\leq 2^k + 2^k$ ($k \geq 1$ であるから)
 $= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ □

次に来るのは何？

1, 3, 7, 13, 21, 31

$$n^2 + n + 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

- ▶ 「…」はあいまい

格言

情報科学の本質の 1 つは「『無意識』を意識すること」

階乗とは？ (再帰的定義)

正の整数 n に対して、 n の階乗とは

$$n! = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ n \cdot (n-1)! & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

のこと

実際の計算

- ▶ $n = 1$ のとき： $1! = 1$
- ▶ $n = 2$ のとき： $2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$
- ▶ $n = 3$ のとき： $3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$
- ▶ $n = 4$ のとき： $4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$
- ▶ ...

例題 3 : 再帰的定義

例題 3 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して, a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 任意の正の整数 n に対して,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

確認

- ▶ $n = 1$ のとき: $a_1 = 1 = 2 \cdot 1 - 1$
- ▶ $n = 2$ のとき: $a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3 = 2 \cdot 2 - 1$
- ▶ $n = 3$ のとき: $a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5 = 2 \cdot 3 - 1$
- ▶ ...

例題 3 : 数学的帰納法による証明 (基底段階)

例題 3 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して, a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 任意の正の整数 n に対して,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (基底段階): まず, $n = 1$ のときを証明する.

- ▶ 左辺 = $a_1 = 1$.
- ▶ 右辺 = $2 \cdot 1 - 1 = 1$.
- ▶ したがって, $n = 1$ のとき $a_n = 2n - 1$ となる.

例題 3 : 数学的帰納法による証明 (帰納段階)

例題 3 : 証明したいこと

任意の正の整数 n に対して, a_n を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 任意の正の整数 n に対して,

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ

証明 (帰納段階): 次に任意の正の整数 k を考える.

- ▶ $a_k = 2k - 1$ であると仮定する.
- ▶ 証明すべきことは, $a_{k+1} = 2(k+1) - 1$.
- ▶ $a_{k+1} = a_k + 2$ ($k+1 > 1$ より)
 $= (2k - 1) + 2$ (帰納法の仮定から)
 $= 2(k+1) - 1$. □

再帰的定義の例: フィボナッチ数

フィボナッチ数とは?

任意の正の整数 n に対して, 第 n 番フィボナッチ数 F_n を

$$F_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ F_{n-1} + F_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する

確認

- ▶ $n = 1$ のとき: $F_1 = 1$
- ▶ $n = 2$ のとき: $F_2 = 1$
- ▶ $n = 3$ のとき: $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$
- ▶ $n = 4$ のとき: $F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$
- ▶ $n = 5$ のとき: $F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$
- ▶ ...

フィボナッチ数の公式

例題 4 : フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明の注意点

- ▶ F_n は F_{n-1}, F_{n-2} を使って定義される
- ▶ よって, (1つ前だけ仮定する) 普通の帰納法では証明できない
- ▶ よって, もっと強い証明の仕方が必要となる
- ▶ 基底段階も $n = 1$ のときと $n = 2$ のときの2つが必要となる

数学的帰納法の強いバージョン

数学的帰納法の強いバージョン (累積帰納法とも呼ばれる)

[基底段階]

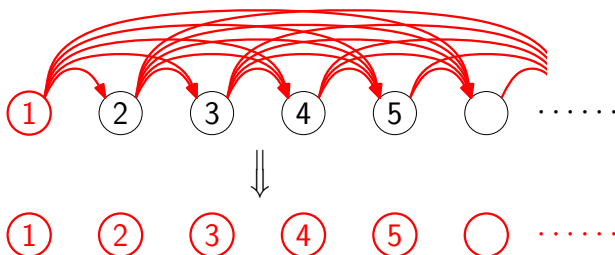
- ▶ $P(1)$ を証明する

[帰納段階] 任意の正の整数 k を考える

- ▶ 1以上 k 以下の任意の正の整数 k' に対して $P(k')$ を仮定する
- ▶ $P(k+1)$ を証明する

- ▶ 前のバージョンでは帰納段階で「 $P(k)$ 」のみを仮定した
- ▶ フィボナッチ数に関する証明では基底段階が $P(1)$ と $P(2)$ になる

数学的帰納法の強いバージョン: イメージ



フィボナッチ数の公式: 数学的帰納法 (基底段階 1)

例題 4 : フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明: まず, $n = 1$ のときを証明する.

- ▶ 左辺 = $F_1 = 1$.
- ▶ 右辺 = $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$.
- ▶ したがって, $n = 1$ のときは正しい.

例題 4：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明：次に、 $n=2$ のときを証明する。

- ▶ 左辺 $= F_2 = 1$.
- ▶ 右辺 $= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{6-2\sqrt{5}}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1$.
- ▶ したがって、 $n=2$ のときは正しい。

例題 4：フィボナッチ数の公式

任意の正整数 n に対して第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

が成り立つことを証明せよ

証明： k を 2 以上の任意の整数とする。

- ▶ 1 以上 k 以下の任意の整数 k' に対して、
 $F_{k'} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k'} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k'} \right)$ と仮定する。
- ▶ 証明すべきことは、 $F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right)$ である。

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && (\text{フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right) && (\text{式の整理}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) && (\text{式の整理}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right) && (\text{式の整理}) \end{aligned}$$

したがって、 $F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right)$ となる。 \square

帰納段階で証明する目標

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right)$$

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && (\text{フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= \dots \end{aligned}$$

つまり、 $n = k+1$ の場合の証明では、次の 2 つを仮定しないとイケない

- ▶ $n = k$ の場合
- ▶ $n = k-1$ の場合

ここから、普通の数学的帰納法では足りないことが分かる

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && (\text{フィボナッチ数の定義と } k+1 > 2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= \dots \end{aligned}$$

仮に、 $n = k+1 = 2$ の場合を考えると、次の 2 つを仮定することになる

- ▶ $n = k = 1$ の場合
- ▶ $n = k-1 = 0$ の場合

しかし、 $n = 0$ の場合は考えないので、 $n = k+1 = 2$ にはできない

- ▶ つまり、帰納段階は $n = k+1 \geq 3$ の場合であり、
- ▶ $n = k+1 = 2$ のときは基底段階にしないとイケない

下書きから分かった行うべき数学的帰納法

- ▶ 基底段階： $n = 1, 2$ の場合
- ▶ 帰納段階： $k \geq 2$ として、累積帰納法

疑問

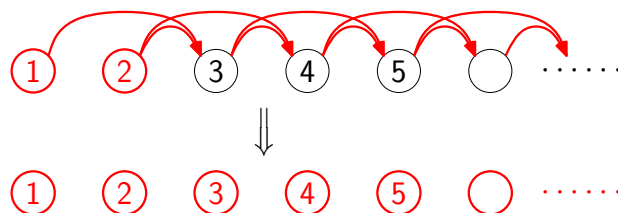
どうして

- ▶ 累積帰納法を使うのか？
- ▶ $n = 1, 2$ の場合を基底段階にしないとイケないのか？

証明を行う際の下書きを考えれば分かる

格言

数学的帰納法で証明するとき、下書きは帰納段階から始める



目次

- 1 数学的帰納法
- 2 再帰的定義
- 3 今日のまとめ

今日のまとめ

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 数学的帰納法で証明ができるようになる
- ▶ 再帰的定義によって無限を扱う方法を理解する